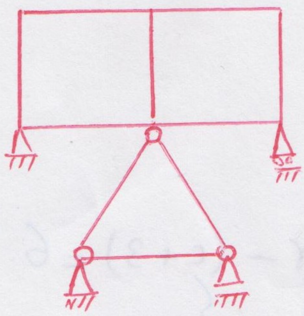
حل تمرین

تحلیل سازه

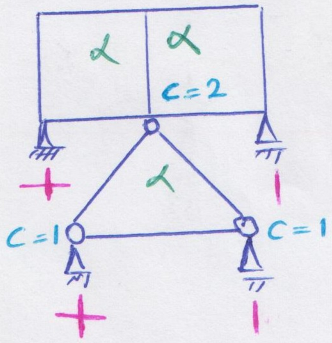
۱

فصل اول : پایداری، ناپایداری، معین و نامعین سازه‌ها

۱- مطلوب است تعیین درجه نامعینی سازه‌های زیر :

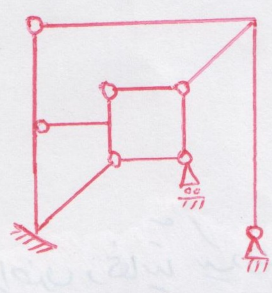


حل :

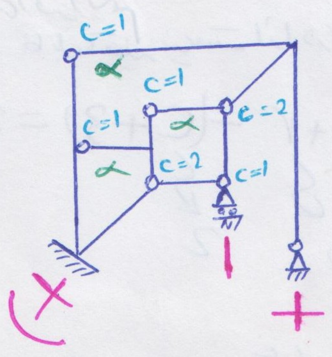


$$n = 3k + r - (c+3) = 8$$

3 6 4

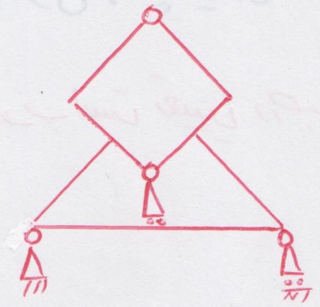


حل :

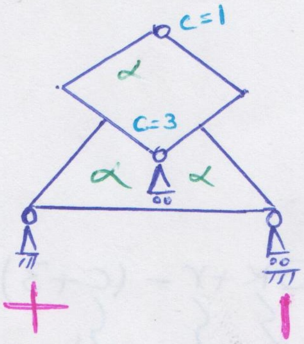


$$n = 3k + r - (c+3) = 4$$

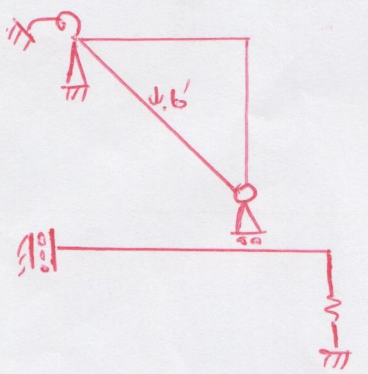
3 6 8



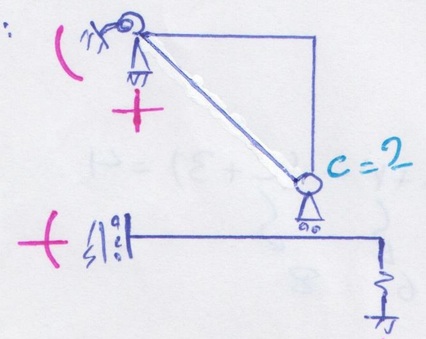
حل :



$$n = \underbrace{3K}_{3} + \underbrace{r}_{3} - \underbrace{(c+3)}_{4} = 6$$



حل :

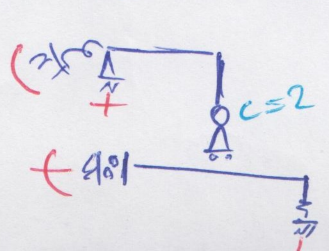


توجه شود کابل، میله نیست لذا در شمارش K دقت شود

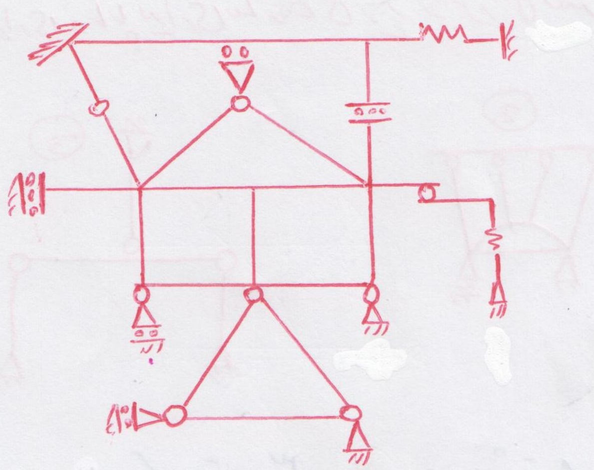
$$n = \underbrace{3K}_{1} + \underbrace{r}_{6} - \underbrace{(c+3)}_{2} = 2$$

حل به روش دوم :

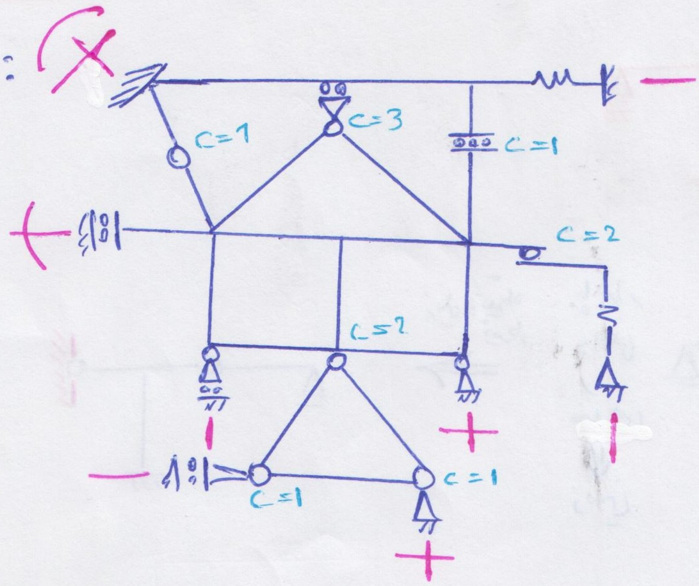
کابل را حذف کرده و نهایتا یک درجه به درجه نامعینی اضافه می کنیم



$$n = \underbrace{3K}_{\text{صفر}} + \underbrace{r}_{6} - \underbrace{(c+3)}_{2} = 1 \underbrace{+1}_{\text{به خاطر حذف کابل}} = 2$$

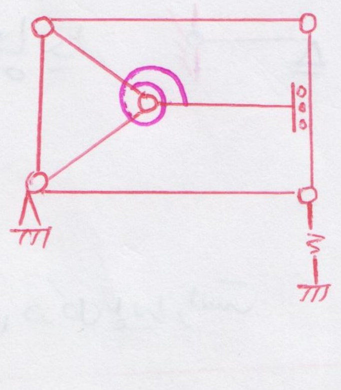


حل :



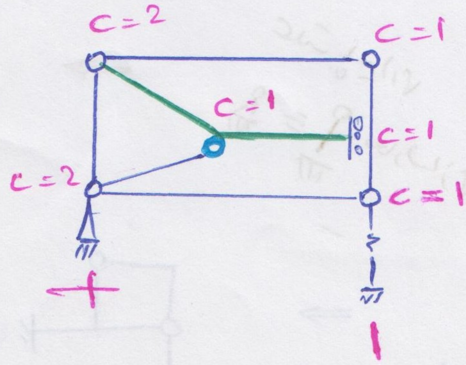
$$n = 3K + r - (C+3) = 17$$

$$3K \to 6,\quad r \to 13,\quad (C+3) \to 11$$



نکته : درموارد وجود فنر پیچشی داخلی، دو عضوی را که فنر هم مرتبط کرده است را مستقیماً به یکدیگر وصل کرده و فنر پیچشی داخلی را حذف کنید سپس بصورت معمول، عمل کنید

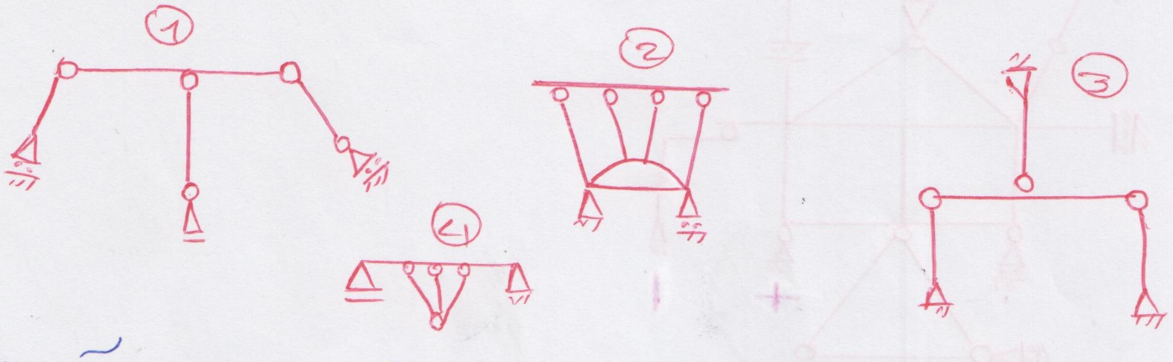
$\xrightarrow[\text{داخلی و اتصال دو عضو}]{\text{حذف فنر پیچشی}}$



$$n = 3K + r - (C+3) = 2$$

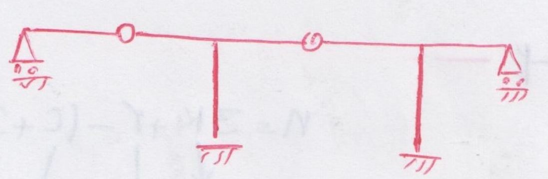
$$3K \to 3,\quad r \to 3,\quad (C+3) \to 7$$

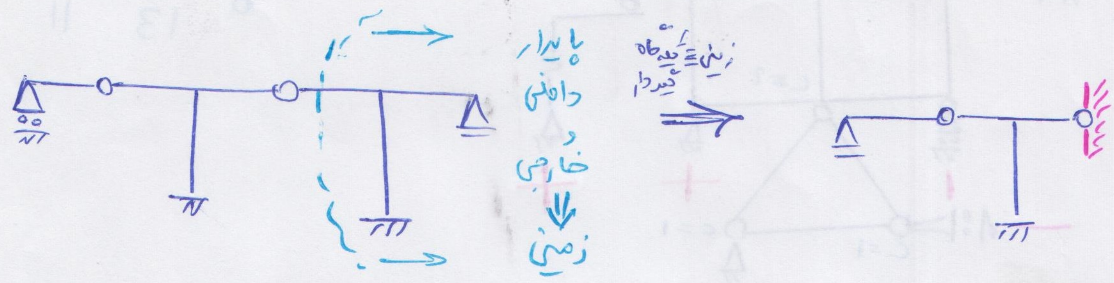
۲- پایداری و ناپایداری سازه‌های زیر را بررسی کنید

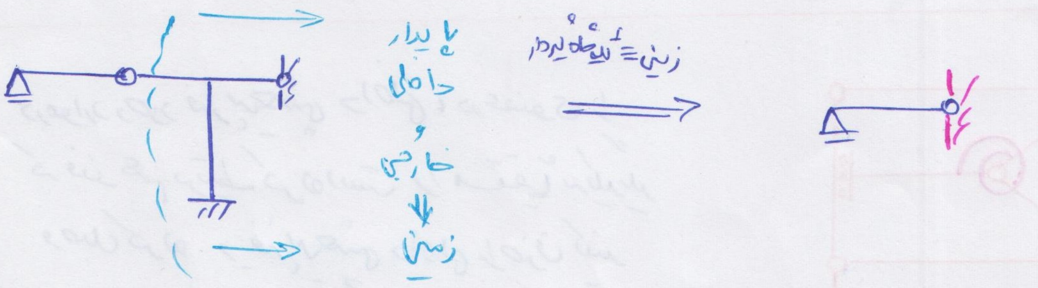


در هر چهار شکل فوق سه مفصل (یا بیشتر) در یک راستا قرار دارند ⇐ ناپایدار آنی (هندسی)

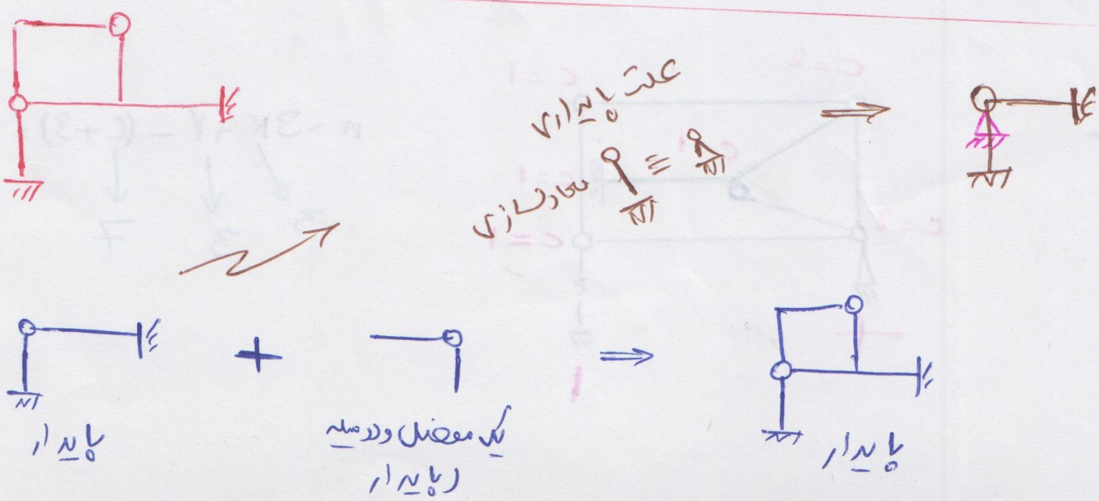
استدلال های دیگر: ① سه عکس العمل متقارب ⇐ ناپایدار ③ متقارن سازی و سه عکس العمل موازی



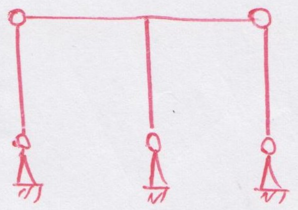


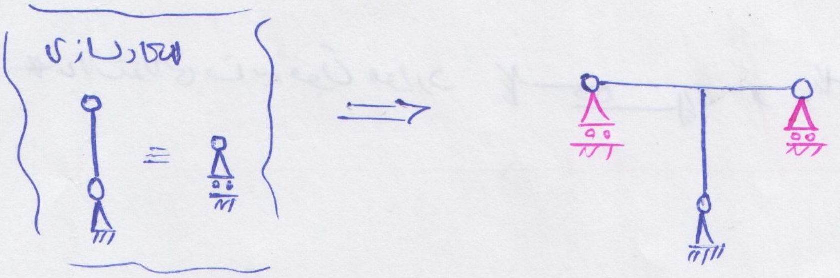


پس در کل پایدار است

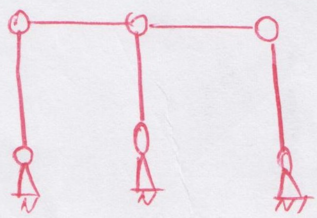


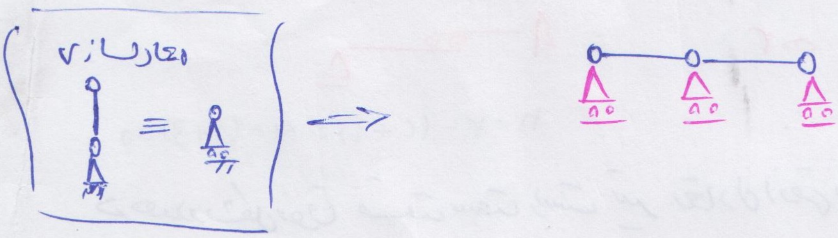
3



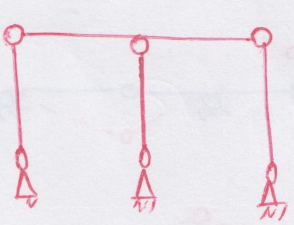


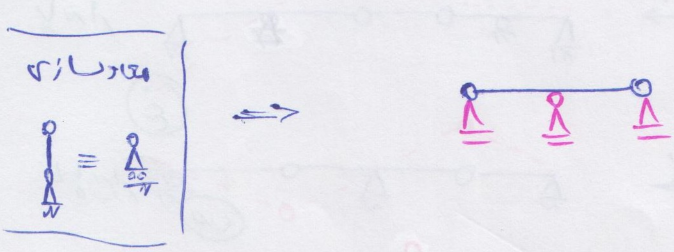
پایدار



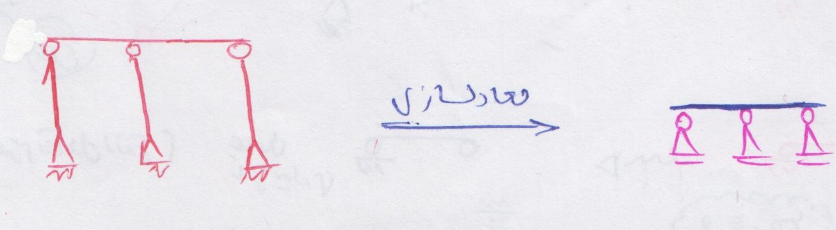


۳ عکس العمل موازی
⇐ ناپایدار





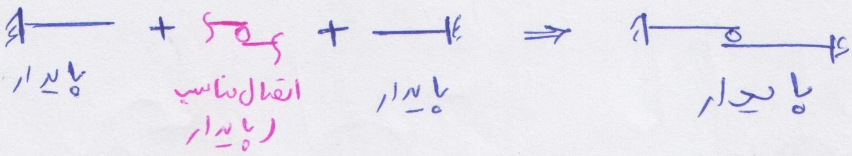
۳ عکس العمل موازی
⇐ ناپایدار



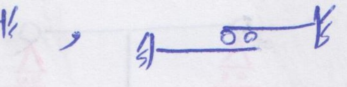
۳ عکس العمل موازی
⇐ ناپایدار

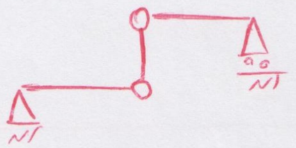
$$n = 3k + r - (c+3) = 1$$

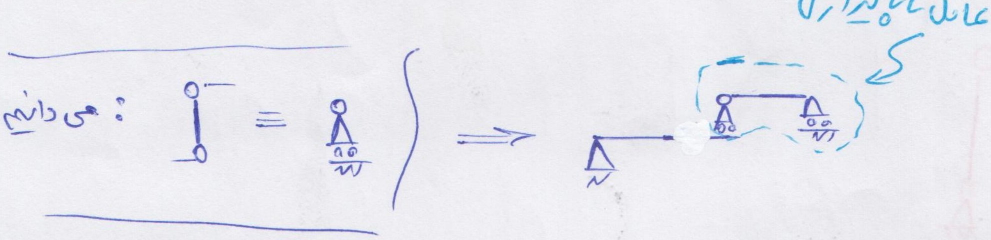
$k = 0,\quad r = 6,\quad c = 2$



* با استدلالی مشابه فوق موارد ... و ... نیز پایدار هستند



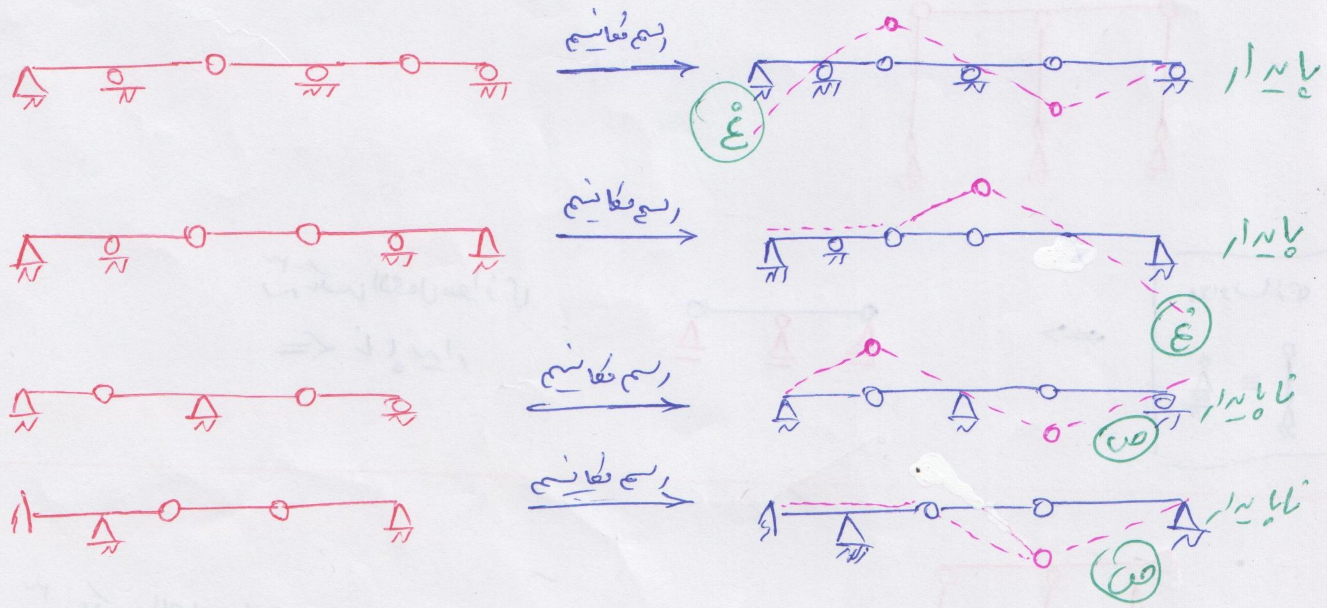


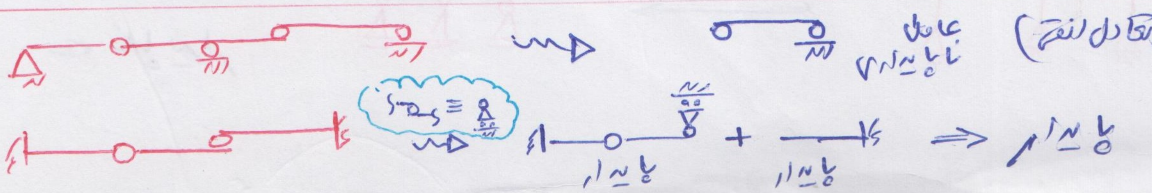


$n = r - (c+3) = 4 - (2+3) = -1$

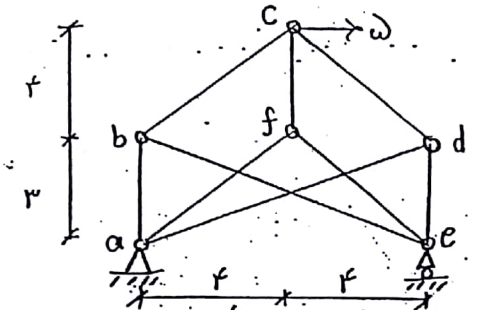
$n = r - (c+3) = 4 - (1+3) = 0$

در هر دو شکل فوق قسمت سمت راست تیر تعادل افقی ندارد و عامل ناپایداری است





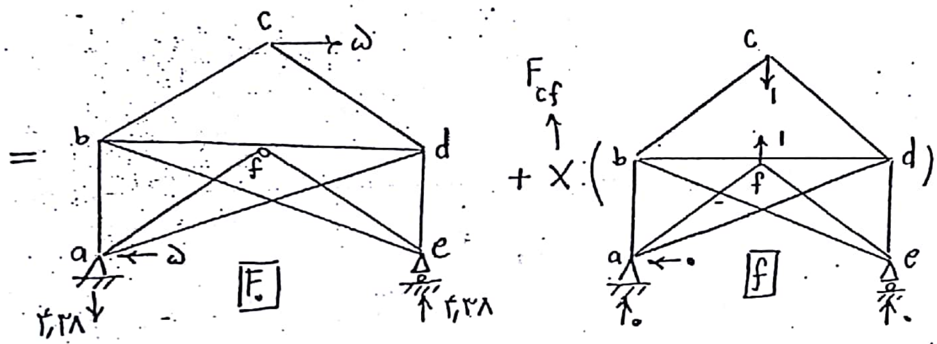
فصل دوم : خرپاها



مطلوب است تحلیل خرپای روبرو .

معین است $m+r-2j=9+3-2\times6=0$

اما در تمام گره ها ۳ نیروی مجهول داریم ، لذا روش مفصل (روش گره) مناسب نمی باشد
همچنین نمی توان هیچ برشی انتخاب کرد که ۳ عضو را قطع نماید در حالیکه اگر n عضو را قطع کرد n-1 عضو آن از یک نقطه بگذرد . می توان دید
هیچ قسمتی از سازه را نیز نمی توان بیرون کشید تا از روش جداسازی استفاده نمائیم . لذا روش جابجایی (هنبرگ) را انتخاب می نمائیم .



نیرو در عضو cf را بعنوان مجهول در نظر می گیریم . این عضو را برداشته و bd را اضافه می کنیم . دقت شود عضو bd از کنار گره f گذشته است و این گره
داخل عضو bd نمی باشد . کلیه بارها را در شکل اول قرار داده و در شکل کلی فقط بار واحد را قرار می دهیم . می بینیم هر دو سازه در بحالت شکل مشابه
می باشند و بکمک روش گره ها قابل حل خواهند بود . نیرو در سازه اصلی $\boxed{F}$ می باشد .

