روشهای بنیادی انتگرالگیری

۱ــ ٤ انتگرالگیری و روش تعمیم

در انتگرالگیری مستقیم، از جدول انتگرالها که شامل دستورهای اساسی انتگرالگیری است استفاده می کنیم :

(1) $\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1);$

(2) $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C;$

(3) $\int a^u\,du=\frac{1}{\ln a}a^u+C; \qquad \int e^u\,du=e^u+C;$

(4) $\int \cos u\,du=\sin u+C; \qquad \int \sin u\,du=-\cos u+C;$

(5) $\int \cosh u\,du=\sinh u+C; \qquad \int \sinh u\,du=\cosh u+C;$

(6) $\int \frac{du}{\cos^2 u}=\tan u+C; \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u}=-\cot u+C;$

(7) $\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{u}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cot}\frac{u}{a}+C_1 \quad (a>0);$

(8) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\operatorname{arc\,sin}\frac{u}{a}+C=-\operatorname{arc\,cos}\frac{u}{a}+C_1 \quad (a>0);$

(9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left(u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right)+C;$

(10) $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$

در این دستورها u یا متغیر مستقل است و یا تابعی مشتقپذیر از متغیر مستقل دیگری است.

اگر

$$\int f(u)\,du=F(u)+C,$$

آنگاه

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

خاصیت خطی بودن انتگرالها به صورت زیر تعمیم پیدا می کند:

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i(x)\,dx \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| > 0\right).$$

۱ ـ ۱ ـ ٤ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

حل

$$I = \int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{3/2}+5x^{1/2}-x^{-1/2})\,dx =$$
$$= \int x^{3/2}\,dx + 5\int x^{1/2}\,dx - \int x^{-1/2}\,dx =$$
$$= \frac{2x^{5/2}}{5} + C_1 + \frac{5\cdot 2}{3}x^{3/2} + C_2 - 2x^{1/2} + C_3 =$$
$$= 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5x}{3}-1\right)+C.$$

تذکر. لازم نیست که در محاسبهٔ هر انتگرال یک مقدار ثابت به جواب آن اضافه کنیم (همان طوری که در مثال بالا دیدیم) چون مجموع چند مقدار ثابت، یک مقدار ثابت است. لذا فقط یک مقدار ثابت بعد از حل آخرین انتگرال به جواب اضافه می کنیم.

۲ ـ ۱ ـ ٤

$$I = \int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}\,dx.$$

جواب:

$$I = x^3+x^2+0.5\ln|2x-1|+C.$$

۳ ـ ۱ ـ ٤

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

حل. انتگران را به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

پس

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x-\cot x+C.$$

۴ـ۱ـ۴

$$I=\int \tan^2 x\,dx.$$

حل. چون $\tan^2 x=\sec^2 x-1$ ، بنابراین

$$I=\int \tan^2 x\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\tan x-x+C.$$

۴ـ۱ـ۵

$$I=\int (x^2+5)^3\,dx.$$

حل. انتگران را با استفاده از دستور دو جمله‌ای، بسط می دهیم

$$I=\int (x^6+15x^4+75x^2+125)\,dx=\frac{x^7}{7}+\frac{15x^5}{5}+\frac{75x^3}{3}+125x+C.$$

۴ـ۱ـ۶

$$I=\int (3x+5)^{17}\,dx.$$

حل. چون $u=3x+5$ تابعی خطی است، پس معقول نیست که از بسط دو جمله‌ای استفاده کنیم و آن را به قوهٔ ۱۷ برسانیم. با توجه به جدول انتگرالها داریم:

$$\int u^{17}\,du=\frac{u^{18}}{18}+C,$$

از آنجا

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+5)^{18}}{18}+C.$$

۴ـ۱ـ۷

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$$

جواب:

$$I=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

۴ـ۱ـ۸

$$I=\int \cos(\pi x+1)\,dx.$$

حل. با توجه به فرمول (۴) از جدول انتگرالها، داریم

$$\int \cos u\,du=\sin u+C,$$

پس

$$I=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x+1)+C.$$

۴ـ۱ـ۹

$$I=\int \cos 4x \cos 7x\, dx.$$

حل . توصیه می شود در حل چنین انتگرالهایی از دستورهای مثلثاتی استفاده گردد.

$$\cos 4x \cos 7x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos 11x)$$

بنابر این

$$I=\frac{1}{2}\int \cos 3x\, dx+\frac{1}{2}\int \cos 11x\, dx=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C.$$

