بسمه تعالی

پاسخ تشریحی سؤالات درس سیگنال آزمون دکتری ۱۴۰۰

محمدی تقدسی

۳۶- رابطهٔ ورودی $x(n)$ یک سیستم با خروجی $y[n]$ آن، به‌صورت زیر است.

$$y[n]=ny[n-1]+x(n)$$

گزینهٔ صحیح در مورد این سیستم کدام است؟

۱) ناپایدار و معکوس‌پذیر است. ✓

۲) پایدار و معکوس‌ناپذیر است.

۳) پایدار و معکوس‌پذیر است.

۴) ناپایدار و معکوس‌ناپذیر است.

بررسی وارون پذیری:

$$x(n)=y(n)-ny(n-1)$$ ✓

بررسی پایداری:

$$x(n)=A \longrightarrow y(n)=ny(n-1)+A \xrightarrow{n\to\infty} y(\infty)\to\infty$$

البته اگر بخواهیم با وسواس بیشتری بررسی کنیم می‌توانیم به صورت زیر عمل نماییم:

$$y(0)=x(0),\quad y(1)=x(0)+x(1),\quad y(2)=2(x(0)+x(1))+x(2),$$

$$y(3)=3\left[2(x(0)+x(1))+x(2)\right]+x(3),\quad \cdots$$

مشخص است که با فرض ورودی محدود، خروجی در لحظات $n\to\infty$ به بی‌نهایت میل می‌کند.

۳۷- فرض کنید S یک سیستم معکوس‌پذیر و T معکوس آن باشد. در مورد S و T گزینهٔ صحیح کدام است؟

۱) اگر S علّی باشد، T نیز علّی است.

۲) گر S پایدار باشد، T نیز پایدار است.

۳) گر S بدون حافظه باشد، T نیز بدون حافظه است. ✓

۴) همهٔ موارد

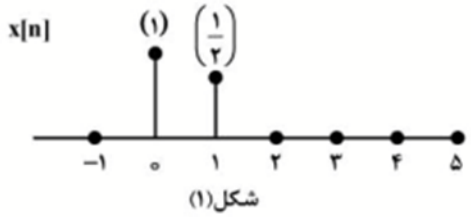
بررسی گزینه ۱: اگر خروجی در لحظات گذشته بستگی داشته باشد، ورودی در لحظات آینده خواهد داشت، پس سیستم وارون لزوماً علی نیست. مثلاً سیستم $y(t)=x(t-1)$ را در نظر بگیرید.

بررسی گزینه ۲: ممکن است سیستم پایدار مذکور، ورودی نامحدود، پاسخ محدود دهد. بنابراین خروجی محدود، ورودی نامحدود است. پس سیستم وارون لزوماً پایدار نیست. مثلاً سیستم $y(t)=\frac{1}{t^2+1}x(t)$ را در نظر بگیرید.

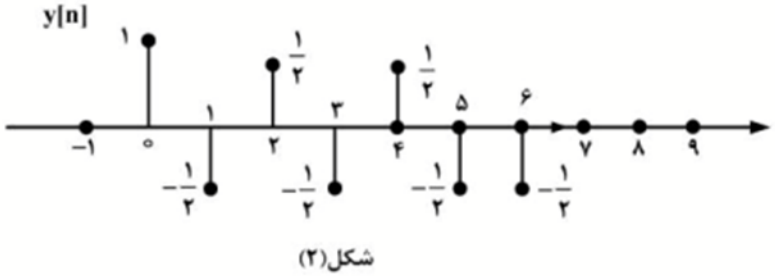
بررسی گزینه ۳: در یک سیستم وارون پذیر بدون حافظه، ورودی هر لحظه خروجی همان لحظه مشخص می‌کند پس ورودی هر لحظه خروجی همان لحظه مانده است. پس سیستم وارون نیز بدون حافظه است.

۳۸- در یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان علّی پاسخ سیستم به ورودی $x(n)$ (شکل ۱)، $y(n)$ است(شکل ۲).