عضو	F.	f	$F=F_{.}+Xf$
cb	۳,۵۴	-۰/۷۰۷	۲,۰۲
cd	-۳,۵۴	-۰/۷۰۷	-۵,۰۵
af	۰	۰/۸۳۳	۱,۷۸
fe	۰	۰/۸۳۳	۱,۷۸
eb	۰	-۰/۷۱۲	-۱,۵۳
ed	-۴,۳۸	-۰/۲۵	-۴,۹۱
ad	۵,۳۴	-۰/۷۱۲	۳,۸۱
db	-۲,۵	۱/۱۶۷	۰
ba	۲,۵	-۰/۲۵	۱,۹۶

$$F_{bd}=(F_{.})_{bd}+X\,f_{bd}$$

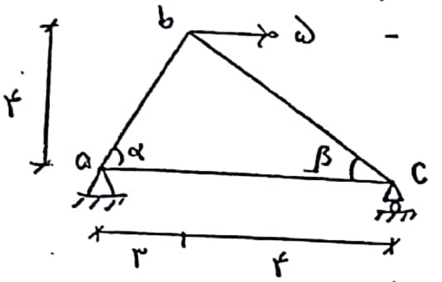
زیرا نباید وجود داشته باشد $F_{\bar{bd}}=0$ از طرفی

$$\Rightarrow\ -2.5+X\,(1.167)=0$$

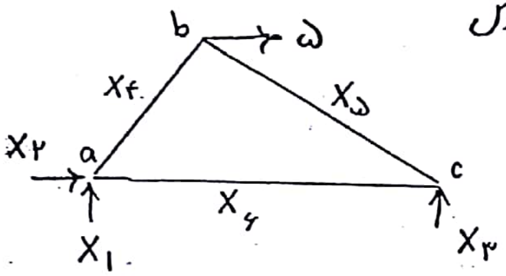
$$X=2.142=F_{cf}$$

به این ترتیب ستون آخر جدول بکمک جمع آثار تکمیل خواهد شد .

مطلوب است تحلیل خرپای روبرو به روش ماتریسی

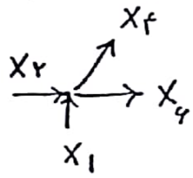


دیدیم که خرپا به سادگی به روش گره ها قابل حل می باشد. اما مزیت روش ماتریسی آن است که هر خرپای معینی را به کمک این روش می توان تحلیل کرد مثلاً خرپای بغرنج را نیز با این روش قابل حل می باشد. مشکل این است که در تحلیل، به ماتریس های بزرگ و معکوس سازی آنها بر می خوریم. ابتدا کلیه مجهولات (از جمله واکنشها) را شماره گذاری می کنیم. در این روش حتی می توان واکنشها را نیز از ابتدا محاسبه نکرده و به عنوان مجهولات وارد مسئله نمائیم.



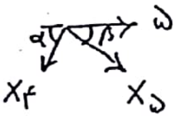
در کلیه گره ها معادلات تعادل را می نویسیم.

گره a



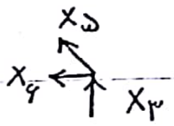
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow X_2 + X_4 \cos\alpha + X_6 = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow X_4 \sin\alpha + X_1 = 0 \end{cases}$$

گره b



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow -X_4 \cos\alpha + X_5 \cos\beta + 5 = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow -X_4 \sin\alpha - X_5 \sin\beta = 0 \end{cases}$$

گره c



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow -X_6 - X_5 \cos\beta = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow X_3 + X_5 \sin\beta = 0 \end{cases}$$

حال هر ۶ معادله را در یک ماتریس قرار می دهیم.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cos\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\beta & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sin\beta & 0 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix}}_{\{X\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{B\}} \Rightarrow \{X\} = [A]^{-1}\{B\} = \begin{Bmatrix} -2.86 \\ -5 \\ 2.86 \\ 3.57 \\ -4.04 \\ 2.86 \end{Bmatrix}$$

دیدیم که واکنشها و نیروهای داخلی بدست آمد.

$[A]^{-1}$ طرفین ضربدر $\Rightarrow \underbrace{[A]^{-1}[A]}_{I}\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$

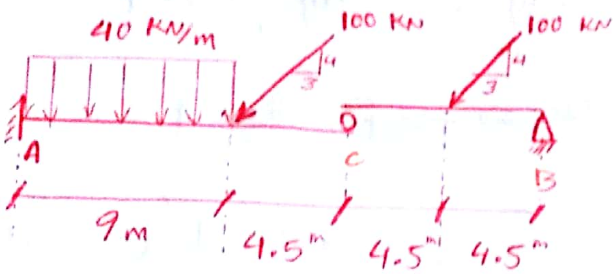
$\Rightarrow \{X\} = [A]^{-1}\{B\}$

اما برای یک خرپای ساده باید یک ماتریس ۶x۶ را معکوس نمائیم. اگر $\det(A)=0$ خرپا ناپایدار است.

Scanned by CamScanner

فصل سوم : تحلیل سازه های معین

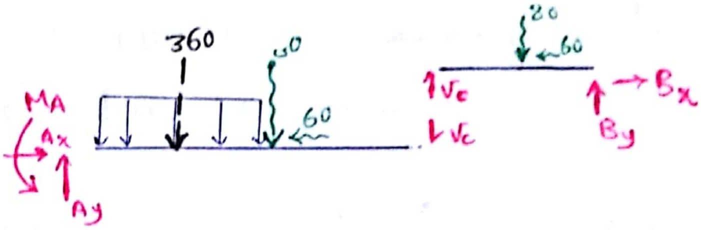
۱- سازه‌ها زیر را تحلیل نمایید



نمودار جسم آزاد

سازه را از نقطه داخلی c جداسازی می‌کنیم و تعادل را برای قسمت BC برقرار می‌کنیم

یادآوری : $\Sigma N_i = 0$ ، $\Sigma M_i = 0$



$$\overset{\oplus}{\rightarrow} \Sigma F_x^{BC} = 0 \rightarrow \frac{-3}{5}(100) + B_x = 0 \rightarrow B_x = 60\ KN \rightarrow$$

$$\oplus \circlearrowleft \Sigma M_c^{BC} = 0 \rightarrow -\frac{4}{5}(100)(4.5) + B_y(9) = 0 \rightarrow B_y = 40\ KN \uparrow$$

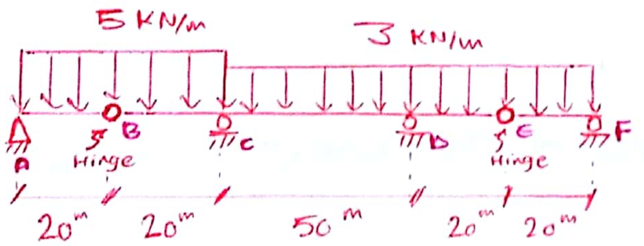
معادلات تعادل برای کل سازه :

$$\overset{\oplus}{\rightarrow} \Sigma F_x^{کل} = 0 \rightarrow A_x - 2\left(\frac{3}{5}\right)(100) + 60 = 0 \rightarrow A_x = 60\ KN \rightarrow$$

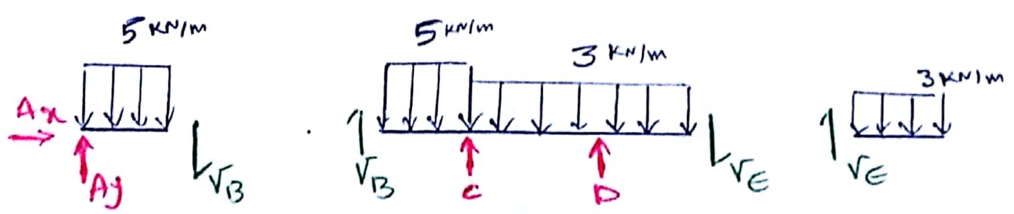
$$\oplus \uparrow \Sigma F_y^{کل} = 0 \rightarrow A_y - 40(9) - 2\left(\frac{4}{5}\right)(100) + 40 = 0 \rightarrow A_y = 480\ KN \uparrow$$

$$\oplus \circlearrowleft \Sigma M_A^{کل} = 0 \rightarrow M_A - 40(9)(4.5) - \frac{4}{5}(100)(9+18) + 40(22.5) = 0$$

$$\rightarrow M_A = 2880\ KN.m \circlearrowleft$$



نمودار جسم آزاد



$$\overset{\oplus}{\rightarrow} \Sigma F_x^{کل} = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$\oplus\circlearrowleft\; M_B^{AB} = 0 \rightarrow -A_y(20) + [5(20)](10) = 0 \Rightarrow A_y = 50\ \text{kN} \uparrow$

$\oplus\circlearrowleft\; M_E^{EF} = 0 \rightarrow -[3(20)](10) + F(20) = 0 \rightarrow F = 30\ \text{kN} \uparrow$

تعادل برای کل سازه :

$\oplus\circlearrowleft\; \Sigma M_D^{\text{کل}} = 0 \rightarrow -50(90) + [5(40)](70) - C(50) + [3(90)](5) + 30(40) = 0$

$\rightarrow C = 241\ \text{kN} \uparrow$

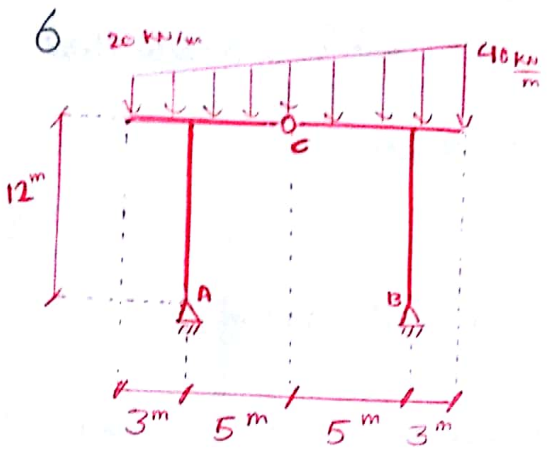
$\oplus\uparrow\; \Sigma F_y^{\text{کل}} = 0 \rightarrow 50 - 5(40) + 241 - 3(90) + D + 30 = 0$

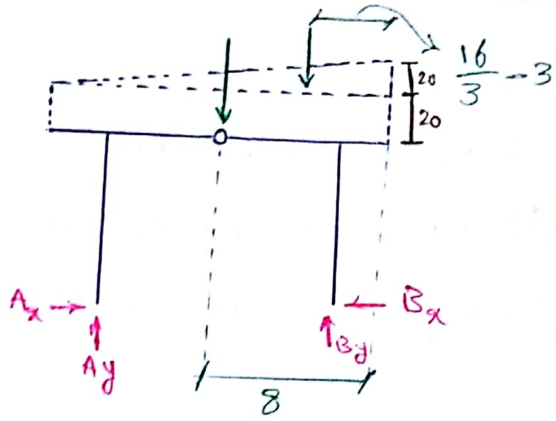
$\rightarrow D = 149\ \text{kN} \uparrow$

کنترل محاسبات : $\oplus\circlearrowleft\; \Sigma M_F^{\text{کل}} = 0 \rightarrow -50(130) + [5(40)](110) - 241(90)$

$+ [3(90)](45) - 149(40) = 0$ O.K.

6





$$\Sigma M_B^{\text{کل}} = 0 \rightarrow -A_y(10) + (20\times16)(5) + \left(\tfrac{1}{2}\times20\times16\right)\left(\tfrac{16}{3}-3\right) = 0$$

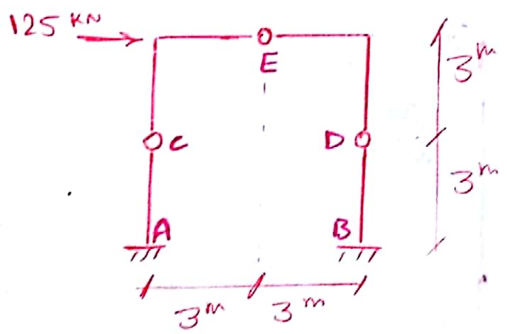
$$\rightarrow A_y = 197.33 \text{ kN} \uparrow$$

$$\oplus\circlearrowleft \Sigma M_C^{AC} = 0 \rightarrow A_x(12) - 197.33(5) + (20\times8)(4) + \left(\tfrac{1}{2}\times10\times8\right)\left(\tfrac{8}{3}\right) = 0$$

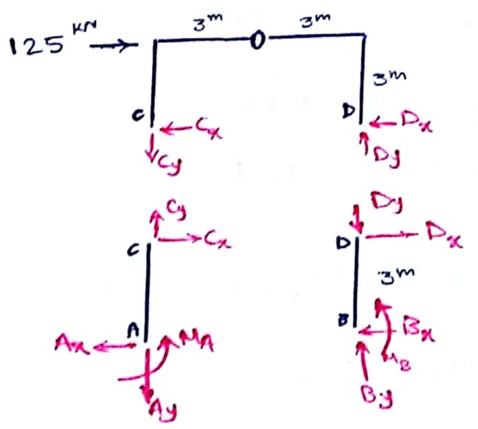
$$\rightarrow A_x = 20 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\overset{\oplus}{\rightarrow} \Sigma F_x^{\text{کل}} = 0 \rightarrow B_x = 20 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\oplus\uparrow \Sigma F_y^{\text{کل}} = 0 \rightarrow 197.33 - \left(\frac{20+40}{2}\right)(16) + B_y = 0 \rightarrow B_y = 282.67 \text{ kN}\uparrow$$



قاب فوق را به دو قسمت تحتانی و فوقانی تقسیم می‌کنیم و نیروهای داخلی در محل مفصل‌های C و D را می‌یابیم



$$\oplus\circlearrowleft \Sigma M_D^{CED} = 0 \rightarrow C_y(6) - 125(3) = 0 \Rightarrow C_y = 62.5 \text{ kN}$$

$$\oplus\circlearrowleft \Sigma M_E^{CE} = 0 \rightarrow 62.5(3) - C_x(3) = 0 \Rightarrow C_x = 62.5 \text{ kN}$$

$$\overset{\oplus}{\rightarrow} \Sigma F_x^{CED} = 0 \rightarrow -62.5 + 125 - D_x = 0 \Rightarrow D_x = 62.5 \text{ kN}$$

$$\oplus\uparrow \Sigma F_y^{CED} = 0 \rightarrow -62.5 + D_y = 0 \Rightarrow D_y = 62.5 \text{ kN}$$

ارضاء روابط تعادل برای قسمت AC :

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{AC}=0 \rightarrow -A_x+62.5=0 \Rightarrow A_x=62.5\ kN$$

$$+\uparrow\sum F_y^{AC}=0 \rightarrow A_y=62.5\ kN$$

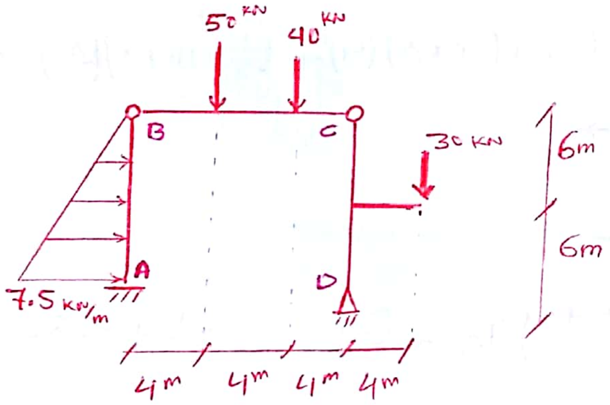
$$+\circlearrowleft\sum M_A^{AC}=0 \rightarrow M_A-62.5(3)=0 \Rightarrow M_A=187.5\ kN.m$$

ارضاء روابط تعادل برای قسمت BD :

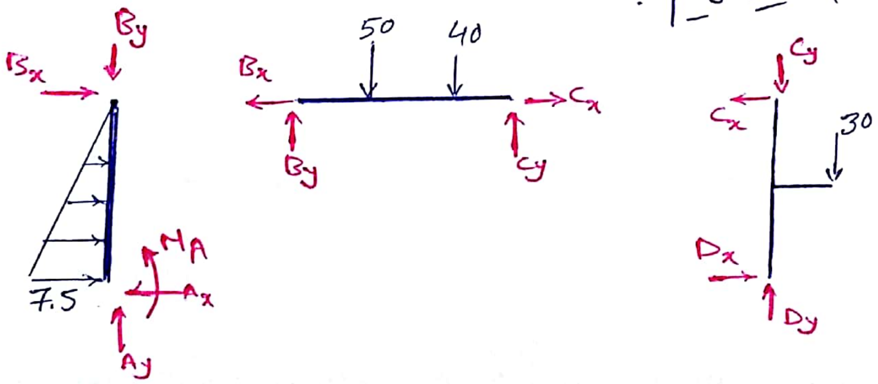
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{BD}=0 \rightarrow B_x=62.5\ kN$$

$$+\uparrow\sum F_y^{BD}=0 \rightarrow B_y=62.5\ kN$$

$$+\circlearrowleft\sum M_B^{BD}=0 \rightarrow M_B-62.5(3)=0 \Rightarrow M_B=187.5\ kN.m$$



قاب را از کل مفاصل (اتصالات) تفکیک می‌کنیم :



$$+\circlearrowleft\sum M_D^{CD}=0 \rightarrow C_x(12)-30(4)=0 \Rightarrow C_x=10\ kN$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{CD}=0 \rightarrow D_x-10=0 \Rightarrow D_x=10\ kN$$

$$+\circlearrowleft\sum M_B^{BC}=0 \rightarrow C_y(12)-40(8)-50(4)=0 \Rightarrow C_y=43.33\ kN$$

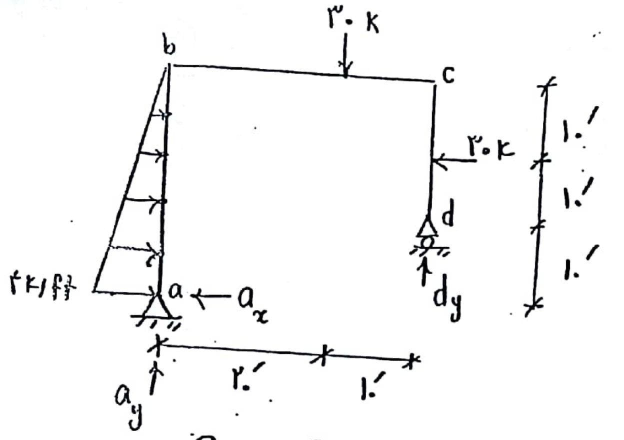
$$+\uparrow\sum F_y^{CD}=0 \rightarrow D_y-43.33-30=0 \Rightarrow D_y=73.33\ kN$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{BC}=0 \rightarrow B_x=10\ kN$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A^{AB}=0 \rightarrow M_A-\left[\tfrac{1}{2}(7.5)(12)\right](4)-10(12)=0 \Rightarrow M_A=300\ kN.m$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{AB}=0 \rightarrow \left[\tfrac{1}{2}(7.5)(12)\right]-A_x+10=0 \Rightarrow A_x=55\ kN$$

$$+\uparrow\sum F_y^{کل}=0 \rightarrow A_y-50-40-30-73.33=0 \Rightarrow A_y=46.67\ kN$$



دیاگرام برش، ممان و نیروی محوری قاب روبرو را رسم کنید.

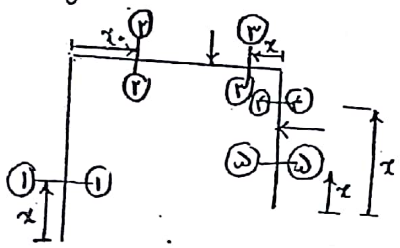
همواره ابتدا واکنش های تکیه گاهی را بدست می آوریم.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -a_x - 30 + \frac{4 \times 30}{2} = 0 \Rightarrow a_x = 30$$

$$\Sigma M_a = 0 \Rightarrow \frac{4 \times 30}{2} \times 10 + 30 \times 20 - 30 \times 20 - 30 d_y = 0$$

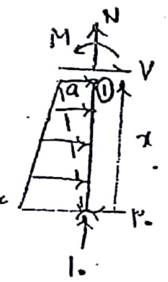
$$\Rightarrow d_y = 20$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow a_y + d_y = 30 \Rightarrow a_y = 10$$



با توجه به شکل قاب ۵ مقطع را انتخاب کرده و در هر مقطع M و V و N را بدست می آوریم.

①-①



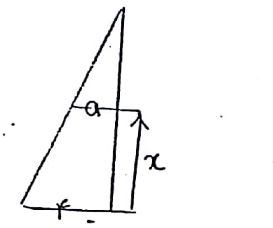
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + 10 = 0 \Rightarrow N = -10$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \frac{4x}{2} + \frac{4(1-\frac{x}{30})x}{2} + V - 30 = 0$$

$$V = \frac{1}{15}x^2 - 4x + 30 \qquad 0 \leq x \leq 30$$

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow -M + 30x - \frac{4x}{2}\frac{2x}{3} - \frac{4(1-\frac{x}{30})x}{2}\frac{x}{3} = 0$$

$$M = \frac{1}{45}x^3 - 2x^2 + 30x \qquad 0 \leq x \leq 30$$

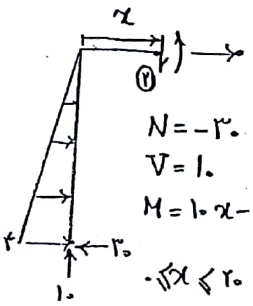


$$\frac{a}{4} = \frac{30 - x}{30} \Rightarrow a = 4\left(1 - \frac{x}{30}\right)$$

کنترل: $dM/dx = V$ ok

$M_{max} = ?$ $\quad V = 0 \Rightarrow \frac{1}{15}x^2 - 4x + 30 = 0 \Rightarrow x_{max} = 8.76 \Rightarrow M_{max} = 124.3$ k-ft

به همین ترتیب:

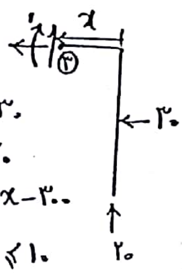


$N = -30$

$V = 10$

$M = 10x - 300$

$0 \leq x \leq 20$

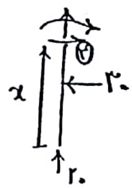


$N = -30$

$V = -20$

$M = 20x - 200$

$0 \leq x \leq 10$



$N = -20$

$V = 30$

$M = -30(x - 10)$

$10 \leq x \leq 20$

$N = -20$

$V = 0$

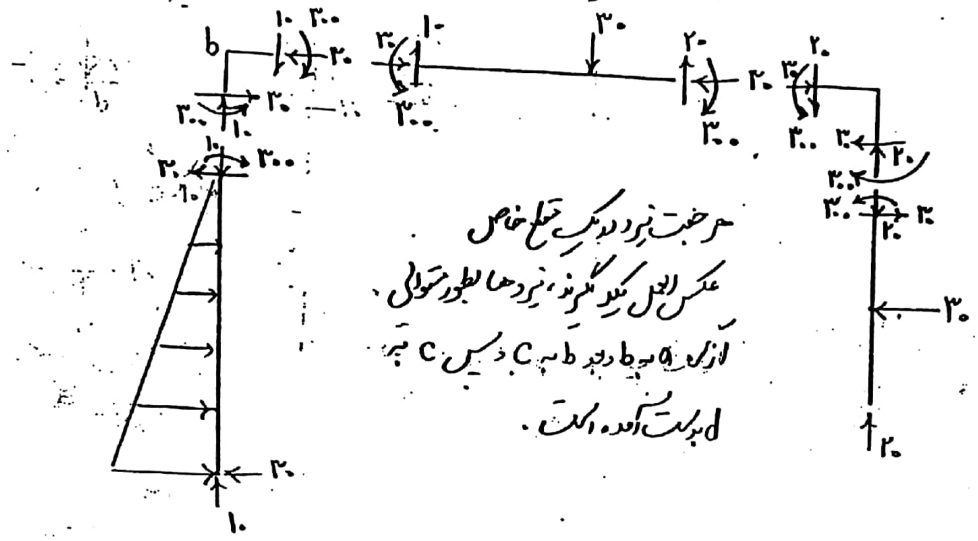
$M = 0$

$0 \leq x \leq 10$

دقت شود در مقطع ② نیز $\frac{dM}{dx} = V$ اما در مقاطع ③ و ④ و ⑤ داریم $\frac{dM}{dx} = -V$ چرا که x از سمت راست به چپ انتخاب شده است.

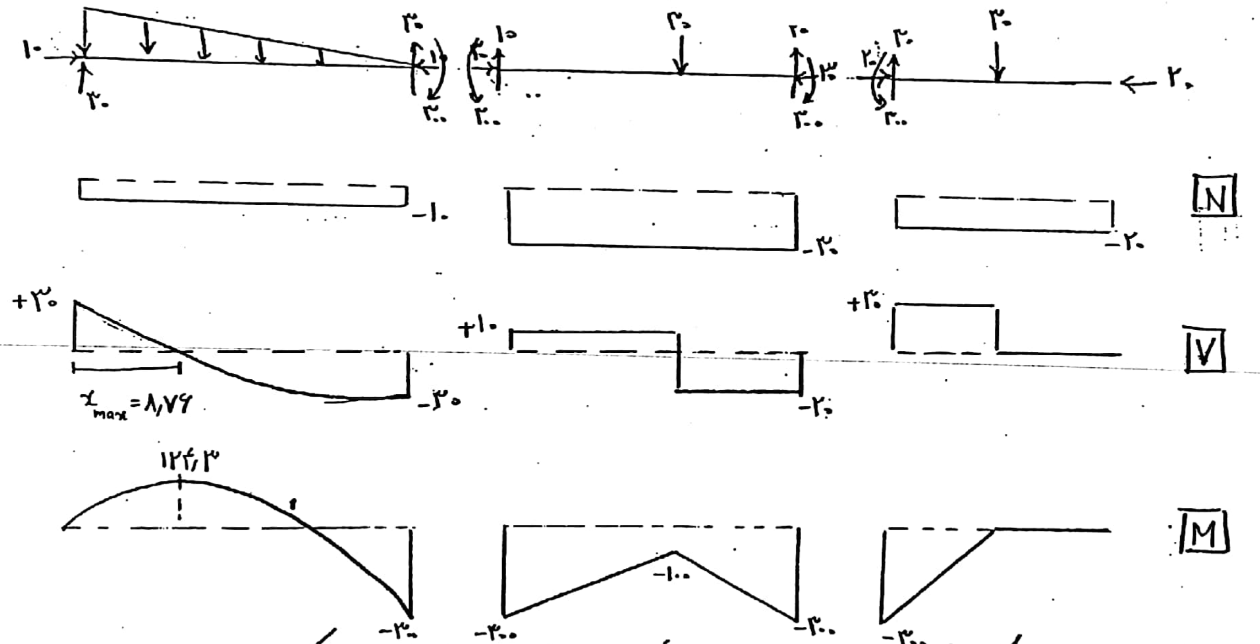
به راحتی برای هر قسمت معادلات بدست آمده قابل ترسیم می باشد.

راه حل دوم آن است که قاب را از یک ۴ تکه مجزا جدا کرده، نیروها را بیابیم. پس هر قسمت قاب را مثل یک تیر در نظر گرفته و نمودارها را ترسیم کنیم. در این حالت می توان از قوانین جمع مساحتهای زیر نمودارها استفاده کنیم.