تذکر. در حل چنین انتگرالهایی از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده می کنیم

$$\sin mx \cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x];$$
$$\sin mx \sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x];$$
$$\cos mx \cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x].$$

۴ـ۱ـ۱۰

$$I=\int \cos x \cos 2x \cos 5x\, dx.$$

حل .داریم

$$(\cos x \cos 2x)\cos 5x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)\cos 5x=$$
$$=\frac{1}{4}[\cos 4x+\cos 6x]+\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 8x).$$

از آنجا

$$I=\frac{1}{4}\left[\int \cos 2x\, dx+\int \cos 4x\, dx+\int \cos 6x\, dx+\int \cos 8x\, dx\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{32}\sin 8x+C.$$

۴ـ۱ـ۱۱

$$I=\int \sin^2 3x\, dx.$$

حل . چون

$$\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2},$$

بنابر این

$$I=\frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)\, dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$$

۴ــ۱ــ۱۲

$$I=\int \cosh^2(8x+5)\,dx.$$

حـــل . چـــون

$$\cosh^2 u=\frac{\cosh 2u+1}{2},$$

پس

$$I=\frac{1}{2}\int[1+\cosh(16x+10)]\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{32}\sinh(16x+10)+C.$$

۴ــ۱ــ۱۳

$$I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

حـــل .

$$I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\arctan(x+2)+C.$$

۴ــ۱ــ۱۴

$$I=\int\frac{dx}{4x^2+25}.$$

جواب: $I=\frac{1}{10}\arctan\frac{2x}{5}+C.$

۴ــ۱ــ۱۵ $I=\int\frac{dx}{x^2+x+1}.$

جواب : $I=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

۴ــ۱ــ۱۶

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

حل .

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{4/9-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$$

۴ــ۱ــ۱۷

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}.$$

حل .

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

۴ــ۱ــ۱۸

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}.$$

جواب : $I=\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+1}\right|+C.$

۴ــ۱ــ۱۹

$$I=\int\frac{dx}{4-x^2-4x}.$$

حل .

$$I=\int\frac{dx}{4-x^2-4x}=\int\frac{dx}{8-(x+2)^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}+x+2}{2\sqrt{2}-(x+2)}\right|+C.$$

۴ـ۱ـ۲۰

$$I=\int\frac{dx}{10x^2-7}.$$

جواب: $I=\frac{1}{2\sqrt{70}}\ln\left|\frac{\sqrt{10}x-\sqrt{7}}{\sqrt{10}x+\sqrt{7}}\right|+C.$

۴ـ۱ـ۲۱ انتگرالهای زیر را حساب کنید

$$\text{(a)}\int\frac{dx}{x^2-6x+13};\qquad \text{(b)}\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$$

$$\text{(c)}\int\frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x}dx;\qquad \text{(d)}\int\frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$$

جواب :

(a) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2}+C$; (b) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x}+C$; (c) $3\tan x+$ $+2\cot x+C$; (d) $-\frac{2}{x}+\arctan x+C.$

۴ـ۱ـ۲۲ انتگرالهای زیر را حساب کنید :

$$\text{(a)}\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx;\qquad \text{(b)}\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx;$$

$$\text{(c)}\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx;\qquad \text{(d)}\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)\,dx.$$

جواب :

(a) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arcsin x+C$; (b) $\sin x-\cos x+C$;
(c) $-\frac{2}{\ln 5}5^{-x}+\frac{1}{5\ln 2}2^{-x}+C$; (d) $-0.2\cos 5x-x\sin 5\alpha+C.$

۴ـ۱ـ۲۳ انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید :

1. $\int 5a^2x^6dx.$ جواب : $\frac{5}{7}a^2x^7$
2. $\int(6x^2+8x+3)\,dx.$ 〃 $2x^3+4x^2+3x.$
3. $\int x(x+a)(x+b)\,dx.$ 〃 $\frac{x^4}{4}+\frac{(a+b)x^3}{3}+\frac{abx^2}{2}.$
4. $\int(a+bx^3)^2\,dx.$ 〃 $a^2x+\frac{abx^4}{2}+\frac{b^2x^7}{7}.$
5. $\int\sqrt{2px}\,dx.$ 〃 $\frac{2x}{3}\sqrt{2px}.$
6. $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$ 〃 $\frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}.$
7. $\int(nx)^{\frac{1-n}{n}}dx.$ 〃 $\sqrt[n]{nx}.$

8. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$ **جواب:** $a^2x - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}.$

9. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx.$ 〃 $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x.$

10. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$ 〃 $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x}.$

11. $\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}dx.$ 〃 $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1} - \frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}.$

12. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}dx.$ 〃 $2a\sqrt{ax} - 4ax + 4x\sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2x^3}{5\sqrt{ax}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+7}.$ 〃 $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arc\ tan} \frac{x}{\sqrt{7}}$

14. $\int \frac{dx}{x^2-10}.$ 〃 $\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ 〃 $\ln(x+\sqrt{4+x^2}).$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}.$ 〃 $\operatorname{arc\ sin} \frac{x}{2\sqrt{2}}$

17. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx.$ 〃 $\operatorname{arc\ sin} \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x+\sqrt{x^2+2}).$

18 . a) $\int \tan^2 x\, dx;$ 〃 a) $\tan x - x.$

راهنمائی — فرض کنید $\tan^2 x = \sec^2 x - 1;$

b) $\int \tanh^2 x\, dx.$ **جواب:** b) $x - \tanh x.$

راهنمائی — فرض کنید $\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x}$

19. a) $\int \cot^2 x\, dx;$ **جواب:** a) $-\cot x - x;$

b) $\int \coth^2 x\, dx.$ b) $x - \coth x.$

20. $\int 3^x e^x dx.$ 〃 $\frac{(3e)^x}{\ln 3+1}.$

۲ـ٤ انتگرالگیری بکمک تغییر متغیر

در حل انتگرالها با روش تغییر متغیر، به جای x تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $\varphi(t)$ را قرار می دهیم، یعنی

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

بعد از حل، براساس تابع معکوس، بجای t نسبت به x قرار می‌دهیم، یعنی

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

از فرمول فوق به صورت زیر هم، می‌توان استفاده کرد:

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx,$$

که در آن $x = \varphi(t)$

۱ــ۲ــ٤ $I = \int x\sqrt{x-5}\,dx.$

حل . تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$\sqrt{x-5} = t.$$

از آنجا

$$x-5 = t^2,\quad x = t^2+5,\quad dx = 2t\,dt.$$

انتگرال به صورت زیر در می آید

$$I = \int (t^2+5)\,t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+5t^2)\,dt = 2\,\frac{t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C.$$

به جای t نسبت به x ، مقدار می گذاریم

$$I = \frac{2\,(x-5)^{5/2}}{5} + \frac{10\,(x-5)^{3/2}}{3} + C.$$

۲ــ۲ــ٤ $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$

حل . با توجه به تغییر متغیر $1+e^x = t$ داریم:

$$e^x = t-1,\ x = \ln(t-1),\quad dx = dt/(t-1)$$

این مقادیر را در انتگرال قرار می‌دهیم

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dt}{t(t-1)}$$

چون

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t},$$

نابراین

$$I = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C.$$

با توجه به رابطهٔ بین t و x داریم:

$$I=\ln \frac{e^x}{1+e^x}+C=x-\ln(1+e^x)+C.$$

توجه . این انتگرال را می توان به صورت زیر، با ضرب صورت و مخرج به e^{-x} حل کرد:

$$\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\ln(e^{-x}+1)+C=$$
$$=-\ln \frac{e^x+1}{e^x}=x-\ln(e^x+1)+C.$$

۳ـ۲ـ۴

$$I=\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}\,dx.$$

جواب : $I=\frac{1}{12}\sqrt{(2x-5)^3}+\frac{5}{2}\sqrt{2x-5}-\frac{37}{4\sqrt{2x-5}}+C.$

۴ـ۲ـ۴

$$I=\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^4+3x^2+1)\arctan \frac{x^2+1}{x}}.$$

حل . انتگران را به صورت زیر تغییر شکل می دهیم:

$$I=\int \frac{(1-1/x^2)\,dx}{[(x+1/x)^2+1]\arctan(x+1/x)}.$$

و با توجه به تغییر متغیر $x+\frac{1}{x}=t$ داریم

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$$

از آنجا

$$I=\int \frac{dt}{(t^2+1)\arctan t}$$

دوباره تغییر متغیر $\arctan t=u$ را بکار می بریم، بنابراین

$$\frac{dt}{t^2+1}=du$$

و

$$I=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$$

جواب را نخست نسبت به t و پس از آن نسبت به x می نویسیم:

$$I=\ln|\arctan t|+C=\ln\left|\arctan\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|+C.$$