اگر $h[n]$ پاسخ ضربهٔ این سیستم باشد، مقدار $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)|^2$ ، کدام است؟



شکل(۱)



شکل(۲)

۱) ۳

۲) ۶ ✓

۳) $\frac{19}{2}$

۴) $\frac{23}{2}$

روش اول (نقطه گذاری - روش رونتن) :

$x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$

$\Rightarrow y(n) = x(n) * h(n) = h(n) + \frac{1}{2}h(n-1)$

سیستم علی است، پس $n<0$ و $h(n)=0$ داریم :

$n=0$: $\underbrace{y(0)}_{1} = \underbrace{h(0)}_{\beta=1} + \frac{1}{2}\underbrace{h(-1)}_{0}$

$n=1$: $\underbrace{y(1)}_{\frac{1}{2}} = \underbrace{h(1)}_{\beta=-1} + \frac{1}{2}\underbrace{h(0)}_{1}$

$n=2$: $\underbrace{y(2)}_{\frac{1}{2}} = \underbrace{h(2)}_{\beta=1} + \frac{1}{2}\underbrace{h(1)}_{-1}$

$n=3$: $\underbrace{y(3)}_{\frac{-1}{2}} = \underbrace{h(3)}_{\beta=-1} + \frac{1}{2}\underbrace{h(2)}_{1}$

$n=4$: $\underbrace{y(4)}_{\frac{1}{2}} = \underbrace{h(4)}_{\beta=1} + \frac{1}{2}\underbrace{h(3)}_{-1}$

$n=5$: $\underbrace{y(5)}_{\frac{-1}{2}} = \underbrace{h(5)}_{\beta=-1} + \frac{1}{2}\underbrace{h(4)}_{1}$

$n=6$: $\underbrace{y(6)}_{\frac{-1}{2}} = \underbrace{h(6)}_{\beta=0} + \frac{1}{2}\underbrace{h(5)}_{-1}$

با بقیه‌ی مقادیر n هم نیز مشخص است که $h(n)$ صفر می‌شود یا داریم :

$\sum_n |h(n)|^2 = 4$

روش دوم (حدس از روابط سیستم) : با کمی دقت مشخص است که :

$y(n) = x(n) - x(n-1) + x(n-2) - x(n-3) + x(n-4) - x(n-5)$

$\Rightarrow h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-2) - \delta(n-3) + \delta(n-4) - \delta(n-5)$

$\Rightarrow \sum_n |h(n)|^2 = 4$

۳۹- مقدار $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2n\pi)$، برابر با کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn2\pi t}$

۲) $\sum_{n=\infty}^{\infty}e^{jn2\pi t}$

۳) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jnt}$

۴) ✓ $\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jnt}$

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2\pi n) \xrightarrow{FS} a_k=\frac{1}{2\pi} \Rightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{jkt}$

$T=2\pi \longrightarrow \omega_0=1$

۴۰- $x(t)$ سیگنال زمان پیوستهٔ متناوب با پریود T و ضرایب فوریهٔ a_k است. اگر ضرایب سیگنال $y(t)=x(t)-x(3t)$ را، b_k بنامیم، در مورد آن گزینهٔ صحیح کدام است؟

۱) ✓ $b_3=a_3-a_1\ ,\ b_2=a_2$

۲) $b_3=a_3-a_2\ ,\ b_2=a_2-a_1$

۳) $b_3=a_3\ ,\ b_2=a_2-a_1$

۴) $b_3=a_3-a_2\ ,\ b_2=a_2$

✍ این تست از مبحث جمله دوم (مثل ۶ جزوه ۲ فصل ۱۲ کتاب) آموزش است.

$y(t)=x(t)-x(2t)$

$x(t)$: $a(k),T$ — $x(2t)$: $a(k),\frac{T}{2}$ — $x(3t)$: $a_{(3)}(k),T$

$T_y=lcm(T,\frac{T}{2})=T$

$\Rightarrow b(k)=a(k)-a_{(3)}(k) \Rightarrow \begin{cases} b(2)=a(2)-a_{(3)}(2)=0 \\ b(3)=a(3)-a_{(3)}(3)=a(3)-a(1) \end{cases}$

۴۱- پاسخ فرکانس یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت $H(e^{j\omega})=\frac{6-10e^{-j\omega}}{6\cos(\omega)-10}$ است. کدام گزینه در مورد سیستم صادق است؟

۱) علّی و وارون پذیر

۲) غیرعلّی و وارون پذیر

۳) ✓ غیرعلّی و وارون‌ناپذیر

۴) علّی و وارون‌ناپذیر

$e^{j\omega}=z \longrightarrow H(z)=\frac{2-10z^{-1}}{2z+2z^{-1}-10}=\frac{2z-\frac{10}{2}}{z^2-\frac{10}{2}z+1}=\frac{2(z-\frac{5}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}$, $\frac{1}{2}<|z|<2$ → زیرا تبدیل فوریه آن وجود دارد و باید دایره یکه در ROC باشد.

چون $z=\infty$ در ROC قرار ندارد پس سیستم غیرعلی است. همچنین چون $z=\frac{1}{2}$ (صفر تابع) در ROC قرار دارد، پس سیستم وارون ناپذیر است.