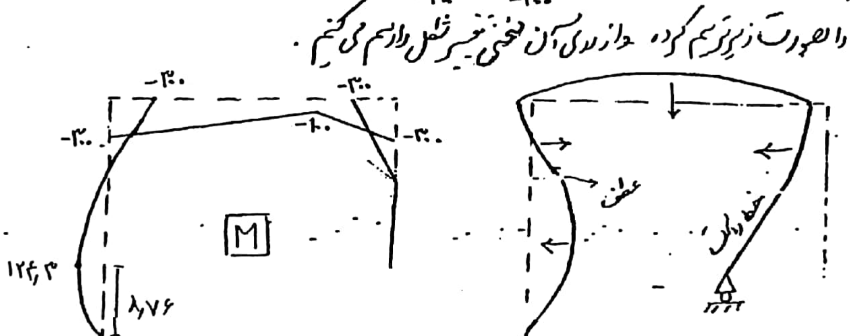


هر جهت نیرو در یک جسم خاص عکس العمل یکدیگر نیروها بطور متوالی از نقطه a به b و b به c و پس c به d بدست آمده است.

در نهایت :



و می توان این نمودارها را روی خود شکل گسترش داد. مثلاً نمودار خمش را بصورت زیر ترسیم کرده و از روی آن منحنی تغییر شکل را رسم می کنیم.



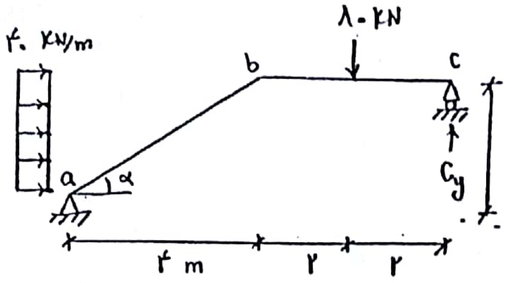
جاهایی که نمودار ممان صفر است یا تغییر علامت می‌دهد نقطه عطف یا خط راست است.

$M>0 \Rightarrow y''=\frac{M}{EI}>0 \Rightarrow$

$M<0 \Rightarrow y''<0 \Rightarrow$

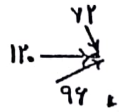
$M=0 \Rightarrow y''=0 \Rightarrow$ عطف یا خط راست

دیاگرام برش، ممان و نیروی محوری را برای قاب روبرو ترسیم کنید.



$\Sigma M_a = 0 \Rightarrow 80\times 6 + 40\times 3\times 1.5 - C_y \times 8 = 0 \Rightarrow C_y = 82.5$

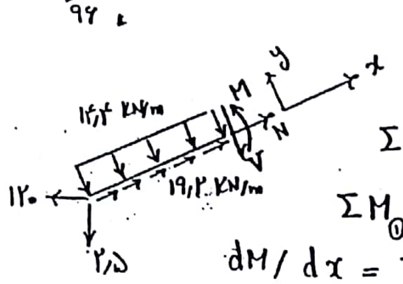
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow a_y = 2.5 \downarrow \; ; \; \Sigma F_x = 0 \Rightarrow a_x = 120 \leftarrow$



$\frac{72}{5} = 14.4 \; ; \; \frac{96}{5} = 19.2$

برای قسمت مورب ab می‌توان به دو روش محاسبات را انجام داد.

1)



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N - 120 \underbrace{\cos\alpha}_{0.8} - 2.5 \underbrace{\sin\alpha}_{0.6} + 19.2x = 0 \Rightarrow N = -19.2x + 97.5$

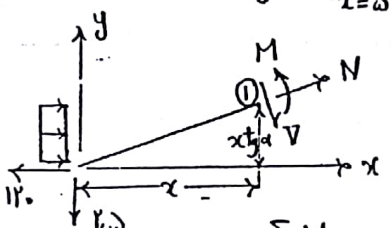
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V - 14.4x + 120 \sin\alpha - 2.5 \cos\alpha = 0 \Rightarrow V = -14.4x + 70$

$\Sigma M_{1} = 0 \Rightarrow M + 14.4x\frac{x}{2} + 2.5\times 0.8x - 120\times 0.6x = 0 \Rightarrow M = -7.2x^2 + 70x$

$dM/dx = V$ ok ; $M_{max} = ?$ $V = 0 \Rightarrow x_{max} = 4.86 \Rightarrow M_{max} = 170.14$

$M_b = M|_{x=5} = 170$

2) در این حالت نیازی به تجزیه بار نداریم. اما در این حالت به دو دستگاه محلی برای N, V خواهیم رسید.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N\cos\alpha + V\sin\alpha - 120 + 40x\underbrace{tg\alpha}_{0.75} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N\sin\alpha - V\cos\alpha - 2.5 = 0$

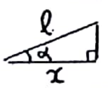
$\xrightarrow{\text{دو معادله دو مجهول}} \begin{cases} N = 97.5 - 24x \\ V = 70 - 18x \end{cases}$

$\Sigma M_{1} = 0 \Rightarrow M + 2.5x - 120x\, tg\alpha + 40\, x\, tg\alpha \frac{x\, tg\alpha}{2} = 0 \Rightarrow M = -11.25x^2 + 87.5x$

$M_b = M|_{x=4} = 170$

بعضی دقت در این حالت: $\frac{dM}{dx} \neq V$ چرا که x در راستای عضو نیست. بلکه $V = \frac{dM}{dl}$ خواهد بود.

$x = l\cos\alpha$

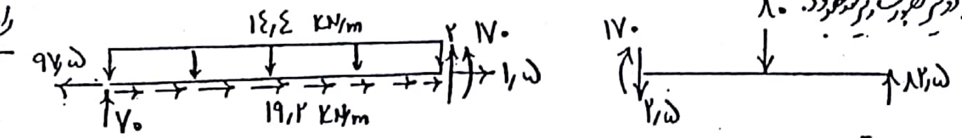


$\frac{dM}{dl} = V \Rightarrow \frac{dM}{dx}\frac{dx}{dl} = V \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V/\cos\alpha = 1.25V$

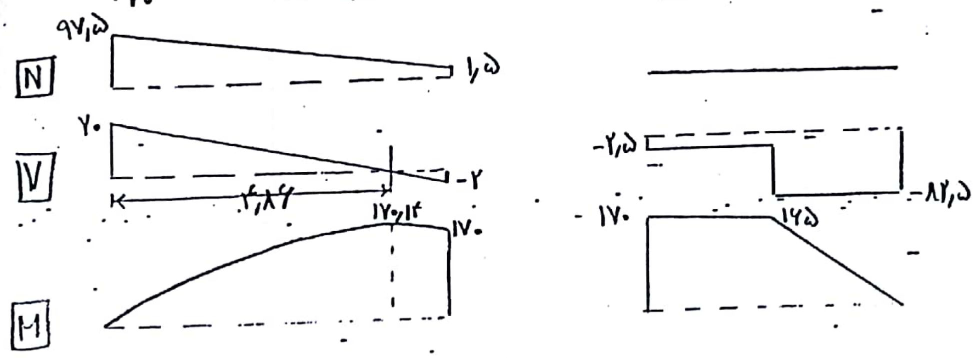
$dM/dx = -22.5x + 87.5 \quad ; \quad 1.25V = 87.5 - 22.5$ ok

می‌توان برای قسمت bc نیز دو حالت مجزا زده و برحسب x محاسبات را انجام داد. اما اگر گره c را به تیر دو سر ساده تبدیل کرد. چنانچه قسمت بر بحران قسمت قاب را از یک طرف قبل دو بعد گره b جدا کنیم، قسمت به دو تیر به صورت زیر خواهد بود.

راه دوم

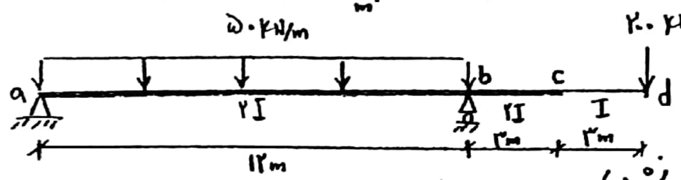


چون ab را شبیه تیر در نظر گرفته‌ایم از روابط حاصل از روش اول (تجزیه بار) می‌توان استفاده کرد و یا همان روش جمع سطوح شکل‌ها را ترسیم نمود.

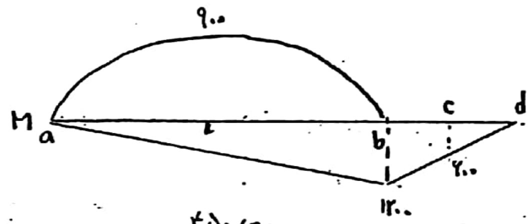


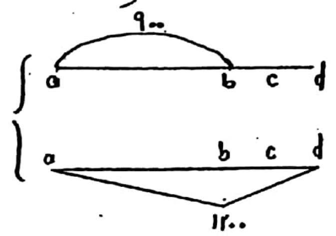
مطلوب است محاسبه خیز و شیب در نقطه d با روش تیر مزدوج

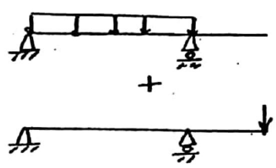
$E = 200\ GPa = 200\times10^{6}\ kN/m^2\ ;\ I = 3\times10^{-3}\ m^4$

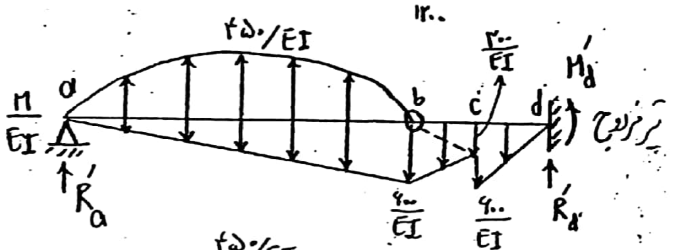


در حالتیکه دو بار گسترده و متمرکز همزمان بر سازه اثر می‌کند سازه آن است که دیاگرام ممان هر بار بطور مستقل رسم و نتایج را کنار هم قرار دهیم (با هم جمع نشود)



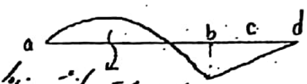




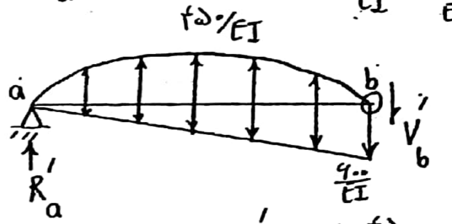


دقت کنید اگر دو دیاگرام را با هم جمع کنیم محاسبه مساحت و مرکز ثقل که در روش تیر مزدوج به آن نیاز خواهیم داشت، مشکل خواهد بود.

جمع جبری دو دیاگرام



... محاسبه مساحت و مرکز ثقل این شکل کمی طولانی است



در تیر مزدوج رسم شده چون مفصل وجود دارد با بستی تیر از مفصل جدا شده و در کل مورد بررسی قرار گیرد.

$$\Sigma M_b = 0 \Rightarrow 12R'_a + \underbrace{\frac{2}{3}\frac{450}{EI}\times12}_{A}\times\underbrace{6}_{\bar{x}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{600}{EI}\times12}_{A}\times\underbrace{\frac{1}{3}\times12}_{\bar{x}} = 0 \Rightarrow R'_a = \frac{-600}{EI}$$

$$\theta_a = V'_a = R'_a = -\frac{600}{EI}$$ ساعتگرد

در کل سازه $$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \overset{-600/EI}{R'_a} + R'_d + \frac{2}{3}\frac{450}{EI}\times12 - \frac{1}{2}\frac{600}{EI}\times12 - \frac{1}{2}\left(\frac{600}{EI}+\frac{300}{EI}\right)\times3 - \frac{1}{2}\frac{600}{EI}\times3 = 0$$

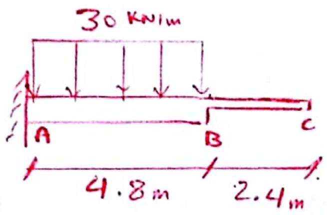
$$\Rightarrow R'_d = \frac{2850}{EI} = 0/0047\ rad \rightarrow \theta_d = V'_d = -R'_d = -0/0047\ rad$$ ساعتگرد

در کل سازه $$\Sigma M_d = 0 \Rightarrow 18R'_a + \underbrace{\frac{2}{3}\frac{450}{EI}\times12}_{A}\times\underbrace{(6+6)}_{\bar{x}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{600}{EI}\times12}_{A}\times\underbrace{(4+6)}_{\bar{x}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{600}{EI}\times3}_{A}\times\underbrace{(2+3)}_{\bar{x}}$$

$$-\underbrace{\frac{1}{2}\frac{300}{EI}\times3}_{A}\times\underbrace{(1+3)}_{\bar{x}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{600}{EI}\times3}_{A}\times\underbrace{2}_{\bar{x}} - M'_d = 0 \Rightarrow M'_d = \Delta_d = \frac{11700}{EI} = 0/0195\,m \simeq 2\,cm$$

فصل چهارم: محاسبه تغییر شکل خمشی سازه ها با استفاده از روشهای ترسیمی < سطح لنگر و تیر مزدوج

۱- مطلوب است محاسبه تغییرشکان و شیب نقاط C, B :

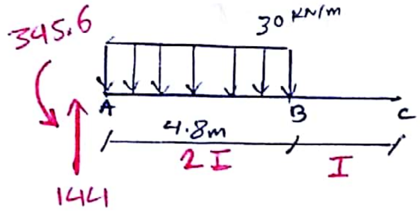


$I_{AB} = 7.82 \times 10^8 \ mm^4$

$I_{BC} = 3.91 \times 10^8 \ mm^4$

$E = 70 \ Gpa$

در ادامه جسم آزاد و نمودار بار الاستیک $\left[\frac{M}{EI}\right]$ را رسم می کنیم

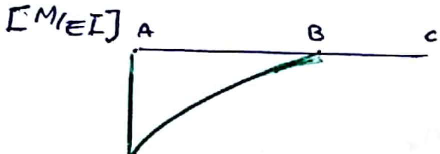


$I = 3.91 \times 10^8 \ mm^4$

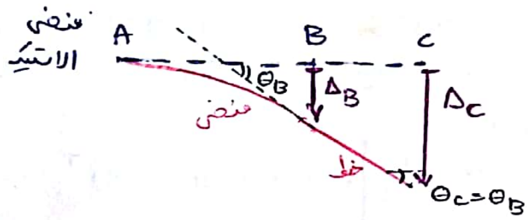
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\oplus \uparrow \Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y - 30(4.8) = 0 \Longrightarrow A_y = 144 \ KN \uparrow$

$\oplus \circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \rightarrow M_A - 30(4.8)(2.4) = 0 \Rightarrow M_A = 345.6 \ KN.m$



$\frac{345}{E(2I)} = \frac{172.8}{EI}$



صفر (تکیه گاه گیردار)

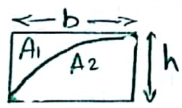
$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \theta_B$

به دلیل تغییرشکل خطی $\rightarrow \theta_C = \theta_B$

$\theta_B = \theta_{B/A} = \frac{A_M^{(AB)}}{EI} = \frac{1}{3}(4.8)\left(\frac{172.8}{EI}\right) = \frac{276.48}{EI} \ KN.m^2$

طبق یادآوری

یادآوری :



$A_1 = \frac{1}{3} bh$

$A_2 = \frac{2}{3} bh$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } I, E} \theta_B = \frac{276.48 \times 10^3 \times (10^3)^2 \ N.mm^2}{(70 \times 10^3)(3.91 \times 10^8)} = 0.0101 \ rad$

یادآوری

صفر (تکیه گاه گیردار)

$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \delta_B = \frac{A_M^{(AB)}}{EI} \cdot \bar{x}$

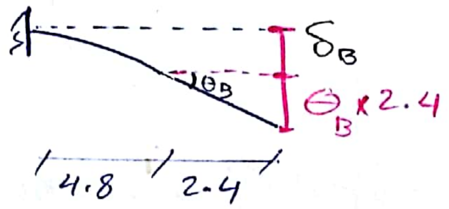
$= \underbrace{\left[\frac{1}{3}(4.8)\left(\frac{172.8}{EI}\right)\right]}_{A_M^{(AB)}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)(4.8)}_{\bar{x}} = \frac{995.33}{EI} \ KN.m^3$

$= \frac{995.33 \times 10^3 \times (10^3)^3 \ N.mm^3}{(70 \times 10^3)(3.91 \times 10^8)} = 36.36 \ mm$

$$\delta_{C/A} = \delta_C - \underset{\text{صفر}}{\delta_A} = \delta_C = \frac{A_M^{(AC)}}{EI}\cdot\bar{x} = \underbrace{\left[\frac{1}{3}(4.8)\left(\frac{172.8}{EI}\right)\right]}_{A_M^{(AC)}}\underbrace{\left(\frac{3}{4}\times 4.8 + 2.4\right)}_{\bar{x}} = \frac{1658.88}{EI}\ \text{kN.m}^3$$

$$= \frac{1658.88\times(10^3)(10^3)^3}{(70\times 10^3)(3.91\times 10^8)} = 60.60\ \text{mm}$$

روش دوم محاسبه δ_C :

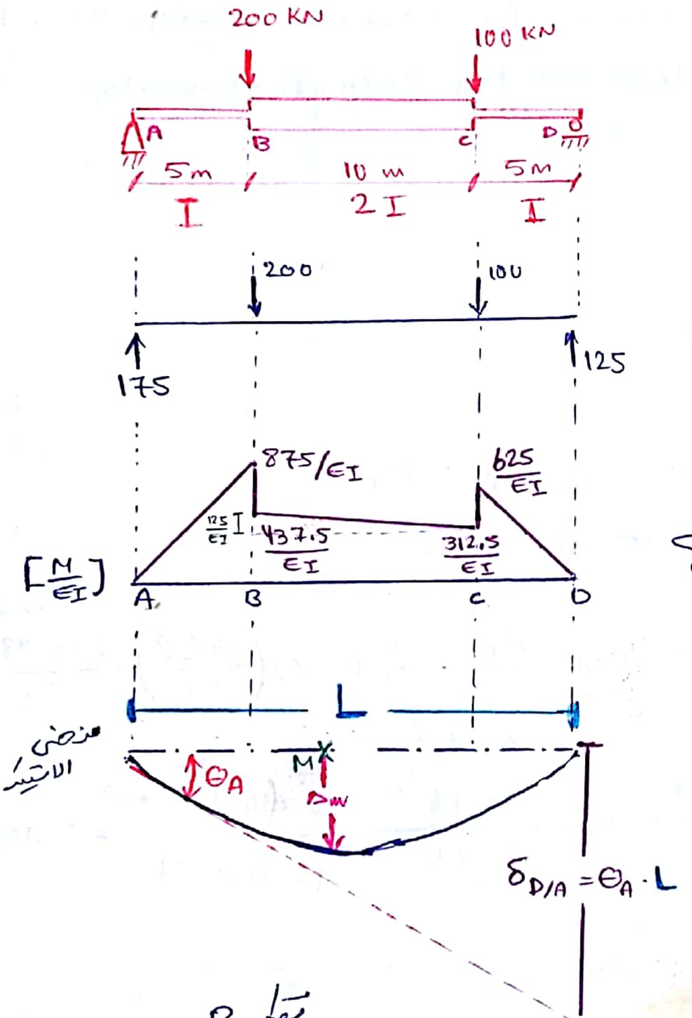


$$\delta_C = \delta_B + \theta_B \times 2.4$$
$$= 36.36 + (0.0101\times 2.4\times 10^3)$$
$$= 36.36 + 24.24$$
$$= 60.60\ \text{mm}$$

۲- مطلوب است محاسبه حداکثر خیز تیر زیر

$I = 600\times 10^6\ \text{mm}^4$

$E = 250\ \text{Gpa}$



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\oplus\circlearrowright\sum M_A = 0 \rightarrow D_y(20) - 100(15) - 200(5) = 0$$
$$D_y = 125\ \text{KN}\uparrow$$

$$\oplus\uparrow\sum F_y = 0 \rightarrow 125 - 200 - 100 + A_y = 0$$
$$\rightarrow A_y = 175\ \text{KN}\uparrow$$

$$\delta_{D/A} = \frac{A_M^{(AD)}}{EI}\,\bar{x} = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{1}{2}\times 875\times 5\right)\left(\frac{5}{3}+15\right)$$
$$+ (312.5)(10)(10) + \frac{1}{2}(125)(10)\left(\frac{20}{3}+5\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(625)(5)\left(\frac{10}{3}\right)\Big] = \frac{80208.33}{EI}\ \text{kN.m}^3$$

طبق شکل: $\delta_{D/A} = \theta_A \cdot L$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{\delta_{D/A}}{L} = \frac{\frac{80208.33}{EI}}{20} = \frac{4010.42}{EI}\ \text{kN}$$

فرض کنید حداکثر تغییر مکان در نقطه‌ای مثل M رخ دهد و فاصله این نقطه تا نقطه B برابر x_M باشد

$$\left.\begin{aligned}\theta_{M/A} &= \frac{A_M^{(AM)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(875)(5) + \frac{1}{2}(875 - 12.5x_M)x_M\right]\\ \theta_{M/A} &= \cancel{\theta_M} - \theta_A = \theta_A = \frac{401042}{EI}\end{aligned}\right\}$$

صفر (در نقطه ماکزیمم شیب صفر است)

Scanned by CamScanner

10

$$\rightarrow 6.25x_M^2 - 437.5x_M + 1822.92 = 0 \Rightarrow x_M = 4.45\,m$$

$$\delta_{max} = \delta_{M/A} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(875)(5)\left(\frac{10}{3}\right) + (381.875)(4.45)\left(\frac{4.45}{2}+5\right)\right.$$

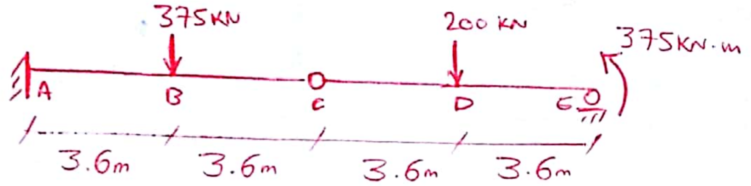
$$\left. + \frac{1}{2}(55.625)(4.45)\left(\frac{4.45}{3}+5\right)\right] = \frac{20371.84}{EI}\ kN.m^3$$

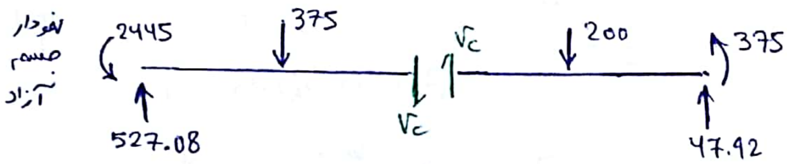
$$= \frac{20371.84 \times 10^3 \times (10^3)^3}{(250\times10^3)(600\times10^6)} = 135.8\ mm$$

۳ - مقادیر شیب و تغییرمکان نقاط B، D را محاسبه نمایید

$E = 200\ Gpa$

$I = 2.34\times10^9\ mm^4$





$$\circlearrowright^{+} \sum M_C^{CE} = 0 \rightarrow 375 + E_y(7.2) - 200(3.6) = 0$$

$$\Rightarrow E_y = 47.92\ kN \uparrow$$

$$\circlearrowright^{+} \sum M_A^{کل} = 0 \rightarrow 47.92(14.4) - 200(10.8)$$

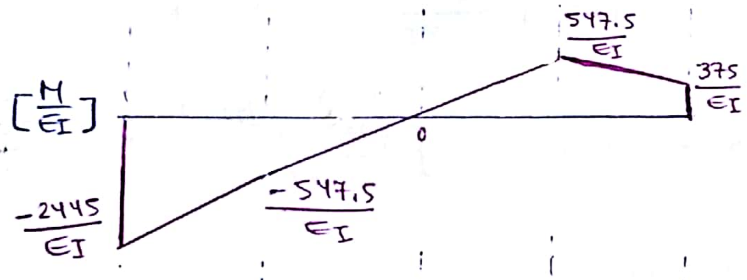
$$-375(3.6) + 375 + M_A = 0$$

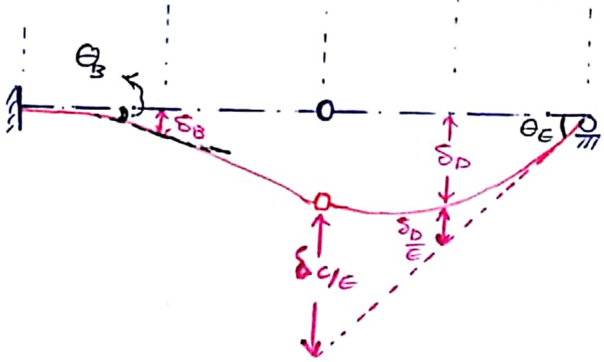
$$\Rightarrow M_A = 2445\ kN.m$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y^{کل} = 0 \rightarrow A_y + 47.92 - 200 - 375 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 527.08\ kN \uparrow$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x^{کل} = 0 \rightarrow A_x = 0$$





$$\theta_B = \theta_{B/A} = \frac{A_M^{(AB)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{2445+547.5}{2}\right)(3.6)\right] = \frac{538.5}{EI}\ kN.m^2 = \frac{538.5\times(10^3)(10^3)^2}{(200\times10^3)(2.34\times10^9)} = 0.0115\ rad$$

$$\delta_B = \delta_{B/A} = \frac{A_M^{(AB)}}{EI}\cdot\bar{x} = \frac{1}{EI}\left[(547.5)(3.6)(1.8) + \frac{1}{2}(1897.5)(3.6)(2.4)\right] = \frac{11745}{EI}\ kN.m^3$$

$$= \frac{11475\times(10^3)\times(10^3)^3}{(200\times10^3)(2.34\times10^9)} = 25.1\ mm$$

$$\delta_c = \delta_{C/A} = \frac{A_M^{(AC)}}{EI}\cdot\bar{x} = \frac{1}{EI}\left[547.5(3.6)(5.4) + \frac{1}{2}(1897.5)(3.6)(6) + \frac{1}{2}(547.5)(3.6)(2.4)\right]$$

$$= \frac{33501.6}{EI}\ \text{kN.m}^3$$

$$\delta_{C/E} = \frac{A_M^{(EC)}}{EI}\cdot\bar{x} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(547.5)(3.6)(2.4) + (375)(3.6)(5.4) + \frac{1}{2}(172.5)(3.6)(4.8)\right]$$

$$= \frac{11145.6}{EI}\ \text{kN.m}^3$$

$$\theta_E = \frac{\delta_c + \delta_{C/E}}{7.2} = \frac{33501.6 + 11145.6}{7.2(EI)} = \frac{6201}{EI}\ \text{kN.m}^2$$

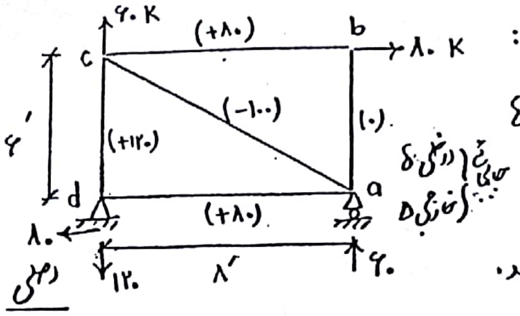
$$\theta_{D/E} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{547.5+375}{2}\right)(3.6)\right] = \frac{1660.5}{EI}\ \text{kN.m}^2$$

$$\theta_D = \theta_E - \theta_{D/E} = \frac{6201-1660.5}{EI} = \frac{4540.5}{EI}\ \text{kN.m}^2 = \frac{4540.5\times(10^3)\times(10^3)^2}{(200\times10^3)(2.34\times10^9)} = 0.0097\ \text{rad}$$

$$\delta_{D/E} = \frac{1}{EI}\left[(375)(3.6)(1.8) + \frac{1}{2}(172.5)(3.6)(1.2)\right] = \frac{2802.6}{EI}\ \text{kN.m}^2$$

$$\delta_D = 3.6\,\theta_E - \delta_{DE} = \frac{1}{EI}\left[(3.6)(6201) - 2802.6\right] = \frac{19521}{EI}\ \text{kN.m}^3$$

$$\Rightarrow \delta_D = \frac{19521\times(10^3)\times(10^3)^3}{(200\times10^3)(2.34\times10^9)} = 41.71\ \text{mm}$$

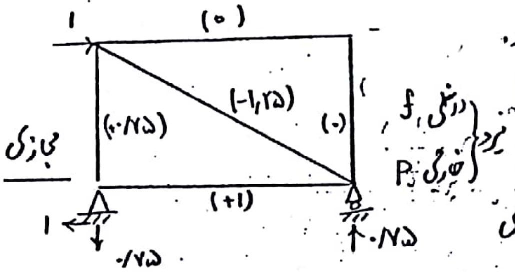


در شکل مقابل فرض کنید علاوه بر بارگذاری وارده بر سازه اثرات زیر نیز بر آن اعمال شود:

الف: درجه حرارت عضو ad به میزان ۴۰°F اضافه و عضو ac به میزان ۴۰°F کاهش یابد. $\alpha_T = 0/6\times10^{-5}\ /°F$

ب: عضو ab در ابتدا ۰/۵" بلندتر و عضو ac، ۰/۷" کوتاهتر به کار گرفته شده باشد.