۵ـ۲ـ۴

$$I=\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx$$

حل . به صورت زیر عمل می کنیم :

$$x=\frac{1}{t};\quad dx=-\frac{dt}{t^2}.$$

پس

$$I=-\int\frac{\sqrt{a^2-1/t^2}}{(1/t^4)\,t^2}\,dt=-\int t\sqrt{a^2t^2-1}\,dt.$$

دوباره از تغییر متغیر استفاده می کنیم :

$$\sqrt{a^2t^2-1}=z.\quad ،\quad 2a^2t\,dt=2z\,dz$$

و

$$I=-\frac{1}{a^2}\int z^2\,dz=-\frac{1}{3a^2}z^3+C.$$

وبالاخره

$$I=-\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3a^2x^3}+C.$$

۶ــ۲ــ٤

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}.$$

حل .

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}\tan^2 x+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$$

با توجه به تغییر متغیر

$$\frac{a}{b}\tan x=t;\quad dt=\frac{a}{b}\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

داریم

$$I=\frac{1}{ab}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{ab}\arctan t+C.$$

حال جواب را نسبت به x می نویسیم :

$$I=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.$$

۷ــ۲ــ٤

$$I=\int\sqrt[3]{1+3\sin x}\cos x\,dx.$$

حل . تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم :

$$1+3\sin x=t.\ 3\cos x\,dx=dt$$

از آنجا

$$I=\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{3}\int t^{1/3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}t^{4/3}+C=\frac{(1+3\sin x)^{4/3}}{4}+C$$

۸ــ۲ــ٤

$$I=\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

جواب: $I=-2\sqrt{\cos x}+C.$

۹ــ۲ــ٤ $I=\int\frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$

حل . به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\arccos x=t;\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt.$$

پس

$$I=-\int\frac{dt}{t^5}=-\int t^{-5}\,dt=\frac{1}{4}t^{-4}+C=\frac{1}{4\arccos^4 x}+C.$$

۱۰ــ۲ــ٤ $I=\int\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx$ **جواب:** $I=\frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}}+C.$

۱۱ــ۲ــ٤ $I=\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$

حل . با توجه به تغییر متغیر $1+\sin^2 x=t$ داریم :

$$2\sin x\cos x\,dx=\sin 2x\,dx=dt.$$

$$I=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln(1+\sin^2 x)+C.$$

۱۲ــ۲ــ٤ $I=\int\frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx$

حل . فرض می کنیم

$$3+x\ln x=t,$$

از آنجا داریم :

$$(1+\ln x)\,dx=dt$$

$$I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|3+x\ln x|+C.$$

۱۳ــ۲ــ٤ . انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید :

(a) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$; (b) $\int\frac{dx}{x\ln x}$;

(c) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$; (d) $\int\frac{x^{n-1}}{x^{2n}+a^2}dx$;

(e) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; (f) $\int\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$.

جواب

(a) $0.75\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$; (b) $\ln|\ln x|+C$; (c) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$;

(d) $\frac{1}{na}\arctan\frac{x^n}{a}+C$; (e) $-2\cos\sqrt{x}+C$; (f) $\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln|\ln x|+C$.

۱۴ـ۲ـ۴ . انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید :

(a) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx$; (b) $\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(c) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\, dx$; (d) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

جواب

(a) $-\frac{3}{140}(35-40x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+C$;

(b) $\frac{2}{3}(\ln x-5)\sqrt{1+\ln x}+C$;

(c) $\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$;

(d) $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C$.

۱۵ـ۲ـ۴ انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید :

1 . $\int \frac{a\,dx}{a-x}$. **جواب:** $a \ln\left|\frac{c}{a-x}\right|$

حل ــ

$$\int \frac{a}{a-x} dx = -a\int \frac{d(a-x)}{a-x} = -a \ln|a-x| + a\ln c = a\ln\left|\frac{c}{a-x}\right|.$$

2 . $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$. **جواب:** $x+\ln|2x+1|$.

حل ــ $\frac{2x+3}{2x+1} = 1+\frac{2}{2x+1}$.

از آنجا

$$\int \frac{2x+3}{2x+1} dx = \int dx + \int \frac{2\,dx}{2x+1} = x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x+\ln|2x+1|.$$

3. $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx$. **جواب:** $-\frac{3}{2}x+\frac{11}{4}\ln|3+2x|$.