۴۲- ناحیهٔ همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=\left[\frac{d^2}{dt^2}(te^{-3t}u(t))\right]*e^{-2|2t-1|}$، کدام است؟ (* نماد کانولوشن است)

۱) $-4<\mathrm{Re}[s]<4$

۲) $-3<\mathrm{Re}[s]<2$

۳) ✓ $-3<\mathrm{Re}[s]<4$

۴) $-2<\mathrm{Re}[s]<2$

$\left[te^{-2t}u(t)\right]^{''}$ سیگنال مرتبه ۲ $\xrightarrow{\text{قطب } s=-2}$ $\mathrm{Re}(s)>-2$

$e^{-4|t-\frac{1}{2}|}$ سیگنال دوطرفه $\xrightarrow{\text{قطب } s=\pm 4}$ $-4<\mathrm{Re}(s)<4$

ناحیه همگرایی کل برابر اشتراک دو ناحیه فوق می‌باشد که معادل گزینه ۳ است.

۴۳- تابع تبدیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان و علّی به صورت $H(s)=\frac{s^2+5s+6}{(s+1)^2}$ است. اگر $y(t)$ پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=e^tu(t)$ باشد، مقدار $y(0^+)$ ، کدام است؟

۱) ۰

۲) ✓ ۱

۳) $\frac{3}{2}$

۴) ۲

$Y(s)=H(s).X(s)=\frac{s^2+5s+6}{(s+1)^2(s-1)} \Rightarrow y(0^+)=\lim_{s\to+\infty} sY(s)=1$

۴۴- تابع تبدیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان و علّی به صورت $H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ است. اگر ورودی این سیستم سیگنال $x(n)=n3^{-n}u(n)$ باشد و خروجی آن را با $y[n]$ نمایش دهیم، مقدار $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n+1}y[n]$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$

۲) $-\frac{1}{8}$

۳) ✓ $\frac{1}{8}$

۴) $\frac{3}{2}$

$A=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n+1}y(n)=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(n)(-1)^{-n}=-Y(z)\Big|_{z=-1}$

$Y(z)=X(z).H(z)=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$, $|z|>\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{1}{8}$

۴۵- سیستم LTI زمان گسسته با پاسخ ضربهٔ $h(n)=\delta[n]-\frac{\sin(\frac{8\pi}{3}n)}{\pi n}$، فیلتر ایدئال با کدام مشخصات است؟

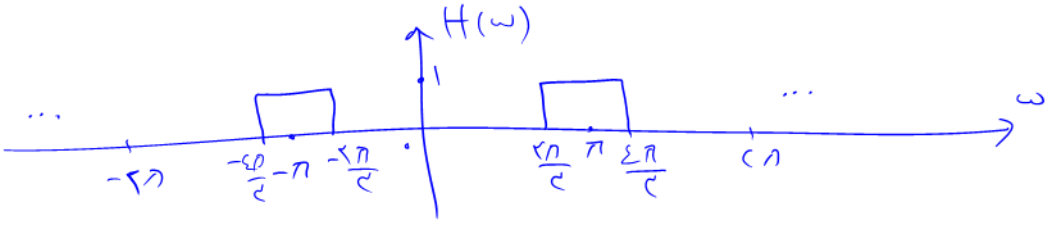
۱) میان‌گذر ایدئال با فرکانس‌های قطع $\frac{3\pi}{8}$ ، $\frac{6\pi}{8}$

۲) میان‌گذر ایدئال با فرکانس‌های قطع $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$

۳) بالاگذر ایدئال با فرکانس‌های قطع $\frac{\pi}{3}$

۴) ✓ بالاگذر ایدئال با فرکانس‌های قطع $\frac{2\pi}{3}$

$h(n)=\delta(n)-\frac{\sin(\frac{8\pi}{3}n-2\pi n)}{\pi n}=\delta(n)-\frac{\sin\frac{2\pi}{3}n}{\pi n} \Rightarrow H(\omega)=1-\widetilde{\Pi}(\frac{\omega}{4\pi/3})$



البته این سؤال یک ایراد ظریفی دارد که بعید است طراح به آن فکر کرده باشد. مقدار $\frac{\sin\frac{8\pi}{3}n}{\pi n}$ در $n=0$ بنا بر قرارداد نوشتاری، برابر حد آن یعنی $\frac{8}{3}$ می‌باشد، لذا طراح آن را برابر حد $\frac{\sin\frac{2\pi}{3}n}{\pi n}$ یعنی $\frac{2}{3}$ در نظر گرفته است. در واقع می‌باشد که در این صورت پاسخ درست گزینه ها نیست. $h(n)=\delta(n)-\frac{\sin\frac{2\pi}{3}n}{\pi n}-2\delta(n)=-\delta(n)-\frac{\sin\frac{2\pi}{3}n}{\pi n}$