ج: تکیه‌گاه d به میزان ۱" به پایین و ۰/۴" به سمت راست نشست داشته باشد.



مطلوب است: جابجایی افقی گره c. سطح مقطع هر عضو ۲ اینچ مربع می‌باشد.

ابتدا سازه مجازی را در زیر آن ترسیم می‌کنیم. در این صورت بایستی در سازه اصلی جابجایی‌های داخلی و خارجی و در سازه مجازی نیروهای داخلی و خارجی را محاسبه نماییم. نیروی اعضا در سازه‌ها در شکل در زیر آنها آمده است.

(در اینجا در ابتدا برای بیان مفهوم کار مجازی از جدول استفاده نکرده‌ایم). دقت شود در سازه اصلی باید جابجایی محاسبه شود یعنی باید $\delta = \frac{Fl}{EA}$ را به کار برد.

کار مجازی نیروهای خارجی ($\Sigma P\Delta$) :

$$\underbrace{0/75\times\frac{1}{12} - 1\times\frac{0/4}{12} + 0/75\times 0}_{W_R\ \text{(کار مجازی در گیرها)}} + 1\times\Delta_{cx}$$

تبدیل به فوت — جابجایی گره a

کار مجازی نیروهای داخلی ($\Sigma f\delta$) :

$$\underbrace{0\times\frac{80\times8}{EA}}_{cb} + \underbrace{(+0/75)\left(\frac{120\times6}{EA}\right)}_{cd} + \underbrace{(+1)\left(\frac{80\times8}{EA} + \overbrace{8\alpha_T(+40)}^{\Delta l^T = l\alpha_T\Delta T}\right)}_{ad}$$

$$+\underbrace{(0)\left(\frac{0\times6}{EA}+\frac{0/5}{12}\right)}_{ab} + \underbrace{(-1/25)\left(\frac{-100\times10}{EA} + 10\alpha_T(-40) + \left(-\frac{0/7}{12}\right)\right)}_{ac}$$

با ساده کردن و قرار دادن این دو رابطه، Δ_{cx} به دست می‌آید. لذا فرمول کلی به صورت زیر است:

$$\underbrace{W_R}_{\text{کار مجازی در گیرها}} + \overbrace{1}^{\text{نیروی واحد در سازه مجازی}}\times\underbrace{\Delta}_{\text{جابجایی سازه اصلی}} = \Sigma \underbrace{f}_{\text{نیروهای داخلی سازه مجازی}}(\delta l^F + \delta l^T + \delta l^C)$$

δl^F: جابجایی ناشی از نیروهای داخلی سازه اصلی — δl^T: جابجایی ناشی از حرارت — δl^C: جابجایی ناشی از نقص عضو

و یا در فرم خلاصه‌تر می‌توان نوشت:

$$\Sigma\, P\,\Delta = \Sigma\, f\,\delta$$

(P و f: از سازه مجازی — Δ و δ: از سازه اصلی)

(منظور از نیروهای خارجی بارهای وارده و واکنش‌ها می‌باشد)

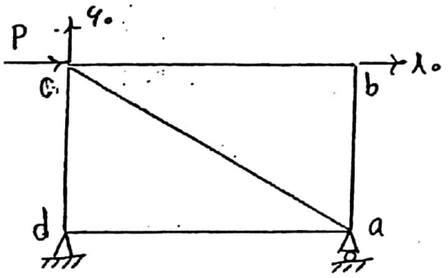
برای حل این مسئله می‌توان کلیه محاسبات را در یک جدول به صورت زیر خلاصه کرد :

عضو	l	F	f	$\delta l^F = \frac{Fl}{EA}$	$\delta l^T = l\alpha_T \Delta T$	δl^C	$\delta = \delta l^F + \delta l^T + \delta l^C$	$f\delta$
bc	۸	۸۰	۰	۶۴۰/EA	۰	۰	۶۴۰/EA	۰
cd	۶	۱۲۰	۰/۷۵	۷۲۰/EA	۰	۰	۷۲۰/EA	۵۴۰/EA
ad	۸	۸۰	۱	۶۴۰/EA	$۴۸۰\alpha_T$	۰	$۶۴۰/EA + ۴۸۰\alpha_T$	$\frac{۶۴۰}{EA} + ۴۸۰\alpha_T$
ab	۶	۰	۰	۰	۰	$\frac{۰/۵}{۱۲}$	$\frac{۰/۵}{۱۲}$	۰
ac	۱۰	−۱۰۰	−۱/۲۵	−۱۰۰۰/EA	$-۴۰۰\alpha_T$	$-\frac{۰/۲}{۱۲}$	$-۱۰۰۰/EA - ۴۰۰\alpha_T - \frac{۰/۲}{۱۲}$	$-۱/۲۵(-۱۰۰۰/EA - ۴۰۰\alpha_T - \frac{۰/۲}{۱۲})$

$$W_R + 1\times\Delta_{cx} = \sum f\delta \rightarrow ۰/۷۵\frac{۱}{۱۲} - ۱\times\frac{۰/۴}{۱۲} \cancel{+۰/۷۵\times۰} + ۱\times\Delta_{cx} = \frac{۲۴۳۰}{EA} + ۹۸۰\alpha_T + \frac{۰/۸۷۵}{۱۲} \rightarrow \Delta_{cx}$$

چنانچه سازه فاقد اثرات خودکرنشی (نشست تکیه‌گاهی، درجه حرارت و نقص عضو) باشد، در جدول بالا δl^T و δl^C حذف و در رابطه کار مجازی نیز W_R را حذف می‌کنیم به این ترتیب :

$$1\times\Delta_{cx} = \sum f\delta^F = \sum \frac{Ffl}{EA} = \frac{۲۴۳۰}{EA}$$



همانطور که می‌دانیم اگر سازه فاقد اثرات خودکرنشی باشد، می‌توان به کمک کاستیگلیانو نیز آن را حل نمود. برای مقایسه بیشتر دو روش همین مسئله را بدون اثرات خودکرنشی با این روش نیز حل می‌کنیم.

عضو	l	F	$\partial F/\partial P$	$F(\partial F/\partial P)l$ (P=0)
bc	۸	۸۰	۰	۰
cd	۶	۱۲۰+۰/۷۵P	۰/۷۵	۵۴۰
ad	۸	۸۰+P	۱	۶۴۰
ab	۶	۰	۰	۰
ac	۱۰	−۱۰۰−۱/۲۵P	−۱/۲۵	۱۲۵۰
			Σ	۲۴۳۰

$$\Delta_{cx} = \frac{1}{EA}\sum F\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)l = \frac{۲۴۳۰}{EA}$$

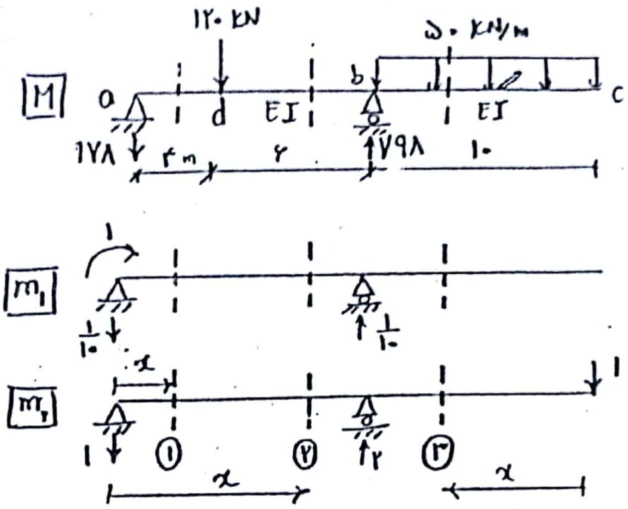
که همان نتیجه بالا می‌باشد.

دقت شود :

۱- اگر در مقادیر F روش کاستیگلیانو مقدار واحدی P قرار گیرد همان اعداد F روش کار مجازی است.

۲- مقادیر $\partial F/\partial P$ روش کاستیگلیانو دقیقاً همان f روش کار مجازی است. این نکته در سازه خمشی نیز برقرار است یعنی $\partial M/\partial P$ در کاستیگلیانو همان m کار مجازی است.

Scanned by CamScanner



مطلوب است محاسبه شیب a و خیز c در تیر رو برو.

چون در مورد خواسته شده است باید در سازه مجازی در نظر بگیریم.

دقت شود در سازه مجازی کلیه بارها حذف و صرفاً یک بار واحد قرار

می دهیم (برای شیب ممان واحد و برای خیز نیروی واحد)

با توجه به هر سه شکل دیده می شود باید ۳ قطع در نظر گرفته شود. دقت شود

برای هر ۳ شکل (اصلی و دو مجازی) قطع و جهت باید یکسان باشد، که در سازه مجازی ۲ نشان داده شده است. پس از محاسبه واکنش در هر

شکل M و m_1 و m_2 را برای هر ۳ قطع بیان شده بدست می آوریم. نتایج در جدول زیر دیده می شود.

قطع	مبدأ	حدود	EI	M	m_1	m_2	Mm_1	Mm_2
ad	a	۰-۴	EI	$-178x$	$1-0.1x$	$-x$	$-178x(1-0.1x)$	$-178x^2$
db	a	۴-۱۰	EI	$-298x+480$	$1-0.1x$	$-x$	$(-298x+480)(1-0.1x)$	$-x(-298x+480)$
bc	c	۰-۱۰	EI	$-25x^2$	۰	$-x$	۰	$25x^3$

$$1\times\theta_a=\int\frac{Mm_1}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left(\int_0^4 -178x(1-0.1x)\,dx+\int_4^{10}(-298x+480)(1-0.1x)\,dx+\int_0^{10}0\,dx\right)=\frac{-10196}{3EI}$$

$$1\times\Delta_{cy}=\int\frac{Mm_2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left(\int_0^4 -178x^2\,dx+\int_4^{10}-x(-298x+480)\,dx+\int_0^{10}25x^3\,dx\right)=\frac{417340}{3EI}$$

علامت منفی بیانگر این است که جهت دوران برخلاف ممان واحد اعمالی می باشد.

بعنوان یک نکته اضافی اگر فرض کنیم در صورت سوال تکیه a به میزان 1 cm به پائین و تکیه گاه b به میزان 0.5 cm به پائین نشست داشته باشد

فقط کافی است در سمت چپ و رابطه بالا W_R را نیز وارد کرده و سمت راست همان مقادیر قبل باقی می ماند. لذا:

واکنش a ، نشست a بر حسب متر

$$1\times\theta_a+\left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{10}\times\frac{0.5}{100}\right)=\frac{-10196}{3EI}\;,\quad 1\times\Delta_{cy}+\left(1\times\frac{1}{100}\right)-\left(2\times\frac{0.5}{100}\right)=\frac{417340}{3EI}$$

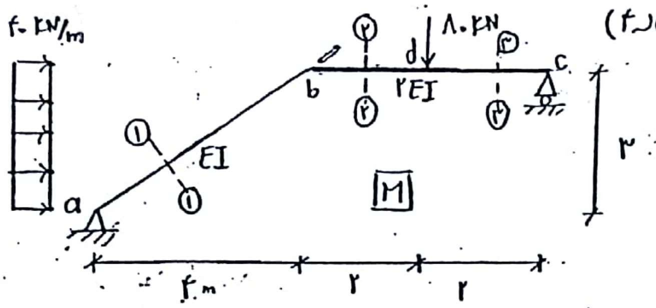
واکنش و نشست هم‌جهتند

با داشتن EI به راحتی θ_a و Δ_{cy} بدست می آیند.

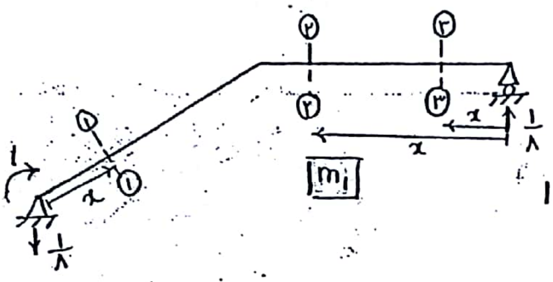
* دقت کنید اگر در صورت سوال جابجائی قائم وسط ab سوال شده باشد در یک سازه مجازی دیگر بار واحد را در وسط ab قرار می دهیم، برای

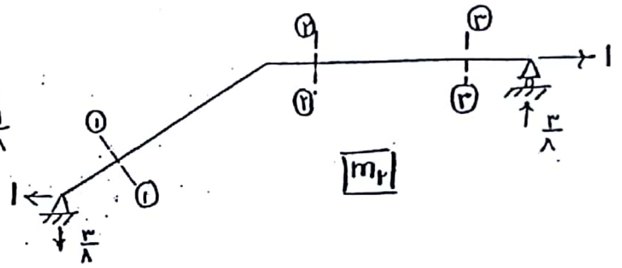
است در این حالت تعداد مقاطع با در نظر گرفتن خود سازه و مجازی آن مشخص می شود که در اینجا ۴ مقطع بایستی انتخاب شود.

در قاب روبرو شیب a و جابجایی افقی c را بیابید. (مسئله ۴)



در اینجا محاسبه هیچ تفاوتی با مسئله قبل نمی‌کند. باز هم دو سازه مجازی به صورت زیر تشکیل داده M، m_1 و m_2 را بدست می‌آوردیم. در مورد قسمت ab مثل مسئله ۴ یا ۹ می‌توانیم محور را افقی یا مورب بگیریم. در اینجا محورها را مورب منظور می‌کنیم.





قطعه	مبدأ	حدود	EI	M	m_1	m_2	Mm_1	Mm_2
ab	a	۰–۵	EI	$-7.2x^2+70x$	$1-0.1x$	$0.3x$	$(-7.2x^2+70x)(1-0.1x)$	$0.3x(-7.2x^2+70x)$
bd	c	۲–۴	۲EI	$2.5x+160$	$\frac{1}{8}x$	$\frac{3}{8}x$	$\frac{1}{8}x(2.5x+160)$	$\frac{3}{8}x(2.5x+160)$
dc	c	۰–۲	۲EI	$82.5x$	$\frac{1}{8}x$	$\frac{3}{8}x$	$\frac{1}{8}x(82.5x)$	$\frac{3}{8}x(82.5x)$

$$1\times\theta_a=\int\frac{Mm_1}{EI}dx=\frac{1}{EI}\Big(\int_0^5(-7.2x^2+70x)(1-0.1x)\,dx+\frac{1}{2}\int_2^4\frac{1}{8}x(2.5x+160)\,dx$$

زیرا ۲EI است

$$+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{8}x(82.5x)\,dx=\frac{472.5}{EI}$$

مشابه همین محاسبه برای ستون Mm_2 خواهیم داشت:

$$1\times\Delta_{cx}=\int\frac{Mm_2}{EI}dx=\frac{767.5}{EI}$$

دقت شود مقدار M در مسئله ۴ بدست آمده است و نتایج در این جدول به کار رفته شد. اگر بخواهیم می‌توانیم برای قسمت ab محورهای مختصات را افقی در نظر بگیریم، در اینصورت در دو سازه مجازی نیز باید همین محور بکار گرفته شود. برای این حالت M و m_1 و m_2 در قسمت ab معادلات متفاوتی داشته و حدود نیز ۰–۴ خواهد بود. همچنین چون دیفرانسیل انتگرال جزء طول سازه است، بنابراین

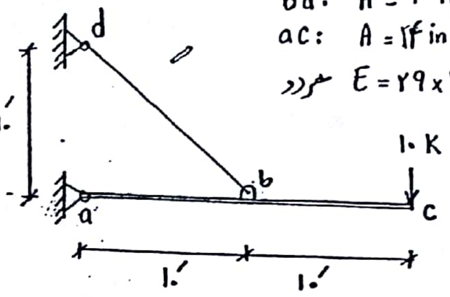
$$x=0.8l \qquad dl=\frac{dx}{0.8}$$

مثلاً $1\times\theta_a=\frac{1}{EI}\Big(\int_0^4(-11.25x^2+87.5x)(1-\frac{1}{8}x)\frac{dx}{0.8}+$ دو جمله بعدی تغییر نمی‌کند $\Big)=\frac{472.5}{EI}$

از مسئله ۴

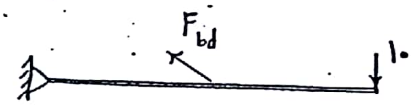
۱۴) در سازه روبرو جابجایی قائم گره C را بیابید. هم قسمت محوری و هم خمشی داریم لذا سازه مرکب است.

bd: $A = 2\ in^2$
ac: $A = 14\ in^2$, $I = 400\ in^4$
هر دو $E = 29\times10^3$ ksi



$$D = (3m + r) - (3j + c) = (3\times3 + 4) - (3\times4 + 1) = 0$$

یعنی سازه مرکب روبرو معین است. برای یافتن جابجایی لازم است نیروهای داخلی این سازه و سازه مجازی را بدست آوریم. سازه معین است اما نمی توان در ابتدا واکنشها را بدست آورد. عضو bd خرپایی است. سازه را از bd جدا میکنیم.



bd: $\Sigma M_a = 0 \Rightarrow 10\times20 = \frac{\sqrt2}{2} F_{bd}\times10 \Rightarrow F_{bd} = 20\sqrt2$, $M_{bd} = 0$ چون خرپایی است

bc: $\Rightarrow F_{bc} = 0$, $M_{bc} = -10x$

ab: $\Rightarrow F_{ab} = -20$, $M_{ab} = 10x - 2400$ (واحد طول in گرفته است)

از آنجا که هم نیروی محوری و هم خمشی وجود دارد بایستی در رابطه کار مجازی هم $\int$ و هم Σ را به کار برد. چون هدف محاسبه جابجایی قائم گره C است یک بار واحد در آنجا قرار داده و f و m را نیز بدست می آوریم (البته بدیهی است نتایج $\frac{1}{10}$ نتایج سازه اصلی می باشد)

$$1\times\Delta_{cy} = \int \frac{Mm}{EI}dx + \sum \frac{Ffl}{EA}$$

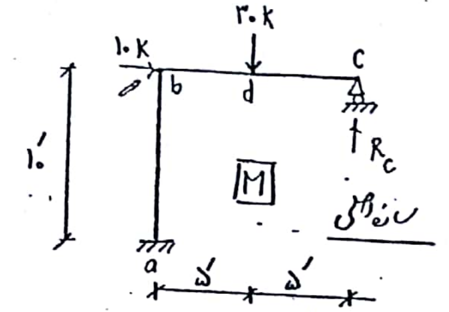
لذا در جدول M و m و F و f بایستی وارد شوند.

قطعه	l(in)	A(in²)	F	f	Ffl/A	مبدأ	حدود	I	M	m	Mm
bd	$120\sqrt2$	2	$20\sqrt2$	$2\sqrt2$	$4800\sqrt2$	—	—	—	—	—	—
bc	120	14	0	0	0	c	0-120	400	$-10x$	$-x$	$10x^2$
ab	120	14	-20	-2	342.86	c	120-240	400	$10x-2400$	$x-240$	$(10x-2400)(x-240)$

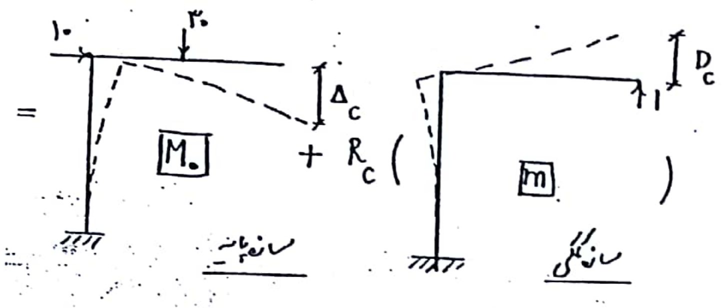
$$1\times\Delta_{cy} = \frac{1}{E}\Big(\underbrace{0 + \int_0^{120}\frac{10x^2}{400}dx + \int_{120}^{240}\frac{(10x-2400)(x-240)}{400}dx}_{\text{اثر لنگر خمشی}} + \underbrace{4800\sqrt2 + 0 + 342.86}_{\text{اثر نیروی محوری}}\Big) = 1.24\ in$$

می دانیم در سازه خمشی نیازی به منظور کردن نیروی محوری نمی باشد، اما در این مساله منظور شده است. اگر بخواهیم اثر نیروی محوری تیر را حذف کنیم باید در جدول در سطر bc و ab مقادیر F و f وارد نشود. اگر اینکار انجام شود عدد ۳۴۲٫۸۶ باید از معادله بالا حذف شود که در این صورت جواب ۱٫۲۳ خواهد بود که اختلاف ناچیز است. یعنی در سازه خمشی اگر اثر نیروی محوری وارد نشود خطای بسیار کمی خواهیم داشت.
خلاصه آنکه محوری فقط در bd و خمشی در ac منظور می شود.

دیاگرام ممان قاب رو به رو را رسم کنید. (EI=cte)



برای این قاب یک درجه نامعین است می‌توان M_a و یا R_c را به عنوان مجهول اضافه در نظر گرفت. در اینجا فرض می‌کنیم R_c مجهول اضافه باشد. لذا خواهیم داشت:



دقت شود که:

۱- سازه پایه باید معین و پایدار باشد و در این مثال کنسول معین انتخاب کردیم.

۲- شکل سازه کمکی و سازه پایه شبیه به یکدیگر است.

۳- کلیه بارهای سازه اصلی بر روی سازه پایه قرار گرفته و سازه کمکی فقط یک بار واحد خواهد داشت. (یا نیروی واحد یا لنگر واحد)

۴- اگر سازه پایه معین باشد (که بهتر است همواره گزینه باشد) در این صورت تعداد سازه‌های کمکی، تعداد روابط سازگاری و تعداد مجهولات اضافی برابر با تعداد درجات نامعینی استاتیکی است. مثلاً در این مثال یک سازه کمکی داریم. یک رابطه سازگاری می‌نویسیم و در اینجا یک معادله یک مجهول حل می‌کنیم.

رابطه سازگاری: $\Delta_c + R_c D_c = 0$; $1\times\Delta_c = \int \frac{M_0 m}{EI}dx$; $1\times D_c = \int \frac{m m}{EI}dx$

قطعه	مبدا	حدود	M_0	m	$M_0 m$	m^2	$M = M_0 + R_c m$
ab	a	0-10	$10x-250$	10	$10(10x-250)$	100	$10x-76.6$
bd	c	5-10	$-30(x-5)$	x	$-30x(x-5)$	x^2	$-12.66x+150$
dc	c	0-5	0	x	0	x^2	$17.34x$

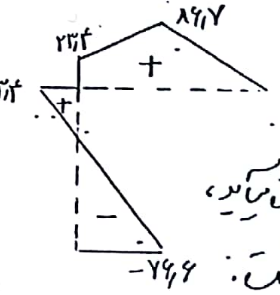
این ستون در انتها که حل مسئله تکمیل می‌شود

دیده می‌شود سازه‌های پایه و کمکی هر دو معین بوده لذا محاسبه Δ_c و D_c هر شکل به کمک کار مجازی یا سایر روش‌ها امکان‌پذیر است. جهت محاسبات داریم:

$$\Delta_c = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{10} 10(10x-250)\,dx + \int_5^{10} -30x(x-5)\,dx + \int_0^5 0\,dx\right) = \frac{-23125}{EI} \quad ; \quad D_c = \frac{1333.3}{EI}$$

$$\Delta_c + R_c D_c = 0 \Rightarrow R_c = -\frac{\Delta_c}{D_c} = 17.34k$$

(دیده می‌شود که هیچ نیازی به مقدار EI نمی‌باشد (چون نشست نداریم))



سمت خلاف جهت بار واحد است

و برای سهولت ستون آخر جدول کامل شده و دیاگرام رسم می‌شود.

* اگر در صورت سؤال تکیه‌گاه c به اندازه "0.15 به پایین نشست کند: $\Delta_c + R_c D_c = \frac{-0.15}{12}$

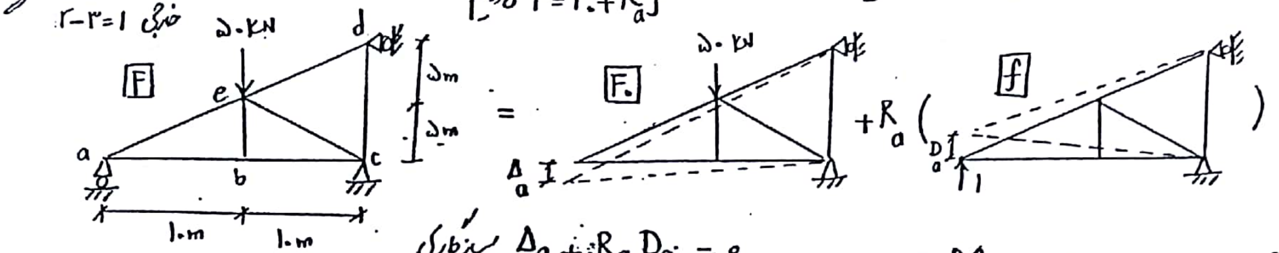
با جایگذاری Δ_c و D_c دیده می‌شود به مقدار EI نیاز داریم. اگر $EI = 5.0\times10^{6}\ k\text{-}in^2$ باشد مقدار $R_c = 6.49$ بدست می‌آید که بسیار کم شده است. لازم به ذکر است در سازه‌های معین نشست‌ها تأثیری در حل سازه ندارند اما در نامعین تأثیرگذار هستند.

نیرو در اعضای خرپای روبرو را بدست آورید. $EA = cte$

$D = m + r - 2j = 1$

خارجی ۱=۳-۲

$F = F_0 + R_a f$ می‌نویسیم



سازگاری $\Delta_a + R_a D_a = 0$

$1 \times \Delta_a = \sum \frac{F_0 f l}{EA} = \frac{1}{EA} \sum F_0 f l = \frac{-۱۶۵۲٫٤}{EA}$

$1 \times D_a = \sum \frac{f^2 l}{EA} = \frac{1}{EA} \sum f^2 l = \frac{۲۰۲٫٤}{EA}$

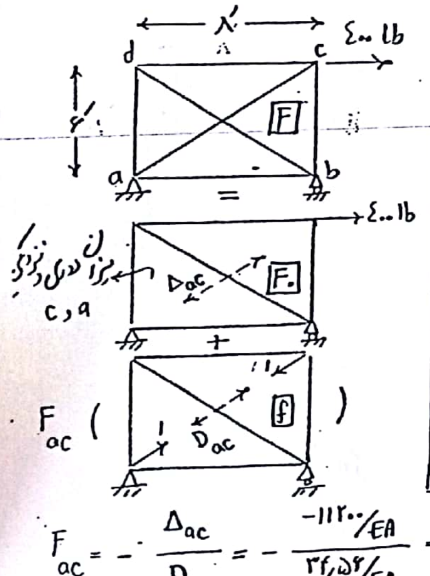
$\Delta_a + R_a D_a = 0 \Rightarrow R_a = -\frac{\Delta_a}{D_a} = ۸٫۱۶$

عضو	l	F_0	f	$F_0 f l$	$f^2 l$	$F = F_0 + R_a f$
ab	۱۰	۰	۲	۰	٤۰	۱۶٫۳۲
bc	۱۰	۰	۲	۰	٤۰	۱۶٫۳۲
ae	۱۱٫۲	۰	-۲٫۲٤	۰	۵۶٫۲	-۱۸٫۲۸
ed	۱۱٫۲	۵۵٫۹	-۲٫۲٤	-۱٤۰۲٫٤	۵۶٫۲	۳۷٫۶۲
eb	۵	۰	۰	۰	۰	۰
ec	۱۱٫۲	-۵۵٫۹	۰	۰	۰	-۵۵٫۹
cd	۱۰	-۲۵	۱	-۲۵۰	۱۰	-۱۶٫۸٤
$\sum$				-۱۶۵۲٫٤	۲۰۲٫٤	

سازه نامعین است اما چون نشست نداریم نیازی به دانستن EA نمی‌باشد.
اگر نشست در a وجود داشت باید EA را نیز می‌دانستیم زیرا از آنجا که
سازهٔ نامعین است نشست جواب را عوض می‌کند (بر خلاف معین‌ها)
برای محاسبه نیرو در بقیه اعضا می‌توانیم $R_a = ۸٫۱۶$ را روی
شکل اصلی قرار داده بقیه را با استاتیک بیابیم و یا ستون آخر جدول را پر کنیم. دقت شود چون سازه یک درجه نامعین است، یک نیرو را بیابیم بقیه از استاتیک محاسبه می‌شود.

۱۷- نیرو در اعضای خرپای روبرو را بیابید. $EA = cte$ ؛ $D = m + r - 2j = 1$ ؛ $۲-۲=۰$ ← درجه داخلی است

سازگاری $\Delta_{ac} + F_{ac} D_{ac} = 0$ → بیشترین کشش عضو ac در جدول بیاید



عضو	l	F_0	f	$F_0 f l$	$f^2 l$	$F = F_0 + F_{ac} f$
ad	۶	۳۰۰	-۰٫۶	-۱۰۸۰	۲٫۱۶	۱۰۵٫۵
dc	۸	٤۰۰	-۰٫۸	-۲۵۶۰	۵٫۱۲	۱٤۰٫۷
cb	۶	۰	-۰٫۶	۰	۲٫۱۶	-۱۹٤٫۵
ab	۸	٤۰۰	-۰٫۸	-۲۵۶۰	۵٫۱۲	۱٤۰٫۷
ac	۱۰	۰	۱	۰	۱۰	۳۲٤٫۱
bd	۱۰	-۵۰۰	۱	-۵۰۰۰	۱۰	-۱۷۵٫۹
$\sum$				-۱۱۲۰۰	۳٤٫۵۶	

$F_{ac} = -\frac{\Delta_{ac}}{D_{ac}} = -\frac{-۱۱۲۰۰/EA}{۳٤٫۵۶/EA} = ۳۲٤٫۱$

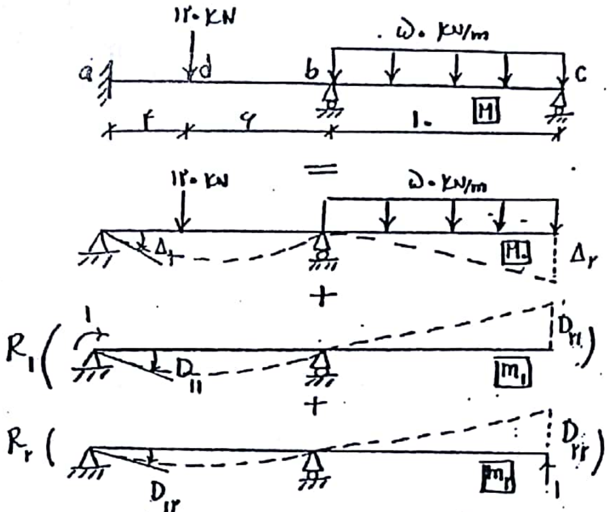
* اگر فرض کنیم عضو ac از ابتدا "۰/۵ کوتاهتر انتخاب شده است در این صورت برای حل باید E و A را بدانیم. اگر $A = ۰٫۲\,in^2$ و $E = ۲۹ \times ۱۰^6\ lb/in^2$ خواهیم داشت:

$\Delta_{ac} + F_{ac} D_{ac} = \frac{۰٫۵}{۱۲} \Rightarrow \frac{-۱۱۲۰۰}{EA} + F_{ac} \frac{۳٤٫۵۶}{EA} = \frac{۰٫۵}{۱۲} \Rightarrow F_{ac} = ۷۳۱۶٫۷$

مثبت است چون کوتاهشدگی، همچون بارواردهٔ اعمالی در سازه مجازی است

که از ۳۲٤٫۱ بسیار بیشتر است
بقیه نیروها نیز مثل قبل محاسبه می‌شود.

تیر روبرو را به روش سازگاری تغییر شکلها حل کنید. $EI = cte$



تیر دو درجه نامعین است. می‌توان مثلاً R_b و R_c را حذف نمود و یا M_a و R_b و یا M_a و R_c. مثلاً در اینجا M_a و R_c را مجهولات اضافه در نظر می‌گیریم. راستای دوران در a را راستای ۱ و راستای جابجایی در c را راستای ۲ می‌نامیم. ممانهای سازه اصلی را $\boxed{M}$، سازه ناقص $\boxed{M_0}$ و در سازه مجازی $\boxed{m_1}$ و $\boxed{m_2}$ می‌باشند. دو رابطه سازگاری بیانگر دوران a (زیرا M_a را حذف کرده‌ایم) و جابجایی قائم c (زیرا R_c را حذف کرده‌ایم) می‌توان نوشت.

$R_1 = M_a \; ; \; R_2 = R_c$

$$\begin{cases} \Delta_1 + R_1 D_{11} + R_2 D_{12} = 0 & \text{دوران a صفر است} \\ \Delta_2 + R_1 D_{21} + R_2 D_{22} = 0 & \text{جابجایی c صفر است} \end{cases}$$

$$1 \times \Delta_i = \int \frac{M_0 m_i}{EI} dx \; ; \; 1 \times D_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx$$

(استخراج Δ_1 و Δ_2)   (استخراج D_{11} و $D_{21} = D_{12}$ و D_{22})

در مساله ۱۲ مقادیر Δ_1 و Δ_2 به روش کار مجازی بدست آمده‌اند. لذا همان جدول را در اینجا تکرار کرده و سه ستون m_1^2 و $m_1 m_2$ و m_2^2 را برای محاسبه D_{ij} ها اضافه می‌نمائیم (فقط دقت شود علامت ممانهای سازه مجازی دوم در اینجا تغییر کرده است زیرا جهت بار واحد عوض شده است).

قطع	مبدا	حدود	M_0	m_1	m_2	$M_0 m_1$	$M_0 m_2$	m_1^2	$m_1 m_2$	m_2^2
ad	a	۰-۴	$-178x$	$1-0.1x$	x	$-178x(1-0.1x)$	$-178x^2$	$(1-0.1x)^2$	$x(1-0.1x)$	x^2
db	a	۴-۱۰	$-298x+480$	$1-0.1x$	x	$(-298x+480)(1-0.1x)$	$x(-298x+480)$	$(1-0.1x)^2$	$x(1-0.1x)$	x^2
bc	c	۰-۱۰	$-25x^2$	۰	x	۰	$-25x^3$	۰	۰	x^2

مشابه قبل $\Delta_1 = \frac{-10196}{3EI}$ ، $\Delta_2 = \frac{-417340}{3EI}$ بدست می‌آید. D_{ij} ها نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شوند مثلاً:

$$D_{12} = D_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\int_0^4 x(1-0.1x)\,dx + \int_4^{10} x(1-0.1x)\,dx + \int_0^{10} 0 \cdot dx \right) = \frac{50}{3EI}$$

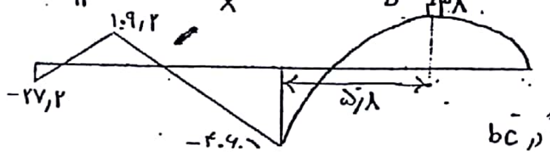
$$D_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{10}{3EI} \; ; \; D_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{2000}{3EI}$$

با جایگذاری در روابط سازگاری ۲ معادله ۲ مجهول را حل می‌کنیم.

و یا می‌توان به روش ماتریسی:

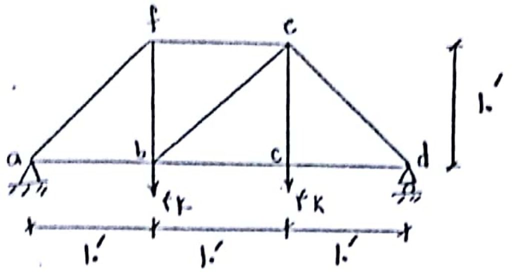
$$\underbrace{\frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} 10 & 50 \\ 50 & 2000 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}}_{X} = \underbrace{\frac{1}{3EI} \begin{Bmatrix} 10196 \\ 417340 \end{Bmatrix}}_{B} \Rightarrow X = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = A^{-1} B = \begin{Bmatrix} -27.2 \\ 209.3 \end{Bmatrix}$$

می‌توان به راحتی دیاگرام ممان را از روی دیاگرام برش و یا به کمک رابطه زیر ترسیم کرد.



$$M = M_0 + R_1 m_1 + R_2 m_2$$

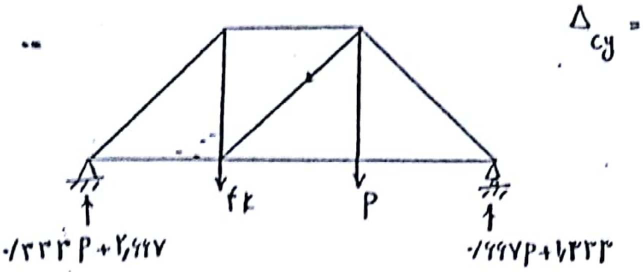
مثلاً در bc: $M = -25x^2 + (-27.2) \cdot 0 + 209.3x = -25x^2 + 209.3x$



مطلوب است محاسبه جابجائی عمودی گره c به روش کاستیگلیانو.

هر عضو $A = ۰/۵\ in^2$, $E = ۲۹ \times ۱۰^۳\ ksi$

در گره c به جای بار ۴k بار P را قرار داده و بعد از محاسبات $P=۴$ منظور می‌شود.



$$\Delta_{cy} = \sum \frac{F(\partial F/\partial P)}{EA} l = \frac{1}{EA} \sum F\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right) l$$

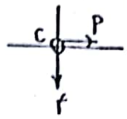
چون EA همه اعضا ثابت است

جدول پایین

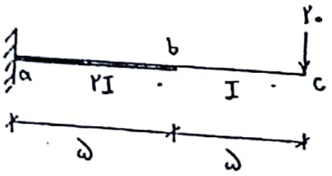
$$= \frac{۲۴۶/۵}{EA} = \frac{۲۴۶/۵ \times ۱۲}{۲۹ \times ۱۰^۳ \times ۰/۵} = ۰/۲۰۴\ in$$

عضو	l	F	$\partial F/\partial P$	$F(\partial F/\partial P)\,l$ ($P=۴$)
ab	۱۰	۰/۳۳۳P + ۲/۶۶۷	۰/۳۳۳	۱۳/۳۳
bc	۱۰	۰/۶۶۷P + ۱/۳۳۳	۰/۶۶۷	۲۶/۶۷
cd	۱۰	۰/۶۶۷P + ۱/۳۳۳	۰/۶۶۷	۲۶/۶۷
de	۱۴/۱۴	−(۰/۹۴۳P + ۱/۸۸۶)	−۰/۹۴۳	۷۵/۴۷
ef	۱۰	−(۰/۳۳۳P + ۲/۶۶۷)	−۰/۳۳۳	۱۳/۳۳
fa	۱۴/۱۴	−(۰/۴۷۱P + ۳/۷۷۲)	−۰/۴۷۱	۳۷/۷۰
bf	۱۰	۰/۳۳۳P + ۲/۶۶۷	۰/۳۳۳	۱۳/۳۳
be	۱۴/۱۴	−۰/۴۷۱P + ۱/۸۸۶	−۰/۴۷۱	۰
ce	۱۰	P	۱	۴۰
			Σ	۲۴۶/۵ k-ft

* اگر E و یا A ثابت نباشد از Σ بیرون نمی‌آمده و بایستی در جدول درج بشود.
* در ستون آخر پس از محاسبه $\frac{\partial F}{\partial P}$ می‌توان $P=۴$ را اعمال نمود.
* چون جواب مثبت شده است یعنی جابجائی عمودی گره c هم‌جهت با P اعمالی می‌باشد یعنی این گره ۰/۲۰۴in به سمت پایین می‌آید.
* اگر قرار بود دقیقاً جابجائی افقی گره c محاسبه بشود بار P را در این گره بصورت زیر قرار داده و محاسبات را ادامه می‌دهیم.



مطلوب است محاسبه خیز و شیب در گره c به روش کاستیگلیانو



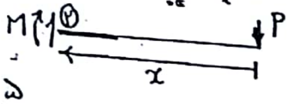
$$\Delta = \int_{\text{کل سازه}} \frac{M(\partial M/\partial P)}{EI}\,dx \quad , \quad \theta = \int_{\text{کل سازه}} \frac{M(\partial M/\partial T)}{EI}\,dx$$

خیز c

bc :

$$\Sigma M_{\textcircled{\scriptsize 0}} = 0 \Rightarrow M + Px = 0 \Rightarrow M = -Px \;;\; \frac{\partial M}{\partial P} = -x \;;\; 0 \leqslant x \leqslant 5$$

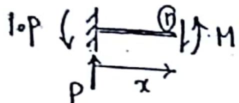
ab :



$$\Sigma M_{\textcircled{\scriptsize 0}} = 0 \Rightarrow M + Px = 0 \Rightarrow M = -Px \;;\; \frac{\partial M}{\partial P} = -x \;;\; 5 \leqslant x \leqslant 10$$

$$\Delta_{cy} = \int_0^5 \frac{(-20x)(-x)\,dx}{EI} + \int_5^{10} \frac{(-20x)(-x)\,dx}{2EI} = \frac{3750}{EI}$$

اگر برای قسمت ab مبدا را از سمت چپ انتخاب کنیم:



$$\Sigma M_{\textcircled{\scriptsize 0}} = 0 \Rightarrow Px - 10P = M$$

$$\partial M/\partial P = x - 10 \;;\; 0 \leqslant x \leqslant 5$$

$$\Delta_{cy} = \int_0^5 \frac{(-20x)(-x)\,dx}{EI} + \int_0^5 \frac{(20x - 200)(x - 10)}{2EI}\,dx = \frac{3750}{EI}$$

شیب c

bc :

$$\Sigma M_{\textcircled{\scriptsize 0}} = 0 \Rightarrow 20x + T + M = 0 \Rightarrow M = -20x - T \;;\; \frac{\partial M}{\partial T} = -1 \quad 0 \leqslant x \leqslant 5$$

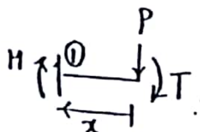
ab:

$$\Sigma M_{\textcircled{\scriptsize 0}} = 0 \Rightarrow M = -20x - T \;;\; \frac{\partial M}{\partial T} = -1 \;;\; 5 \leqslant x \leqslant 10$$

$$\theta_c = \int_0^5 \frac{(-20x - 0)(-1)}{EI}\,dx + \int_5^{10} \frac{(-20x - 0)(-1)}{2EI}\,dx = \frac{625}{EI}$$

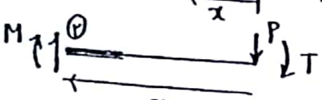
روش دوم: می‌توان تنها با یک شکل هم خیز و هم شیب را محاسبه کرد.

bc:



$$\Sigma M_{\textcircled{\scriptsize 0}} = 0 \Rightarrow M = -Px - T \quad \begin{cases} \partial M/\partial P = -x \\ \partial M/\partial T = -1 \end{cases} \quad 0 \leqslant x \leqslant 5$$

ab:

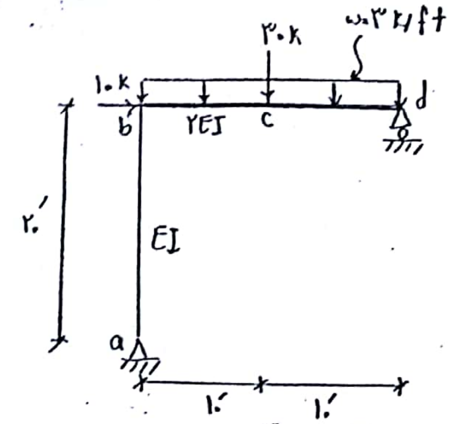


$$\Sigma M_{\textcircled{\scriptsize 0}} = 0 \Rightarrow M = -Px - T \quad \begin{cases} \partial M/\partial P = -x \\ \partial M/\partial T = -1 \end{cases} \quad 5 \leqslant x \leqslant 10$$

$$\Delta_{cy} = \int \frac{M(\partial M/\partial P)}{EI}\,dx = \frac{3750}{EI} \quad (P = 20, T = 0)$$

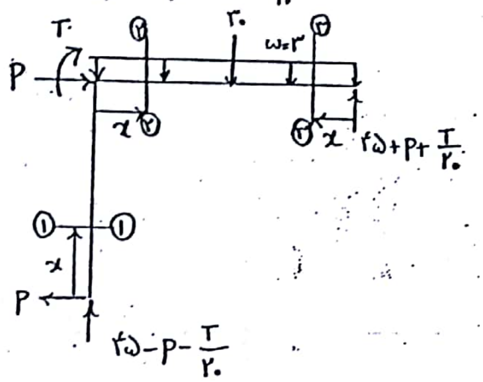
$$\theta_c = \int \frac{M(\partial M/\partial T)}{EI}\,dx = \frac{625}{EI} \quad (P = 20, T = 0)$$

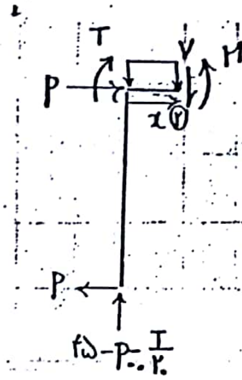
دیده می‌شود محاسبات کمتری انجام شده است. در حالت کلی M ها و مشتقات در یک جدول قرار می‌گیرد اما در اینجا چون فقط ۲ قسمت bc, ab وجود دارد نیازی به تشکیل جدول نخواهیم داشت. جدول فقط برای این است که محاسبات مرتب دیده شود.



مطلوب است محاسبه جابجایی افقی و شیب در نقطه b

از آنجا که هم شیب و هم جابجایی افقی سوال شده است در نقطه b یک P افقی و یک T قرار می‌دهیم. در نهایت P=۱۰ و T=۰ قرار می‌دهیم. برای این سازه ۳ قطع وجود دارد و برای هر یک M را بدست می‌آوریم. ابتدا واکنش‌ها را محاسبه می‌کنیم. مثلاً برای قطع ②-② خواهیم داشت:





$$\Sigma M_{②}=0 \Rightarrow M+3x\frac{x}{2}-T-20P-\left(45-P-\frac{T}{20}\right)x=0$$

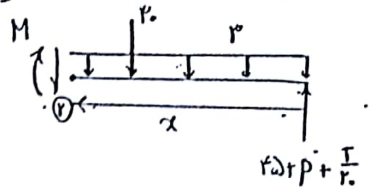
$$M=\left(45-P-\frac{T}{20}\right)x+T+20P-1.5x^2$$

							P=۱۰ ، T=۰	
قطعه	مبدا	حدود	EI	M	$\partial M/\partial P$	$\partial M/\partial T$	$M\,\partial M/\partial P$	$M\,\partial M/\partial T$
ab	a	۰-۲۰	EI	Px	x	0	$10x^2$	0
bc	b	۰-۱۰	۲EI	$\left(45-P-\frac{T}{20}\right)x+T+20P-1.5x^2$	$20-x$	$1-\frac{x}{20}$	$(35x+200-1.5x^2)(20-x)$	$(35x+200-1.5x^2)\left(1-\frac{x}{20}\right)$
cd	d	۰-۱۰	۲EI	$\left(45+P+\frac{T}{20}\right)x-1.5x^2$	x	$\frac{x}{20}$	$(55x-1.5x^2)x$	$(55x-1.5x^2)\frac{x}{20}$

$$\Delta_{bx}=\int_{\text{کل سازه}}\frac{M\frac{\partial M}{\partial P}}{EI}dx=\int_0^{20}\frac{10x^2}{EI}dx+\int_0^{10}\frac{(35x+200-1.5x^2)(20-x)}{2EI}dx+\int_0^{10}\frac{(55x-1.5x^2)x}{2EI}dx=\frac{57500}{EI}$$

$$\theta=\int_{\text{کل سازه}}\frac{M\frac{\partial M}{\partial T}}{EI}dx=\int_0^{20}\frac{0}{EI}dx+\int_0^{10}\frac{(35x+200-1.5x^2)\left(1-\frac{x}{20}\right)}{2EI}dx+\int_0^{10}\frac{(55x-1.5x^2)\frac{x}{20}}{2EI}dx=\frac{4625}{3EI}$$

می‌توانستیم مثلاً برای قطعه bc مبدا را از d انتخاب کنیم در این صورت M و حدود انتگرال عوض می‌شود اما نتیجه نهایی یکسان است. در این صورت برای این قسمت:

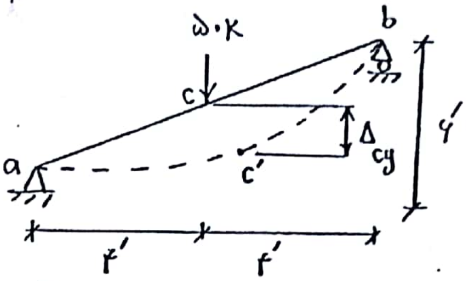


$$\Sigma M_{②}=0 \Rightarrow M+3x\frac{x}{2}+30(x-10)-\left(45+P+\frac{T}{20}\right)x=0$$

$$M=\left(45+P+\frac{T}{20}\right)x-30(x-10)-1.5x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial P}=x \qquad \frac{\partial M}{\partial T}=\frac{x}{20} \qquad 10\leqslant x\leqslant 20$$

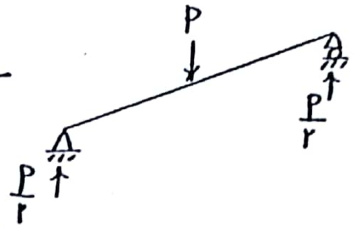
در شکل مقابل جابجائی قائم c زیر بار ۵۰K را بدست آورید.



$E = 29\times10^{3}\ ksi$

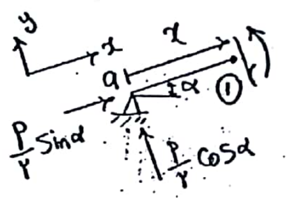
$I = 600\ in^4\ ;\ A = 80\ in^2$

$\Rightarrow$



$$\underbrace{\Delta_{cy} = \int}_{\text{کل سازه}} \frac{M\frac{\partial M}{\partial P}}{EI}\, \underbrace{dl}_{\text{در اصل جزء طول سازه است}}$$

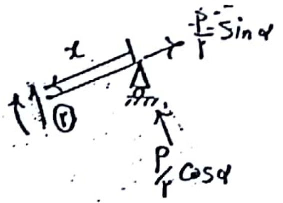
نکته: دلیل آن است که دستگاه مختصات مورب انتخاب بشود، در این صورت بارها تحت تاثیر قرار نمی‌گیرند.



$\Sigma M_{①} = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{2}\cos\alpha\, x$

$M = 0.4Px\ ;\ \frac{\partial M}{\partial P} = 0.4x$

$0 \leq x \leq 5$



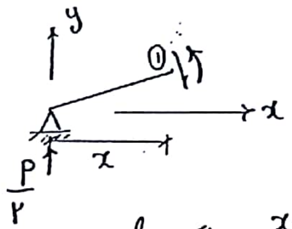
$\Sigma M_{②} = 0$

$\Rightarrow M = 0.4Px$

$\partial M/\partial P = 0.4x\quad 0 \leq x \leq 5$

$$\underset{(P=50)}{\Delta_{cy}} = \int_0^5 \frac{(20x)(0.4x)}{EI}\, \underbrace{dx}_{dl=dx} + \int_0^5 \frac{(20x)(0.4x)}{EI}dx = \frac{2000}{3EI} = \frac{2000}{3\left(\frac{29\times10^3\times600}{144}\right)} = 0.0055\ ft = 0.0662\ in$$

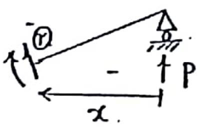
چنانچه بخواهیم محورها را بصورت افقی عمودی انتخاب نمائیم در آنصورت:



$\Sigma M_{①} = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{2}x$

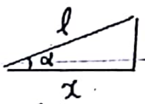
$\partial M/\partial P = x/2$

$0 \leq x \leq 4$



$\Sigma M_{②} = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{2}x$

$\partial M/\partial P = \frac{x}{2}\ ;\ 0 \leq x \leq 4$



$x = l\cos\alpha$

$\Rightarrow dl = \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dx}{0.8}$

فقط بایستی دقت شود در اینجا $dl \neq dx$ زیرا l در راستای عضو است، در اینحالت:

$$\underset{(P=50)}{\Delta_{cy}} = \int_0^4 \frac{(25x)(0.5x)}{EI}\frac{dx}{0.8} + \int_0^4 \frac{(25x)(0.5x)}{EI}\frac{dx}{0.8} = \frac{2000}{3EI}$$

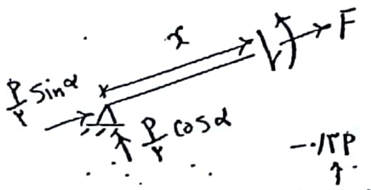
که همان نتیجه قبل می‌باشد

---

۱۰) در مثال قبل با در نظر گرفتن اثر نیروی محوری مسئله را مجدداً حل کنید.

$$\Delta_{cy} = \int \frac{M\frac{\partial M}{\partial P}}{EI}dl + \sum \frac{F\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)L}{EA}$$

فقط بایستی نیروی محوری را نیز محاسبه نمود.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = -0.3P\quad \frac{\partial F}{\partial P} = -0.3$

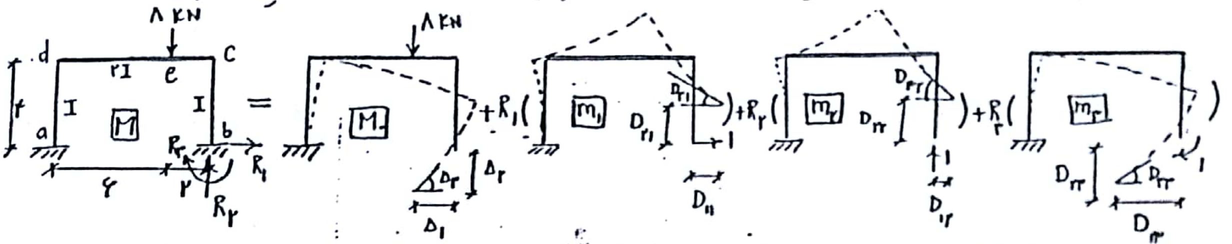
برای قطعه cb نیز $F = 0.3P$ و $\frac{\partial F}{\partial P} = 0.3$ بدست می‌آید، در نتیجه:

$$\Delta_{cy} = \underbrace{\frac{2000}{3EI}}_{\text{اثر خمش}} + \frac{\overset{-0.3P}{(-15)}(-0.3)\overset{L}{(5)}}{EA} + \frac{15\times0.3\times5}{EA} = \frac{2000}{3EI} + \frac{45}{EA} = \underset{\text{اثر خمش}}{0.0662} + \underset{\text{اثر نیروی محوری}}{0.0002} = 0.0664\ in$$

دیده می‌شود که اثر نیروی محوری در سازه خمشی بسیار ناچیز بوده، لذا در این سازه‌ها فقط اثر خمش را لحاظ می‌کنیم.

فصل ششم: سازه‌های نامعین

پس از تعیین نامعینی و درجه نامعینی سازه‌ی زیر تغییر شکل و دیاگرام ممان آنرا رسم کنید. (سازه مورد نظر ۳ درجه نامعین است)



روابط سازگاری

$$\begin{cases} \Delta_1 + R_1 D_{11} + R_2 D_{12} + R_3 D_{13} = 0 \\ \Delta_2 + R_1 D_{21} + R_2 D_{22} + R_3 D_{23} = 0 \\ \Delta_3 + R_1 D_{31} + R_2 D_{32} + R_3 D_{33} = 0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

که

$$\begin{cases} R_1 = R_{bx} \\ R_2 = R_{by} \\ R_3 = M_b \end{cases}$$

$$\Delta_i = \int \frac{M_0 \, m_i}{EI} dx \quad ; \quad D_{ij} = \int \frac{m_i \, m_j}{EI} dx$$

که

برای سادگی محاسبات جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

قطعه	مبدا	حدود	EI	M_0	m_1	m_2	m_3	$M=M_0+\sum R_i m_i$
ad	a	۰-۴	EI	-۴۸	x	۸	-۱	۲٫۴۳-۱٫۵x
de	d	۰-۶	۲EI	۸x-۴۸	۴	۸-x	-۱	۱٫۸۹x-۳٫۵۷
ec	c	۰-۲	۲EI	۰	۴	x	-۱	-۴٫۴۳+۶٫۱۱x
cb	b	۰-۴	EI	۰	x	۰	-۱	-۱٫۵x+۱٫۵۷

صرفاً محاسبه Δ_2 و D_{12} و D_{22} کافی است.

مثلا

$$\Delta_2 = \int \frac{M_0 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(\int_0^4 \frac{-48\times 8}{1} dx + \int_0^6 \frac{(8x-48)(8-x)}{2} dx + \int_0^2 \frac{0\times x}{2} dx + \int_0^4 \frac{0\times 0}{1} dx \right) = \frac{-1968}{EI}$$

و یا

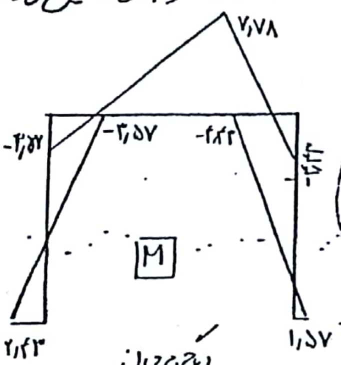
$$D_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(\int_0^4 \frac{8x}{1} dx + \int_0^6 \frac{4(8-x)}{2} dx + \int_0^2 \frac{4x}{2} dx + \int_0^4 \frac{x\times 0}{1} dx \right) = \frac{128}{EI} = D_{21}$$

$$D_{22} = \int \frac{m_2 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(\int_0^4 \frac{64}{1} dx + \int_0^6 \frac{(8-x)^2}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^4 \frac{0}{1} dx \right) = \frac{1024}{3EI}$$

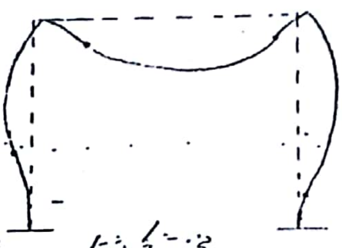
در نهایت ۳ معادله و ۳ مجهول حاصل می‌گردد تا R_i ها بدست آید و یا می‌توان بصورت ماتریسی R ها را بدست آورد. در نهایت ممان‌های سازه اصلی از روی جمع آثار مبنای $M=M_0+\sum_{i=1}^{3} R_i m_i$ ستون آخر جدول را تشکیل می‌دهد. دیاگرام ممان را با این ستون رسم کرده و می‌توان منحنی تغییر شکل سازه را نیز رسم نمود.

$$\underbrace{\frac{1}{3EI}\begin{bmatrix} 320 & 384 & -96 \\ 384 & 1024 & -144 \\ -96 & -144 & 36 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}}_{X} = \underbrace{-\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -672 \\ -1968 \\ 264 \end{Bmatrix}}_{B}$$

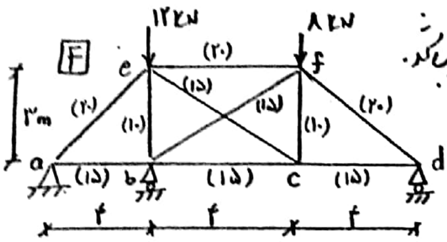
$$X = A^{-1}B = \{-1.5, \ 6.11, \ -1.57\}^t$$



دیاگرام ممان



منحنی تغییر شکل تقریبی



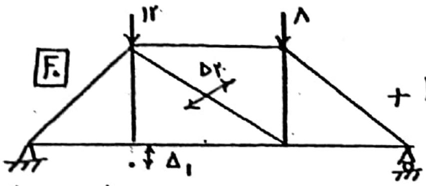
خرپای زیر را به روش سازگاری تغییر شکلها تحلیل کنید. اعداد داخل پرانتز بیانگر سطح مقطع عضو به cm^2 میباشد.

درجه نامعینی خارجی $4-3=1$; $D=m+r-2j=2$

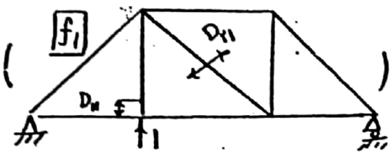
پس بنابراین یک درجه نیز نامعینی داخلی است. پس یک واکنش (R_b) و یک عضو (bf) را حذف میکنیم.

$R_1 = R_b$ ، $R_2 = F_{bf}$

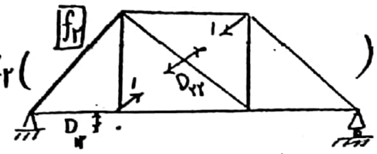
=



$+ R_1($



$)+R_2($



$)$

واکنش ۱ در تکیه‌گاه b در صورت تام لوله و واکنش ۲ همان واکنش bf خط‌ور شده است. مثلاً Δ_2 بیانگر میزان دوری یا نزدیکی گره b و f در سازه پایه است.

سازگاری
$$\begin{cases} \Delta_1 + R_1 D_{11} + R_2 D_{12} = 0 \\ \Delta_2 + R_1 D_{21} + R_2 D_{22} = 0 \end{cases}$$

جابجایی قائم b صفر است

صفر می‌گذاریم چون پیوستگی عضو bf را نیز در جدول می‌آوریم

$$\Delta_i = \sum \frac{F_0 f_i l}{EA} \;;\; D_{ij} = \sum \frac{f_i f_j l}{EA}$$

$$F = F_0 + R_1 f_1 + R_2 f_2$$

عضو	$l(cm)$	$A(cm^2)$	F_0	f_1	f_2	$F_0 f_1 l/A$	$F_0 f_2 l/A$	$f_1^2 l/A$	$f_2^2 l/A$	$f_1 f_2 l/A$	$F=F_0+\sum R_i f_i$
ae	۵۰۰	۲۰	-۱۷٫۷۸	۱٫۱۱	۰	-۴۹۳٫۸	۰	۳۰٫۹	۰	۰	-۱٫۳۶
ef	۴۰۰	۲۰	-۱۲٫۴۴	-۰٫۴۴	-۰٫۸	-۱۱۰٫۶	۱۹۹٫۱	۳٫۹	۱۲٫۸	-۷٫۱	-۱٫۸۱
df	۵۰۰	۲۰	-۱۵٫۵۶	۰٫۵۶	۰	-۲۱۶	۰	۷٫۷	۰	۰	-۷٫۳۵
be	۳۰۰	۱۰	۰	-۱	-۰٫۶	۰	۰	۳۰	۱۰٫۸	۱۸	-۱۱٫۷۲
ce	۵۰۰	۱۵	-۲٫۲۲	۰٫۵۶	۱	-۴۱٫۱	-۷۴٫۱	۱۰٫۳	۳۳٫۳	۱۸٫۵	۰٫۹
bf	۵۰۰	۱۵	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۳۳٫۳	۰	-۵٫۰۹
cf	۳۰۰	۱۰	+۱٫۳۳	-۰٫۳۳	-۰٫۶	-۱۳٫۳	-۲۴	۳٫۳۳	۱۰٫۸	۶	-۰٫۵۴
ab	۴۰۰	۱۵	۱۴٫۲۲	-۰٫۸۹	۰	-۳۳۷٫۱	۰	۲۱٫۱	۰	۰	۱٫۰۹
bc	۴۰۰	۱۵	۱۴٫۲۲	-۰٫۸۹	-۰٫۸	-۳۳۷٫۱	-۳۰۳٫۴	۲۱٫۱	۱۷٫۱	۱۸٫۹	۵٫۱۶
cd	۴۰۰	۱۵	-۱۲٫۴۴	-۰٫۴۴	۰	-۱۴۷٫۵	۰	۵٫۳	۰	۰	۵٫۸۸
					Σ	-۱۴۹۶٫۷	-۲۰۲٫۴	۱۳۳٫۵۶	۱۱۸٫۱۳	۵۴٫۳۷	

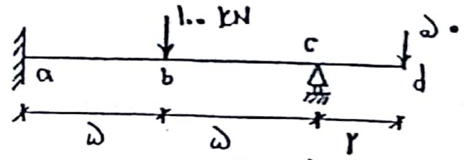
در معادلات سازگاری E از طرفین رابطه حذف شده و دو معادله دو مجهول حل می‌شود و یا اگر بخواهیم به فرم ماتریسی می‌توان دستگاه را حل نمود.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 133.56 & 54.37 \\ 54.37 & 118.13 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 1496.7 \\ 202.4 \end{Bmatrix}}_{B} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{Bmatrix} 14.770 \\ -5.09 \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

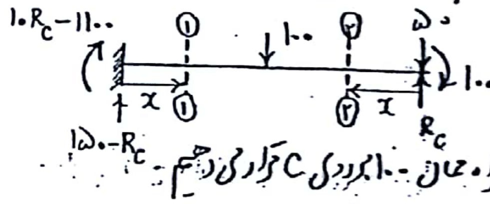
$$|A| = ad - bc$$

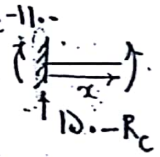
با داشتن R_1 و R_2 ستون آخر جدول نیز بدست می‌آید.



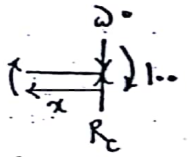
تیر روبرو را به روش حداقل کار حل کنید. $EI = cte$

سازه یک درجه نامعین است، می‌توانیم M_a و یا R_c را به عنوان مجهول اضافه در نظر بگیریم. در اینجا R_c را انتخاب می‌کنیم. دیده می‌شود در حداقل کار نیازی به سازه مجازی نداشته و همه چیز بر روی سازه‌ی اصلی قرار می‌گیرد. قطعه cd نیز حذف بوده و بار ۵۰ را به همراه ممان ۱۰۰- بر روی c قرار می‌دهیم.





$\underline{ab:}$ $M = (150 - R_c)x + 10R_c - 1100 \;:\; \partial M/\partial R_c = 10 - x \;;\; 0 \leqslant x \leqslant 5$



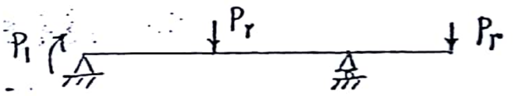
$\underline{bc:}$ $M = R_c x - 50x - 100 \;:\; \partial M/\partial R_c = x \;;\; 0 \leqslant x \leqslant 5$

$$\frac{\partial U}{\partial R_c} = \Delta_c = 0 \Rightarrow \int \frac{M(\partial M/\partial R_c)}{EI}dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI}\left(\int_0^5 [(150 - R_c)x + 10R_c - 1100](10 - x)\,dx + \int_0^5 (R_c x - 50x - 100)x\,dx\right) = 0$$

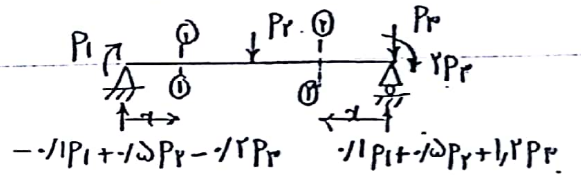
(دقت شود برای ۲ قسمت نیازی به کشیدن جدول نخواهیم داشت) $\Rightarrow R_c = 96.25\,kN \Rightarrow M_a = -137.5$

---

۲۲ - در مسئله قبل فرض کنید علاوه بر حل مسئله، جابجائی عمودی b و d نیز مد نظر باشد. بنابراین لازم است در این نقاط P مجهول منظور گردد. به عنوان مثال می‌توان برای حل مثلاً M_a را واکنش اضافی در نظر بگیریم.



برای حل $\dfrac{\partial U}{\partial P_1} = \theta_a = 0$ همچنین : $\dfrac{\partial U}{\partial P_2} = \Delta_b \;;\; \dfrac{\partial U}{\partial P_3} = \Delta_d$



(دقت شود که در این مسئله هدف محاسبه جابجائی‌ها در سازه نامعین است)

$\underline{ab:}$ $M = P_1 + (-0.1P_1 + 0.5P_2 - 0.2P_3)x \;;\; \partial M/\partial P_1 = 1 - 0.1x \;;\; \partial M/\partial P_2 = 0.5x \;;\; \partial M/\partial P_3 = -0.2x$

$\underline{bc:}$ $M = -P_3(2 + x) + (0.1P_1 + 0.5P_2 + 1.2P_3)x \;;\; \partial M/\partial P_1 = 0.1x \;;\; \partial M/\partial P_2 = 0.5x \;;\; \partial M/\partial P_3 = 0.2x - 2$

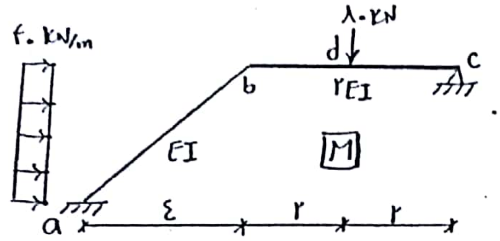
$$\begin{aligned} &\int \frac{M(\partial M/\partial P_1)\,dx}{EI} = 0 \\ &\int \frac{M(\partial M/\partial P_2)\,dx}{EI} = \Delta_b \\ &\int \frac{M(\partial M/\partial P_3)\,dx}{EI} = \Delta_d \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 3.33 & 6.25 & -3.33 \\ 6.25 & 20.833 & -12.5 \\ -3.33 & -12.5 & 11 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 = 100 \\ P_3 = 50 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_a = 0 \\ \Delta_b \\ \Delta_d \end{Bmatrix}$$

دقت شود هر جا θ معلوم است P نامعلوم است و برعکس

از سطر اول ماتریس $\Rightarrow 3.33P_1 + 625 - 166.5 = 0 \Rightarrow P_1 = -137.7 = M_a$

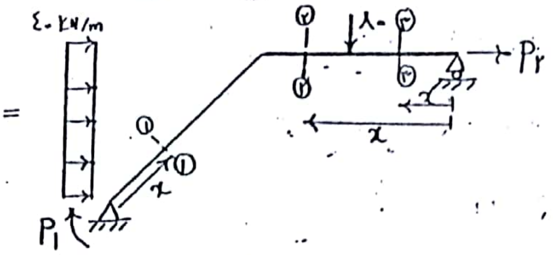
و از سطر دوم و سوم ماتریس نیز $\Delta_b = \dfrac{598.9}{EI}$ و $\Delta_d = \dfrac{-241.7}{EI}$ بدست می‌آید. (یعنی d به سمت بالا حرکت می‌کند، خلاف جهت P_3 فرضی)

قاب روبرو را به روش حداقل کار تحلیل کنید.



برای ویکسی قاب درجه نامعینی ۲ است. فرض می‌کنیم M_a و R_{cx} مجهولات اضافی باشند.

=



$$\partial U/\partial P_1 = \theta_a = 0 \Rightarrow \int \frac{M(\partial M/\partial P_1)}{EI}\,dx = 0$$

$$\partial U/\partial P_2 = \Delta_{cx} = 0 \Rightarrow \int \frac{M(\partial M/\partial P_2)}{EI}\,dx = 0$$

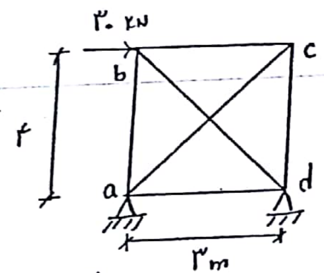
قطعه	مبدأ	حدود	EI	M	$\partial M/\partial P_1$	$\partial M/\partial P_2$
ab	a	۰–۵	EI	$-7.2x^2+70x+P_1(1-0.1x)+0.3P_2x$	$1-0.1x$	$0.3x$
bd	c	۲–٤	۲EI	$2.5x+160+\frac{P_1}{8}x+\frac{3}{8}P_2x$	$\frac{1}{8}x$	$\frac{3}{8}x$
dc	c	۰–۲	۲EI	$82.5x+\frac{1}{8}P_1x+\frac{3}{8}P_2x$	$\frac{1}{8}x$	$\frac{3}{8}x$

دقت شود سازه بارگذاری این مسئله همان سازه مسئله ۱۳ می‌باشد، که جابجایی افقی c و شیب a در نظر قرار گرفته بود. بنابراین می‌توان M جدول را از نتایج مسئله ۱۳ بدست آورد. با جاگذاری مقادیر M و مشتقات آن در دو رابطه سازگاری بالا:

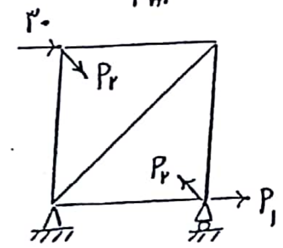
$$\begin{cases} -3.083\,P_1+3P_2=-472.5 \\ 3\,P_1+5.25\,P_2=-767.5 \end{cases} \Rightarrow P_1=M_a=-24.78\ ;\ P_2=R_{cx}=-132$$

۲۴- خرپای روبرو را با فرض ثابت بودن EA در تمام مقاطع تحلیل کنید.

$$\begin{cases} m+r-2j=2 \\ 12-3=1 \end{cases}$$ یک درجه داخلی و یکی خارجی



=



عضو	l(m)	F	$\partial F/\partial P_1$	$\partial F/\partial P_2$	$F(\partial F/\partial P_1)\,l$	$F(\partial F/\partial P_2)\,l$
ab	٤	$-0.8P_2$	0	-0.8	0	$2.56P_2$
bc	۳	$-0.6P_2-30$	0	-0.6	0	$1.8(0.6P_2+30)$
cd	٤	$-0.8P_2-40$	0	-0.8	0	$3.2(0.8P_2+40)$
ad	۳	$P_1-0.6P_2$	1	-0.6	$+3(P_1-0.6P_2)$	$-1.8(P_1-0.6P_2)$
bd	۵	P_2	0	1	0	$5P_2$
ac	۵	P_2+50	0	1	0	$5(P_2+50)$
Σ					$3(P_1-0.6P_2)$	$-1.8P_1+17.28P_2+432$

$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=\Delta_{dx}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial P_2}=\Delta_{bd}=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{6}F\left(\frac{\partial F}{\partial P_1}\right)l=0 \\ \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{6}F\left(\frac{\partial F}{\partial P_2}\right)l=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(P_1-0.6P_2)=0 \\ -1.8P_1+17.28P_2+432=0 \end{cases} \Rightarrow P_1=-16\ ;\ P_2=-26.67$$

bd درجدول را ببرید

با جاگذاری P_1 و P_2 در ستون سوم جدول همه F ها بدست می‌آید.

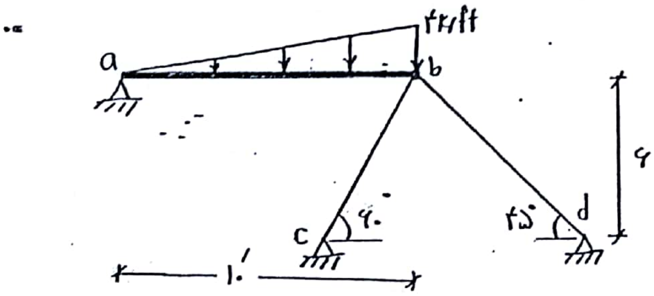
اگر در این مثال جابجایی افقی b سؤال شود می‌توان مشابه مسأله ۲۲ به جای بار ۳۰ بار P_2 قرار داده و $\frac{\partial U}{\partial P_2}$ را محاسبه کرد. اما در این مثال چون فقط یک بار وجود دارد، می‌توان از تساوی کار نیروهای خارجی و کار نیروهای داخلی، Δ را بدست آورد. (روش کار حقیقی)

$$\frac{1}{2}\times 30\times \Delta_{bx} = \sum_{i=1}^{6}\frac{F^2 l}{2EA} \Rightarrow 15\,\Delta_{bx} = \frac{5040}{EA} \Rightarrow \Delta_{bx} = \frac{336}{EA}$$

در اینجا نیز جابجایی یک سازه نامعین محاسبه شد.

می‌توان P_1 و P_2 را اعداد دیگری منظور کرد و با محاسبه انرژی سازه دید چه نحوه که انرژی بیشتر خواهد بود.

۲۵- سازه مرکب روبرو را بروش حداقل کار حل کنید.



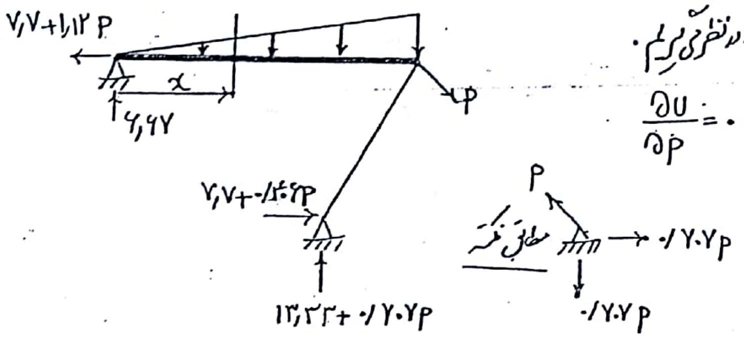
$I_{ab} = 800\ in^4$; $A_{bc} = A_{bd} = 3\ in^2$

$E = 29\times 10^3\ ksi$

$$(3m+r)-(3j+c) = (3\times 3+6)-(3\times 4+2) = 1$$

$c = 3-1 = 2$

چون یک درجه نامعین است، نیروی bd را بعنوان مجهول اضافه در نظر می‌گیریم.



$$\frac{\partial U}{\partial P} = 0 \Rightarrow \int_{\text{روی } ab} \frac{M(\partial M/\partial P)}{EI}dx + \sum_{\text{روی } bc,\,bd} \frac{F(\partial F/\partial P)}{EA}\,l = 0$$

اگر برای ab ، A داده شده باشد بایستی علاوه بر M در این قسمت F انرژی نیز در Σ وارد گردد.

خمش:

محوری:

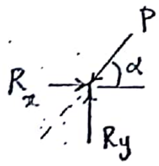
$ab:\quad M = 6.67x - 0.0667x^3 \quad ; \quad \partial M/\partial P = 0$

$bc:\quad F = -15.4 - 0.816P \quad ; \quad \partial F/\partial P = -0.816 \qquad bd:\quad F = P \quad ; \quad \partial F/\partial P = 1$

خود عضو bd در محاسبات می‌آید

$$\frac{\partial U}{\partial P} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E}\Big(\int_0^{\overset{\text{تبدیل به اینچ}}{120}} \frac{(6.67x - 0.0667x^3)\times 0}{800}dx + \frac{(-15.4-0.816P)(-0.816)\times 6.93\times 12}{3}$$

$$+\frac{P\times 1\times 8.49\times 12}{3}\Big) = 0 \Rightarrow P = -6.64\ K$$

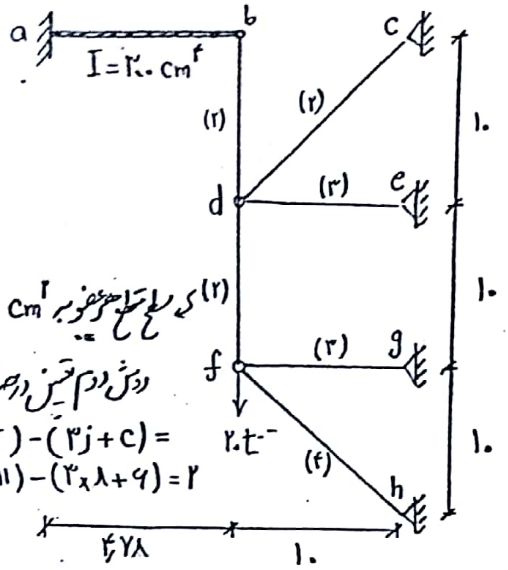


نکته: در یک گره که صرفاً ۳ نیرو بصورت روبرو به آن اعمال شده باشد، برآیند دو واکنش بایستی در راستای P باشد، لذا:

$$tg\,\alpha = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow R_y = R_x\,tg\,\alpha \ , \quad R_x = R_y\,cotg\,\alpha$$

یعنی با داشتن یکی از واکنش‌ها، بدون محاسبه P دیگری بدست می‌آید.

تمرین: برای عضو ab فرض کنید $A = 10\ in^2$ بوده، مسأله را با منظور کردن اثر نیروی محوری در ab حل کرده، نتایج را مقایسه کنید.



(۲) که سطح مقطع هر عضو بر cm²

روش دوم تعیین درجه نامعینی

$(3m+r)-(3j+c)=$

$(3\times 7+11)-(3\times 8+6)=2$

سازه مرکب روبرو را به روش جرآتس کار حل کنید.

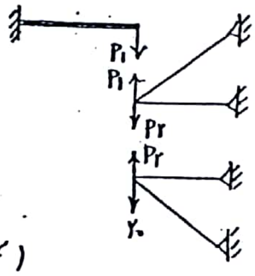
برای تعیین درجه نامعینی کنگری نیم نیروی محوری متصل به تیر را ابدانیم (bd)

- در این صورت درجه نامعینی خرپای باشد: $5+8-2\times 6=1$

لذا با توجه به نیروی مجهول bd ، سازه مرکب دو درجه نامعین است

نیروی bd و df را به عنوان مجهولات اضافه در نظر گرفته مشتق انرژی را

نسبت به آنها مساوی صفر قرار می دهیم.

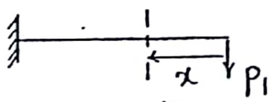


$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=0 \Rightarrow \int \frac{M(\partial M/\partial P_1)}{EI}dx+\sum \frac{F(\partial F/\partial P_1)}{EA}l=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2}=0 \Rightarrow \int \frac{M(\partial M/\partial P_2)}{EI}dx+\sum \frac{F(\partial F/\partial P_2)}{EA}l=0 \qquad (2)$$

(محاسبات صفر لحاظ شده است، مشترط برآنکه اعضای حذف شده در جدول می آیند.)

عضو	l(cm)	A(cm²)	F	$\partial F/\partial P_1$	$\partial F/\partial P_2$	$F(\partial F/\partial P_1)\, l/A$	$F(\partial F/\partial P_2)\, l/A$
bd	۱۰۰۰	۲	P_1	۱	۰	۵۰۰ P_1	۰
dc	۱۴۱۴	۲	$-1.414P_1+1.414P_2$	-۱٫۴۱۴	۱٫۴۱۴	۱۴۱۴ (P_1-P_2)	۱۴۱۴ $(-P_1+P_2)$
de	۱۰۰۰	۳	P_1-P_2	۱	-۱	۳۳۳ (P_1-P_2)	۳۳۳ $(-P_1+P_2)$
df	۱۰۰۰	۲	P_2	۰	۱	۰	۵۰۰ P_2
fg	۱۰۰۰	۳	$20-P_2$	۰	-۱	۰	$-6666.7+333P_2$
fh	۱۴۱۴	۴	$-28.28+1.414P_2$	۰	۱٫۴۱۴	۰	$-14180+708P_2$
$\sum$						$2247P_1-1747P_2$	$-1747P_1+3288P_2-20840$



$$M=-P_1x \; ; \quad \partial M/\partial P_1=-x \; ; \quad \partial M/\partial P_2=0$$

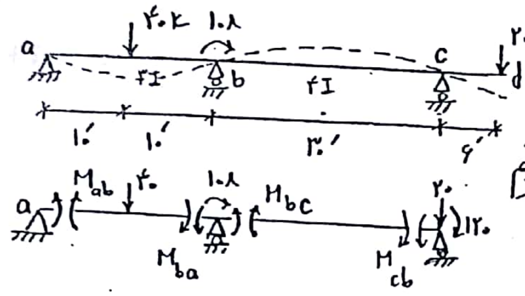
$$(1) \Rightarrow \frac{1}{E}\left(\int_0^{478}\frac{(-P_1x)(-x)}{300}dx+2247P_1-1747P_2\right)=0$$

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{E}\left(\int_0^{478}\frac{(-P_1x)\times 0}{300}dx-1747P_1+3288P_2-20840\right)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1=0.09\ t \\ P_2=6.4\ t \end{cases}$$

لازم به ذکر است که برای عضو ab ، سطح مقطع نیز داده شده باشد باید F آن را بدست آورده و در محاسبه Σ علاوه بر نیروهای محوری اعضای خرپا ، نیروی محوری عضو خمشی (تیر ab) را نیز وارد کنیم. بدیهی است در حالت کلی منظور کردن اثر F در عضو خمشی تأثیر زیادی در جوابها نخواهد داشت.

فصل هفتم : شیب - افت



تیر روبرو را به روش شیب - افت تحلیل کنید.

بار ۲۰k را به c منتقل کرده و یک لنگر اضافه می‌کنیم. پس از ترسیم شکل فرضی تیر را تفکیک می‌کنیم

DKI=۳ و مجهولات θ_a ، θ_b و θ_c می‌باشند. تیر را از گره‌ها جدا می‌کنیم:

$$ab:\ EK=\frac{3EI}{20}=\frac{9EI}{60}=9\ ;\ FEM_{ab}=-\frac{Pl}{8}=-100\ ;\ FEM_{ba}=+\frac{Pl}{8}=+100\ ;\ \psi=0$$

$$bc:\ EK=\frac{4EI}{30}=\frac{8EI}{60}=8\ ;\ FEM_{bc}=FEM_{cb}=0\ ;\ \psi=0$$

(فرض کردیم $\frac{EI}{60}=1$)

$$ab\begin{cases}M_{ab}=2\times9\,(2\theta_a+\theta_b-3\times0)-100\\ M_{ba}=2\times9\,(2\theta_b+\theta_a-3\times0)+100\end{cases}\qquad bc\begin{cases}M_{bc}=2\times8\,(2\theta_b+\theta_c-3\times0)+0\\ M_{cb}=2\times8\,(2\theta_c+\theta_b-3\times0)+0\end{cases}$$

تعادل گره a: $M_{ab}=0$

تعادل گره b: $M_{ba}+M_{bc}-108=0$

تعادل گره c: $M_{cb}-120=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}36\theta_a+18\theta_b=100\\ 18\theta_a+68\theta_b+16\theta_c=8\\ 16\theta_b+32\theta_c=120\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_a=3.78\\ \theta_b=-2\\ \theta_c=4.75\end{cases}\xrightarrow{\text{جایگذاری}}\begin{cases}M_{ab}=0\\ M_{ba}=96\\ M_{bc}=12\\ M_{cb}=120\end{cases}$$

در آخر کنترل می‌کنیم که ۳ معادله از معادلات تعادل صدق نمایند. دقت شود θ هایی به دست آمده همین مقدار نسبی در معادلات شیب افت به کار رفت. اگر لازم داشته باشیم برای محاسبه مقدار واقعی کافی است مقدار نسبی را به کمیتی که برابر واحد منظور شده است، تقسیم کنیم. مثلاً $\theta_b=\frac{-2}{EI/60}=\frac{-120}{EI}$.

۲۰- مثال قبل را به روش شیب - افت اصلاح شده حل کنید.

از آنجا که لنگر گره‌های a و c از ابتدا معلوم‌اند لذا θ این گره‌ها از مجهولات مسئله حذف شده یعنی تنها یک مجهول θ_b خواهیم داشت. با نوشتن معادلات شیب - افت اصلاح شده:

لنگر a معلوم: $M^m_{ba}=3\times9\,(\theta_b-0)+\left(100-\frac{1}{2}(-100)+\frac{1}{2}\times0\right)$

چون لنگر a از ابتدا معلوم است پس برای ab فقط معادله شیب افت اصلاح شده را می‌نویسیم

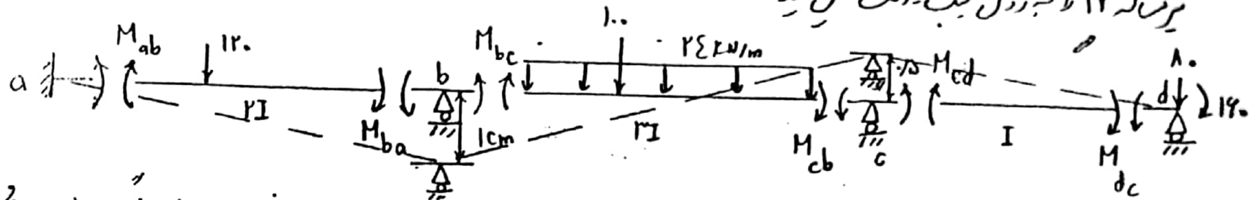
لنگر c معلوم: $M^m_{bc}=3\times8\,(\theta_b-0)+\left(0-\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}(+120)\right)$

چون لنگر c از ابتدا معلوم است پس برای bc فقط یک معادله شیب افت می‌نویسیم

تعادل گره b: $M^m_{ba}+M^m_{bc}-108=0\Rightarrow 51\theta_b+102=0\Rightarrow\theta_b=-2$

با جایگذاری θ_b در دو معادله شیب افت $M^m_{ba}=96$, $M^m_{bc}=12$ به دست می‌آید. دیده شد که استفاده از شیب افت اصلاح شده برای هر دهانه که لنگر یک انتهای آن معلوم است باعث کم شدن مجهولات مسئله می‌شود. بنابراین همواره در هر جا لازم باشد از آن استفاده می‌کنیم. دقت شود در شیب افت اصلاح شده θ مربوط به گره‌ای که لنگر در آن معلوم است (در اینجا a و c) از معادلات حذف می‌شود، نه اینکه صفر می‌شوند. $\theta_a,\theta_c\neq0$

تمرین مسئله ۲۷ را به روش شیب-افت تحلیل کنید.



دیده می‌شود DKI = 3 می‌باشد اما چون ممان d معلوم است θ_d از مجهولات حذف و مجهولات صرفاً θ_b و θ_c خواهند بود. یعنی صرفاً دو معادله و دو مجهول.

$$ab:\ EK=\frac{2EI}{8}=\frac{5EI}{20}=5\ ;\ FEM_{ab}=\frac{-120\times 3\times 5^2}{8^2}=-140.6\ ;\ FEM_{ba}=+84.4\ ;\ \psi=\underbrace{\boxed{\frac{0.01}{8}}}_{\text{واقعی}}\times\frac{EI}{20}=\underbrace{\boxed{25}}_{\text{نسبی}}$$

$$bc:\ EK=\frac{3EI}{10}=\frac{6EI}{20}=6\ ;\ FEM_{bc}=\frac{-100\times 4\times 6^2}{10^2}+\frac{-24\times 10^2}{12}=-344\ ;\ FEM_{cb}=296\ ;\ \psi=\frac{-0.015}{10}\times\frac{EI}{20}=-30$$

$$cd:\ EK=\frac{EI}{5}=\frac{4EI}{20}=4\ ;\ FEM_{cd}=FEM_{dc}=0\ ;\ \psi=\frac{0.005}{5}\times\frac{EI}{20}=20$$

دقت شود $\frac{EI}{20}=1$ منظور شده است. چون قرار است مسئله به روش نسبی حل شود (همواره بهتر است اینگونه حل کنیم) لذا کل داخل پرانتز در معادلات شیب-افت باید نسبی باشد، اگر سختی مجهول است، نسبی بدست می‌آید ولی اگر سختی معلوم است باید نسبی به کار گرفته شود. دیده می‌شود که ψ $\frac{EI}{20}=20000$ می‌باشد که در بالا واقعی است بنابراین بایستی در مقدار واقعی سختی که برابر واحد منظور شده است ضرب شود.

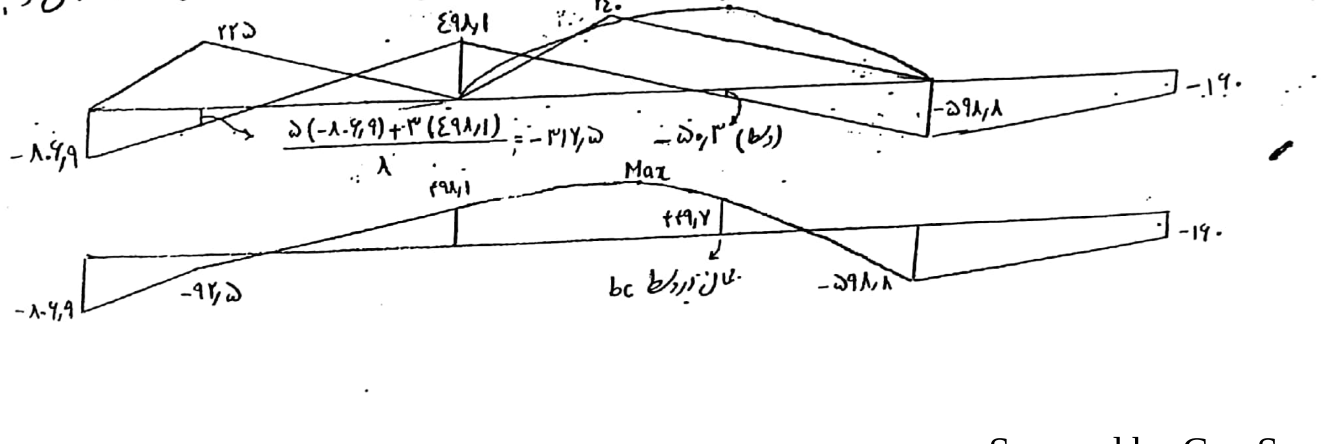
$$ab\begin{cases}M_{ab}=2\times 5(2\times 0+\theta_b-3\times 25)-140.6\\ M_{ba}=2\times 5(2\theta_b+0-3\times 25)+84.4\end{cases}\qquad bc\begin{cases}M_{bc}=2\times 6(2\theta_b+\theta_c-3(-30))-344\\ M_{cb}=2\times 6(2\theta_c+\theta_b-3(-30))+296\end{cases}$$

$$cd:\ M^m_{cd}=3\times 4(\theta_c-20)+\left(0-\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}(+160)\right)$$

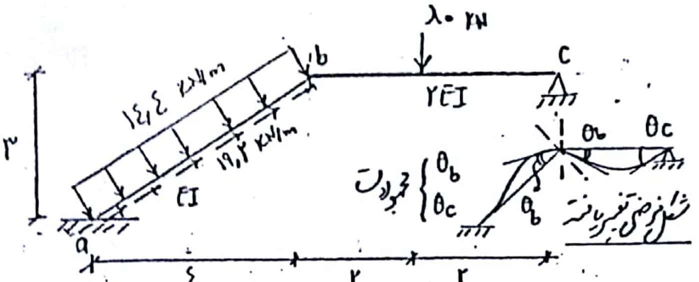
چون ممان d معلوم است فقط یک شیب-افت اصلاح شده برای دهانه cd نوشته می‌شود.

$$\begin{array}{ll}\text{b تعادل} & M_{ba}+M_{bc}=0\\ \text{c تعادل} & M_{cb}+M^m_{cd}=0\end{array}\Rightarrow\begin{cases}44\theta_b+12\theta_c=-70.4\\ 12\theta_b+36\theta_c=-1216\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_b=8.17\\ \theta_c=-36.5\end{cases}\xrightarrow{\text{جایگذاری}}\begin{cases}M_{ab}=-806.9\\ M_{ba}=-M_{bc}=-498.1\\ M_{cb}=-M_{cd}=598.8\end{cases}$$

دقت شود می‌توان مثل سری مسئله ۲۷ برای رسیدن دیاگرام برش و بعد ممان را رسم کرد و یا اینکه با استفاده از جمع آثار دیاگرام ممان را رسم کرد. دقت شود دیاگرام ممان قرارداد خود را دارد. بنابراین وقتی مسئله‌ای با روش سختی حل شد برای ترسیم دیاگرام ممان، ممان‌های چپ را ثابت نگه داشته، ممان‌های راست را در منفی ضرب می‌کنیم.



قاب مسئله ۲۲ را به روش شیب افت حل کنید.



برای این که قاب فاقد انتقال جانبی است و چون M_c معلوم است پس θ_c حذف شده، لذا تنها یک مجهول θ_b خواهیم داشت.

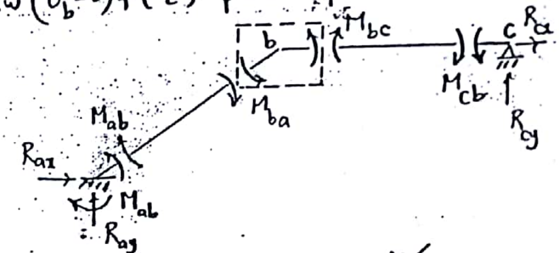
در ابتدا بار گسترده مزبور را به بار عمود بر عضو و در راستای عضو تبدیل می‌کنیم. (مسئله ۴)

$$ab:\ EK=\frac{EI}{5}=\frac{2EI}{10}=2\ ;\ FEM_{ab}=\frac{-14.4\times5^2}{12}=-30\ ;\ FEM_{ba}=30\ ;\ \psi=0$$

$$bc:\ EK=\frac{2EI}{4}=\frac{5EI}{10}=5\ ;\ FEM_{bc}=\frac{-80\times4}{8}=-40\ ;\ FEM_{cb}=40\ ;\ \psi=0$$

(بار گسترده در راستای عضو تأثیری در FEM ندارد)

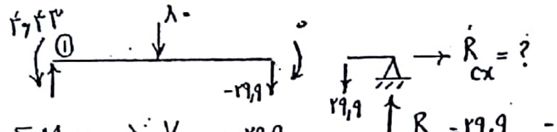
$$ab\begin{cases}M_{ab}=2\times2(2\times0+\theta_b-3\times0)-30\\ M_{ba}=2\times2(2\theta_b+0-3\times0)+30\end{cases}\qquad bc:\ M^m_{bc}=3\times5(\theta_b-0)+(-40)-\tfrac{1}{2}\times40+\tfrac{1}{2}\times0$$



تعادل گره b : $M_{ba}+M^m_{bc}=0 \Rightarrow 23\theta_b=30 \Rightarrow \theta_b=1.3$

جایگذاری $M_{ab}=-24.78\ ;\ M_{ba}=40.43\ ;\ M_{bc}=-40.43$

برای محاسبه واکنش‌ها ابتدا در قطعه bc : V_{cb} را به دست آورده و بعد R_{cy} محاسبه می‌شود، پس در کل سازه حول a لنگر گرفته و حل می‌کنیم. یعنی:



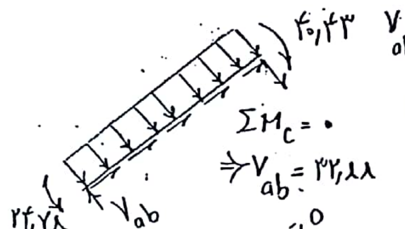
$\Sigma M_{①}=0 \Rightarrow V_{cb}=-29.9$

کل سازه
$$\Sigma M_a=0 \Rightarrow 14.4\times5\times2.5+80\times6-\overset{M_{ab}}{24.78}-29.9\times8+3R_{cx}=0 \Rightarrow R_{cx}=-132$$
(یعنی به سمت چپ است)

و بقیه واکنش‌ها در a نیز به سادگی به دست می‌آید.

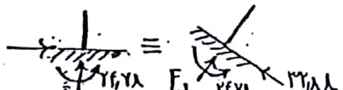
کل سازه $\Sigma F_x=0 \Rightarrow R_{ax}+\underbrace{40\times3}_{\text{خود بار راحت‌تر است}}-132=0 \Rightarrow R_{ax}=12\ ;\ \Sigma F_y=0 \Rightarrow R_{ay}=50.1$

روش دیگر این است که ابتدا تیر ab را برش بزنیم. برای این که برش عمود بر عضو به دست آید. در این صورت $V_{ab}=32.88$ برای این که نیروی تکیه‌گاه a را هم می‌توان در راستای افقی عمودی و هم در راستای عضو بیان کرد.

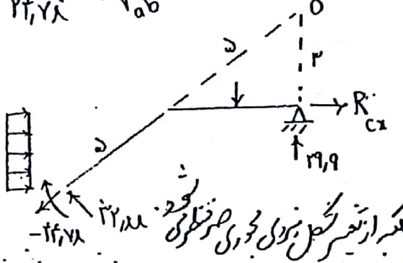


$\Sigma M_c=0$
$\Rightarrow V_{ab}=32.88$

بنابراین خواهیم داشت:



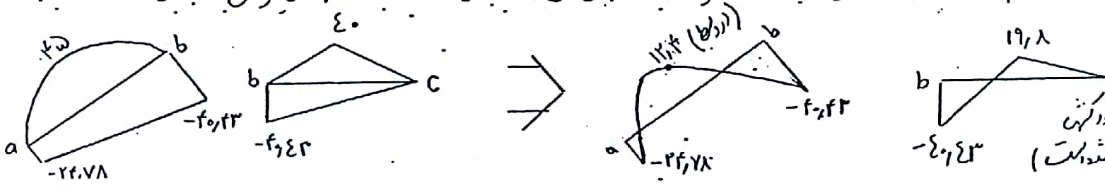
در ادامه برای محاسبه R_{cx} با لنگرگیری حول محل تلاقی ab و bc، R_{cx} به دست می‌آید.



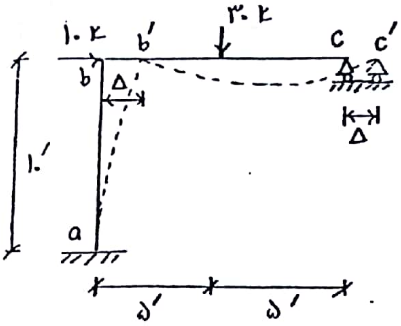
$$\Sigma M_0=0 \Rightarrow -24.78+10\times32.88-R_{cx}\times3-80\times2-40\times3\times4.5=0$$

$R_{cx}=-132\ ;$ کل سازه $\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{ab}=-39.66$

دقت شود هم عضو ab و هم bc دارای نیروی محوری است. به این معنی که در روش شیب افت نیروی محوری حذف نمی‌شود، بلکه از تغییر شکل نیروی محوری صرف نظر می‌شود.



(بدون نیاز به محاسبه واکنش دیاگرام لنگر ترسیم شده است)



مسأله ۱۵ را به روش شیب افت حل کنید. $EI = cte$

با توجه به شکل تغییر یافته سازه دارای انتقال جانبی است، مجهولات Δ ، θ_b ، θ_c می‌باشند که با نوشتن شیب افت اصلاح شده θ_c حذف خواهد شد. چون یکی از مجهولات Δ است دیگری θ پس یک معادله تعادل برش و یک معادله تعادل لنگر خواهیم نوشت.

$ab:\ EK = \frac{EI}{10} = 1 \ ;\ FEM_{ab} = FEM_{ba} = 0 \ ;\ \psi = \frac{\Delta}{10} = \psi_1$ (می‌توانیم با Δ ادامه دهیم اما بهتر است تغییر متغیر $\psi_1 = \frac{\Delta}{10}$ را برای سادگی محاسبات به کار ببریم)

$bc:\ EK = \frac{EI}{10} = 1 \ ;\ FEM_{bc} = -37.5 \ ;\ FEM_{cb} = 37.5 \ ;\ \psi = 0$

$$ab \begin{cases} M_{ab} = 2\times1(2\times0 + \theta_b - 3\psi_1) + 0 \\ M_{ba} = 2\times1(2\theta_b + 0 - 3\psi_1) + 0 \end{cases} \qquad bc:\ M^m_{bc} = 3\times1(\theta_b - 0) + (-37.5) - \frac{1}{2}(37.5) + \frac{1}{2}\times0$$

(می‌توانیم سمت راست ψ_1 را در $\frac{EI}{10}$ ضرب کنیم و در محاسبات به کار ببریم، در این صورت ψ_1 که به دست می‌آید واقعی است. در اینجا ضریب نگرفتیم پس ψ_1 نسبی به دست می‌آید)

تعادل گره b: $M_{ba} + M^m_{bc} = 0 \Rightarrow 7\theta_b - 6\psi_1 = 56.25$ (1) $\longrightarrow$ پس از حل $\Rightarrow \theta_b = 26.56 \ ;\ \psi_1 = 21.61$

معادله برش: $\Sigma M_{①} = 0 \Rightarrow V_{ab} = -\frac{M_{ab}+M_{ba}}{10}$

کل سازه $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 10 - \frac{-(M_{ab}+M_{ba})}{10} = 0$

$\Rightarrow M_{ab} + M_{ba} = -100 \Rightarrow 6\theta_b - 12\psi_1 = -100$ (2)

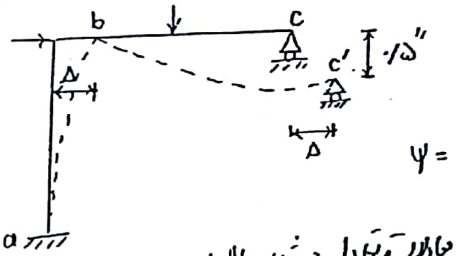
$\Rightarrow M_{ab} = -76.5$

$M_{ba} = -M_{bc} = -23.42$

همانطور که قبلاً ذکر شد در اینجا ψ_1 به صورت نسبی به دست آمده است. اگر بخواهیم مقدار واقعی را به دست آوریم خواهیم داشت: (فرض $EI = 50\times10^6\ k\text{-}in^2$)

ψ_1 واقعی $= \frac{21.61}{\frac{EI}{10}} = \frac{\Delta}{10} \Rightarrow \Delta = 1.897\ mm \quad (EI = \frac{50\times10^6}{144}\ k\text{-}ft^2) \quad (1' = 12'' ,\ 1'' = 25.4\ mm)$

* حال فرض کنیم مثل مسأله ۱۵، تکیه‌گاه c به میزان $0.5''$ به پایین نشست داشته باشد.



در این صورت تغییر یافته سازه به صورت زیر خواهد بود.

تنها تفاوت این است که برای قسمت bc خواهیم داشت: $\psi = \frac{\frac{0.5}{12}}{10} \times \frac{EI}{10} = 144.676$ (نسبی)

در معادلات شیب افت به جای ψ در قسمت bc این عدد را قرار می‌دهیم. در نهایت با نوشتن معادلات تعادل مثل بالا:

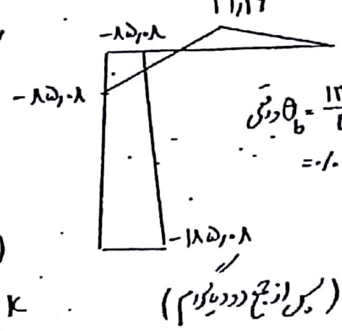
$$\begin{cases} 7\theta_b - 6\psi_1 = 490.278 \\ 6\theta_b - 12\psi_1 = -100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_b = 135.07 \\ \psi_1 = 75.87 \end{cases}$$

$\downarrow$ Δ واقعی $= 6.66\ mm$

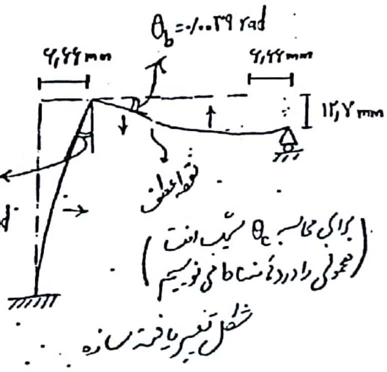
$\Rightarrow M_{ab} = -185.08$

$M_{ba} = -M_{bc} = 185.08$

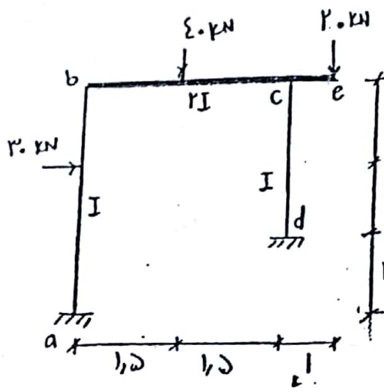
کل سازه $\Sigma M_a = 0 \Rightarrow 30\times10 + 10\times10 + (-185.08) + 10R_{cy} = 0 \Rightarrow R_{cy} = 6.49\ K$

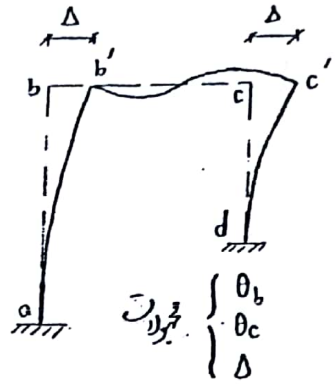


(پس از جمع دو دیاگرام)



شکل تغییر یافته سازه



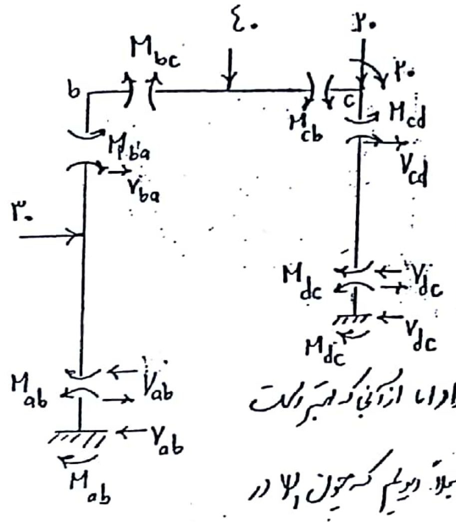


مجهولات $\begin{cases}\theta_b\\ \theta_c\\ \Delta\end{cases}$

قاب روبرو را به روش شیب افت تحلیل کنید.

با کشیدن خط چین ها، به سادگی دیده می شود سازه یک درجه آزادی انتقالی دارد و چون θ_b و θ_c نیز مجهول است، درنهایت $DKI=3$ می باشد (یک درجه آزادی انتقالی دارد و دو درجه آزادی دورانی) (در شکل متمایل تغییر یافته شماتیک سازه ترسیم شده است)

حال هر عضو را از محل گره ها برش می دهیم و برای هر یک دو معادله شیب ـ افت می نویسیم.



$ab:\; EK=\frac{EI}{5}=\frac{3EI}{15}=3\;;\; FEM_{ab}=-14.4\;;\; FEM_{ba}=21.6\;;\; \psi=\frac{\Delta}{5}=\frac{3\Delta}{15}=3\psi_1$

$bc:\; EK=\frac{2EI}{3}=\frac{10EI}{15}=10\;;\; FEM_{bc}=-15\;;\; FEM_{cb}=15\;;\; \psi=0$

$cd:\; EK=\frac{EI}{3}=\frac{5EI}{15}=5\;;\; FEM_{cd}=FEM_{dc}=0\;;\; \psi=\frac{\Delta}{3}=\frac{5\Delta}{15}=5\psi_1$

دقت شود در اینجا $\frac{EI}{15}=1$ منظور شده است. در حالت ۲ می توان با همان ۵ حالت را ادامه داد اما از آنجایی که بهتر است پارامترها بصورت کسری نباشند (تا حالت ساده تر شود) بنابراین متغیر $\psi_1=\frac{\Delta}{15}$ منظور شده است. قبلاً دیدیم که چون ψ_1 در داخل پرانتز در معادلات شیب افت قرار می گیرد $(2EK(\underline{\quad})+FEM)$ و ما به جای EK مقادیر نسبی به کار گرفته ایم بایستی ψ_1 نیز نسبی دارد شود. یعنی در $\frac{EI}{15}$ ضرب شود. در واقع اگر ψ_1 معلوم بود بایستی همین کار را می کردیم. اما در اینجا همین مقدار را به کار می بریم و بنابراین در نهایت خود ψ_1 نسبی بدست می آید. (در واقع می توانیم مثلاً $\psi_{ab}=3\psi_1\times\frac{EI}{15}$ را به کار بریم ولی میدانیم که در نهایت ψ_1 واقعی محاسبه می شود). حال معادلات شیب ـ افت نوشته می شود:

$$ab\begin{cases}M_{ab}=2\times3(2\times0+\theta_b-3(3\psi_1))-14.4\\ M_{ba}=2\times3(2\theta_b+0-3(3\psi_1))+21.6\end{cases}$$

$$bc\begin{cases}M_{bc}=2\times10(2\theta_b+\theta_c-3\times0)-15\\ M_{cb}=2\times10(2\theta_c+\theta_b-3\times0)+15\end{cases}$$

$$cd\begin{cases}M_{cd}=2\times5(2\theta_c+0-3(5\psi_1))+0\\ M_{dc}=2\times5(2\times0+\theta_c-3(5\psi_1))+0\end{cases}$$

دو معادله تعادل $\Sigma M=0$ در دو گره

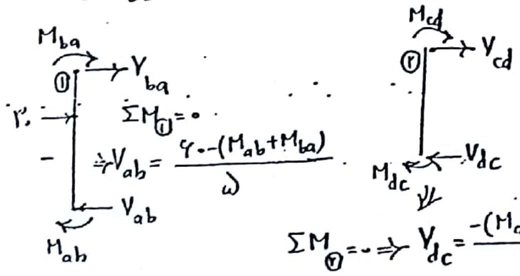
تعادل گره b : $M_{ba}+M_{bc}=0$ ①

دیگر معادله تعادل برش لازم داریم

تعادل گره c : $M_{cb}+M_{cd}-20=0$ ②

تعادل کل سازه : $\Sigma F_x=0 \Rightarrow 30-V_{ab}-V_{dc}=0$

$\Rightarrow 3M_{ab}+3M_{ba}+5M_{cd}+5M_{dc}=-270$ ③



$\Sigma M_{①}=0$

$\Rightarrow V_{ab}=\frac{60-(M_{ab}+M_{ba})}{5}$

$\Sigma M_{②}=0 \Rightarrow V_{dc}=\frac{-(M_{cd}+M_{dc})}{3}$

معادلات ① و ② تعادل گره های b و c و معادله ③ معادله تعادل کلی سازه است که به کمک برش اعضا بدست آمد. حال معادلات شیب افت را در این روابط قرار می دهیم.

$$\begin{bmatrix} 52 & 20 & -54 \\ 20 & 60 & -150 \\ -54 & -150 & 1824 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.6 \\ 5 \\ 291.6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.164 \\ 0.222 \\ 0.209 \end{Bmatrix}$$

در نهایت خواهیم داشت:

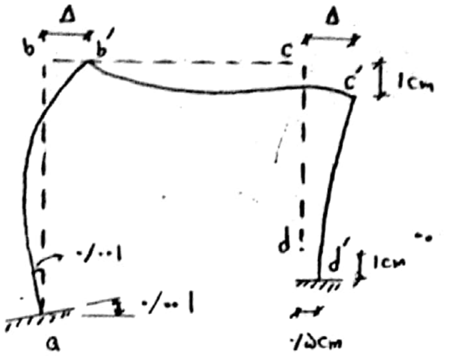
$$\Rightarrow M_{ab} = -26.7 \; ; \; M_{ba} = -M_{bc} = 8.3$$

$$M_{cb} = 28.2 \; ; \; M_{cd} = -18.2 \; ; \; M_{dc} = -24.8$$

دقت شود θ ها، ψ نسبی محاسبه شده‌اند و با بکارگیری همین اعداد در معادلات شیب افت ممان‌ها بدست می‌آیند. دقت شود دوران و جابجایی‌های واقعی (به) مقدار نسبی تبدیل شده و به همین صورت در معادلات شیب افت وارد می‌شوند اما اگر لازم باشد می‌توان مقادیر واقعی را نیز بدست آورد. مثلاً:

$$\theta_b \text{ واقعی} = \frac{-0.164}{EI/15} = \frac{-2.458}{EI} \; , \quad \psi_1 = \frac{0.209}{EI/15} = \frac{\Delta}{15} \Rightarrow \Delta \text{ واقعی} = \frac{47.12}{EI}$$

۲۵- سازه‌ی زیر فاقد بارهای وارده می‌باشد، فرض کنید تکیه‌گاه a به میزان 0.001 rad در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و تکیه‌گاه d به میزان 1cm به پایین و 0.5cm به راست جابجا شود. قاب را تحلیل نمائید. $EI = 4\times10^4 \; kN\text{-}m^2$



نشست و دوران‌های تکیه‌گاهی از آنجا که مقدار مشخصی دارند لذا به درجات نامعینی سینماتیکی اضافه نمی‌نمایند. شکل تغییر یافته سازه را به صورت شماتیک ترسیم می‌کنیم (DKI = 3). چون باری وجود ندارد کلیه FEM برابر صفر است. فقط دقت شود ψ برای عضو cd برابر $\frac{\Delta - 0.005}{3}$ می‌باشد چرا که اگر Δ از 0.005 بیشتر باشد که دوران عضو مثبت است و اگر کمتر باشد چون دوران خلاف ساعت می‌شود $-\frac{0.005-\Delta}{3}$ خواهد شد که همان قبلی است. ملاحظه می‌شود که در ψ ها هم عدد داریم و هم متغیر ψ_1. می‌توان همه را در $\frac{EI}{15}$ ضرب کرد. اما برای سادگی همواره عددها را به صورت نسبی وارد می‌کنیم (یعنی در $\frac{EI}{15}$ ضرب می‌کنیم) و بار دیگر ψ_1 را به همین صورت بکار می‌بریم تا به این ترتیب جواب به صورت نسبی محاسبه شود. دقت شود در اینجا θ_a داده شده و چون واقعی است باید نسبی شود.

$$ab: EK = 3 \; ; \; \psi = \frac{\Delta}{5} = 3\psi_1 \; ; \; \theta_a = -0.001 \times \frac{EI}{15} = -2.667 \qquad bc: EK = 10 \; ; \; \psi = \frac{0.01}{6} \times \frac{EI}{15} = 8.889$$

$$cd: EK = 5 \; ; \; \psi = \frac{\Delta - 0.005}{3} = \frac{\Delta}{3} - \frac{0.005}{3} = 5\psi_1 - \frac{0.005}{3} \times \frac{EI}{15} = 5\psi_1 - 4.444$$ (کلیه FEM=0 می‌باشد)

معادلات شیب افت دقیقاً مانند مسئله قبل نوشته می‌شود، با این تفاوت که $\theta_a = -2.667$ و ψ ها عوض شده‌اند و نیز کلیه FEM=0 می‌باشد.

۳ معادله تعادل نیز دقیقاً مشابه قبل نوشته می‌شود.

$$M_{ba} + M_{bc} = 0 \; ; \; M_{cb} + M_{cd} = 0 \; ; \; V_{ab} + V_{dc} = 0 \quad \begin{cases} V_{ab} = \frac{-(M_{ab}+M_{ba})}{5} \\ V_{dc} = \frac{-(M_{cd}+M_{dc})}{3} \end{cases}$$

با جایگذاری معادلات شیب افت در این ۳ رابطه در نهایت:

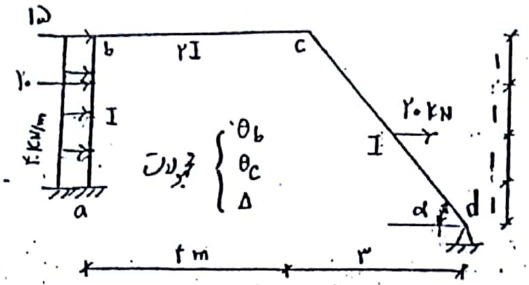
$$\begin{bmatrix} 52 & 20 & -54 \\ 20 & 60 & -150 \\ -54 & -150 & 1824 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 549.33 \\ 400 \\ 1189.33 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.312 \\ 7.404 \\ 1.537 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$M_{ab} = -59.11 \; ; \; M_{ba} = -M_{bc} = 12.77$$

$$M_{cb} = -M_{cd} = -50.92 \; , \; M_{dc} = -22.12$$

دقت شود چون سازه نامعین است، نشست‌های تکیه‌گاهی باعث ایجاد ممان شده است و با وجود آنکه EI کم انتخاب شده است باز هم مقدار ممان‌ها قابل ملاحظه است. همچنین دیده می‌شود که ماتریس سختی در این مسئله با مسئله قبل یکی است، زیرا ماتریس سختی وابسته به سازه بوده و به بار بستگی ندارد. اگر سازه هم بار داشته باشد و هم نشست، می‌توان نتایج دو مسئله را با هم جمع کرد و یا در اینجا FEM ناشی از بار را اضافه می‌کنیم. می‌توانستیم مسئله را نسبی حل نکنیم و در عوض مجهولات را اعداد نسبی [illegible]

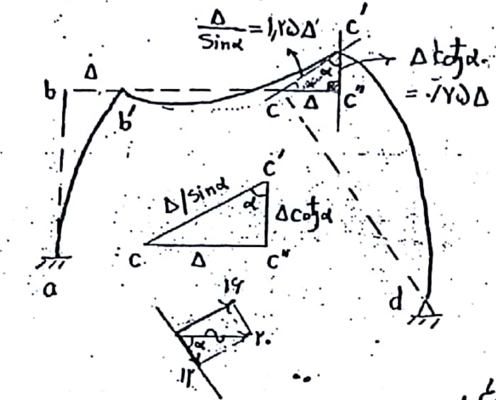
۳۶ - قاب روبرو را به روش شیب - افت تحلیل کنید.



بدیهی است قاب دارای ۳ درجه آزادی دورانی و یک درجه انتقالی است. اگر از شیب افت اصلاح شده استفاده کنیم، θ_d حذف شده و درجات آزادی دورانی ۲ تا خواهد شد. یعنی در مجموع DKI=۳

ابتدا با استفاده از خطوط چرخش ها موقعیت گره ها را یافته و شکل تغییر یافته را به صورت شماتیک ترسیم می کنیم.

$\sin\alpha = 0.8 \; ; \; \cos\alpha = 0.6$



برای محاسبه FEM در دهانه cd بایستی بار را تجزیه کنیم، بار محوری در FEM بی تاثیر است.

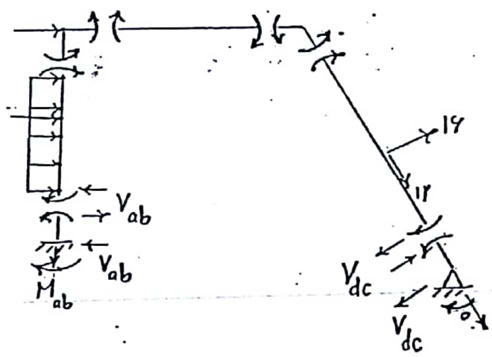
$$ab:\; EK = \frac{EI}{3} = 10 \; ; \; FEM_{ab} = -5.22 \; ; \; FEM_{ba} = 7.44 \; ; \; \psi = \frac{\Delta}{3} = \frac{16\Delta}{48} = 16\psi_1$$

$$bc:\; EK = \frac{2EI}{4} = 15 \; ; \; FEM_{bc} = FEM_{cb} = 0 \; ; \; \psi = -\frac{c'c''}{4} = -\frac{0.75\Delta}{4} = -\frac{9\Delta}{48} = -9\psi_1$$

$$cd:\; EK = \frac{EI}{5} = 6 \; ; \; FEM_{cd} = 10 \; ; \; FEM_{dc} = -10 \; ; \; \psi = \frac{cc'}{5} = \frac{1.25\Delta}{5} = \frac{12\Delta}{48} = 12\psi_1$$

دقت شود در محاسبات با $\frac{\Delta}{48} = \psi_1$ و $\frac{EI}{30} = 1$ تغییر متغیر شده است. همچنین در دهانه cd

پس از تجزیه بار، نیروی ۱۶ از باقی سر بالا است و لذا در محاسبه $\frac{Pl}{8}$، P را برابر ۱۶- قرار داده ایم.



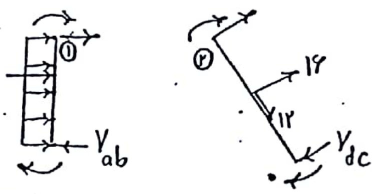
$$ab \begin{cases} M_{ab} = 2\times10\,(2\times0 + \theta_b - 3(16\psi_1)) - 5.22 \\ M_{ba} = 2\times10\,(2\theta_b + 0 - 3(16\psi_1)) + 7.44 \end{cases}$$

$$bc \begin{cases} M_{bc} = 2\times15\,(2\theta_b + \theta_c - 3(-9\psi_1)) + 0 \\ M_{cb} = 2\times15\,(2\theta_c + \theta_b - 3(-9\psi_1)) + 0 \end{cases}$$

$$cd:\; M^m_{cd} = 3\times6\,(\theta_c - 12\psi_1) + 10 - \frac{1}{2}(-10) + \frac{1}{2}\cancel{M_{dc}}$$

در معادلات تعادل گرهی در گره های b و c به صورت زیر است:

$$15 \rightarrow b:\; M_{ba} + M_{bc} = 0 \;\; ① \quad ; \quad c:\; M_{cb} + M^m_{cd} = 0 \;\; ②$$



برای معادله مربوط به Δ بایستی برش های V_{ab} و V_{dc} محاسبه شوند:

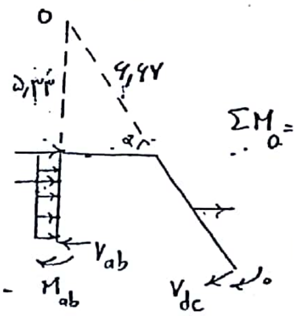
$$\Sigma M_{②} = 0 \Rightarrow V_{dc} = \frac{40 - M_{cd}}{5}$$

$$\Sigma M_{①} = 0$$

$$V_{ab} = \frac{28 - (M_{ab} + M_{ba})}{3}$$

اگر بخواهیم مستقیم از معادله $\Sigma F_x = 0$ برای کل سازه استفاده کنیم، بایستی نیروی محوری cd را نیز حساب کنیم زیرا در راستای افقی گره d وارد می شود. (در حالت قبل نیز نیروی محوری در ab و cd وجود دارد اما در $\Sigma F_x = 0$ کل سازه وارد نمی شود)

برای حذف این نیروها به جای معادله تعادل $\Sigma F_x = 0$، معادله تعادل $\Sigma M_o = 0$ را برای کل سازه به کار می بریم.

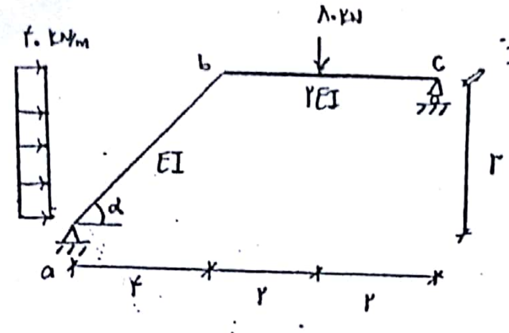


$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow 8.33\,V_{ab} + M_{ab} + 11.67\,V_{dc} - 15\times5.33 - 10\times6.33 - 4\times3\,(5.33+1.5) - 20\times7.33 = 0 \quad ③$$

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 30 & -150 \\ 30 & 78 & 594 \\ -146.6 & -42 & 483.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.44 \\ -10 \\ 247.1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.199 \\ -0.658 \\ 0.051 \end{Bmatrix}$$

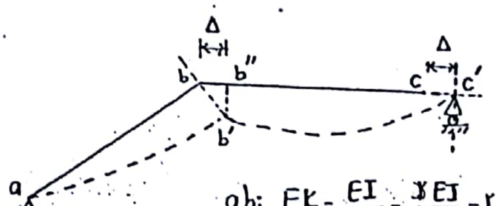
(به جای V_{ab} و V_{dc} برحسب لنگرها قرار می دهیم)

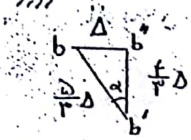
$$\Rightarrow M_{ab} = -50.2 \; ; \; M_{ba} = -M_{bc} = -32.56 \; ; \; M_{cb} = -M_{cd} = 7.85$$



به کمک معادلات شیب افت جابجایی، جابجایی افقی c و شیب a را در مسأله ۱۳ بدست آورید.

دقت شود سازه معین است! یعنی اگر هدف از معادلات شیب افت و تحلیل سازه نامعین بپردازیم، نیازی به استفاده از آنها نخواهیم داشت. اما نکته این است که هدف یافتن جابجایی ها است، چرا که روش سختی منجر به محاسبه جابجایی ها خواهد شد وگرنه تحلیل سازه با استاتیک قابل انجام است.





ab: $EK=\frac{EI}{5}=\frac{2EI}{10}=2$; $FEM_{ab}=-30$; $FEM_{ba}=30$; $\psi=\frac{bb'}{5}=\frac{\Delta}{3}=\psi_1$

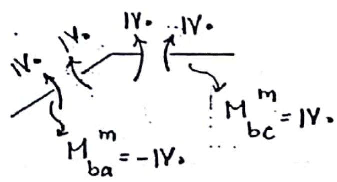
bc: $EK=\frac{2EI}{4}=\frac{5EI}{10}=5$; $FEM_{bc}=-40$; $FEM_{cb}=40$; $\psi=\frac{-b'b''}{4}=-\frac{\Delta}{3}=-\psi_1$

(فرض $\frac{EI}{10}=1$, $\frac{\Delta}{3}=\psi_1$)

با توجه به مفصل بودن حال در a و c مجهولات θ_b و Δ می باشند:

ab: $M^m_{ba}=3\times2(\theta_b-\psi_1)+30-\frac{1}{2}(-30)+\frac{1}{2}\times0$ bc: $M^m_{bc}=3\times5(\theta_b-(-\psi_1))+(-40)-\frac{1}{2}\times40+\frac{1}{2}\times0$

تفاوت در اینجا با روش شیب افت این است که چون سازه معین است M^m_{ba} و M^m_{bc} از اول مشخص است. چون که به کمک استاتیک سه رابطه حل کنیم $C_y=82.5$ و $M_b=170$ بدست می آید. نقطه دقت شود این حالت استاتیکی است و برای استفاده در روش سختی خواهیم داشت:



$$\begin{cases}6\theta_b-6\psi_1+45=-170\\15\theta_b+15\psi_1-60=170\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_b=-10.25\\\psi_1=25.5833\end{cases}$$

که همه دانسته می باشند. برای محاسبه θ_a می توانستیم از اول برای ab از شیب افت اصلاح شده استفاده نکنیم تا θ_a نیز بدست آید. اما در آن صورت به ۳ معادله و ۳ مجهول می رسیدیم. به جای این کار بهتر است پس از محاسبه θ_b و ψ_1 شیب افت عمومی را در دهانه ab به کار ببریم.

$$M_{ab}=0=2\times2(2\theta_a+\overset{-10.25}{\theta_b}-3\overset{25.5833}{\psi_1})-30\Rightarrow\theta_a=47.25$$

مقادیر واقعی: $\theta_a=\frac{47.25}{EI/10}=\frac{472.5}{EI}$; $\theta_b=\frac{-10.25}{EI/10}=\frac{-102.5}{EI}$; $\psi_1=\frac{25.5833}{EI/10}=\frac{\Delta}{3}\Rightarrow\Delta=\frac{767.5}{EI}$

دقت شود در اینجا چون θ_a مثبت است دوران آن ساعتگرد و دوران گره b خلاف ساعت است...

* تمرین: مسأله ۳۲ را با فرض تکیه گاه غلتکی در c حل کنید.