4. $\int \frac{x\,dx}{a+bx}$. 〃 $\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}\ln|a+bx|$.

5. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta} dx$. 〃 $\frac{a}{\alpha}x+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2}\ln|\alpha x+\beta|$.

6. $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$. 〃 $\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|$.

7. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx$. 〃 $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+3|$.

8. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx$. 〃 $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x+3\ln|x-1|$.

9. $\int\left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx.$ جواب: $a^2x+2ab\ln|x-a|-\frac{b^2}{x-a}.$

10. $\int\frac{x}{(x+1)^2}dx.$ // $\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}.$

راهنمائی:

$$\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}.$$

11. $\int\frac{b\,dy}{\sqrt{1-y}}.$ جواب: $-2b\sqrt{1-y}.$

12. $\int\sqrt{a-bx}\,dx.$ // $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}.$

13*. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ // $\sqrt{x^2+1}.$

حل —

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}.$$

14. $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx.$ جواب: $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}.$

15. $\int\frac{dx}{3x^2+5}.$ // $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tan} x\sqrt{\frac{3}{5}}.$

16. $\int\frac{dx}{7x^2-8}.$ // $\frac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|.$

17. $\int\frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$ $(0<b<a).$ // $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}}\right|.$

18. $\int\frac{x^2}{x^2+2}dx.$ // $x-\sqrt{2}\ \operatorname{arc\ tan}\ \frac{x}{\sqrt{2}}.$

19. $\int\frac{x^3}{a^2-x^2}dx.$ // $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{2}\ln|a^2-x^2|\right).$

20. $\int\frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx.$ // $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+4)+\arctan\frac{x}{2}.$

21. $\int\frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}.$ // $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}x+\sqrt{7+8x^2}).$

22. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}.$ // $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sin} x\sqrt{\frac{5}{7}}.$

23. $\int\frac{2x-5}{3x^2-2}dx.$ // $\frac{1}{3}\ln|3x^2-2|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|$

24. $\int\frac{3-2x}{5x^2+7}dx.$ // $\frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arc\,tan}\sqrt{\frac{5}{7}}x-\frac{1}{5}\ln(5x^2+7).$

25. $\int\frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx.$ // $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+1}).$

26. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx.$ جواب : $\sqrt{x^2-4}+3\ln|x+\sqrt{x^2-4}|.$

27. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5}.$ // $\frac{1}{2}\ln|x^2-5|.$

28. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}.$ // $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3).$

29. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx.$ // $\frac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\frac{1}{a}\arctan\frac{ax}{b}.$

30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$ // $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}.$

31. $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx.$ // $\frac{1}{3}\arctan x^3.$

32. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}.$ // $\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6-1}|.$

33. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$ // $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}.$

34. $\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx.$ // $\frac{\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2}{4}.$

35. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx.$ // $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)-\frac{\sqrt{(\arctan 2x)^3}}{3}.$

36. $\int \sqrt{\frac{dx}{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}.$ // $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}.$

37. $\int ae^{-mx}dx.$ // $-\frac{a}{m}e^{-mx}.$

38. $\int 4^{2-3x}dx.$ // $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}.$

39. $\int (e^t-e^{-t})dt.$ // $e^t+e^{-t}.$

40. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx.$ // $\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}.$

41. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx.$ // $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x.$

42. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx.$ // $\frac{2}{3\ln a}\sqrt{a^{3x}}+\frac{2}{\ln a\sqrt{a^x}}.$

43. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx.$ // $-\frac{1}{2e^{x^2+1}}.$

44. $\int x\cdot 7^{x^2}dx.$ // $\frac{1}{2\ln 7}7^{x^2}.$

45. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$ // $-e^{\frac{1}{x}}.$

46. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. جواب $\frac{2}{\ln 5} 5^{\sqrt{x}}$.

47. $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$. // $\ln|e^x-1|$.

48. $\int e^x \sqrt{a-be^x}\, dx$. // $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}$.

49. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+1\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{a}} dx$. // $\frac{3a}{4}(e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{4}{3}}$.

50. $\int \frac{dx}{2^x+3}$. // $\frac{x}{3}-\frac{1}{3\ln 2}\ln(2^x+3)$.

راهنمائی:

$$\frac{1}{2^x+3}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2^x}{2^x+3}\right).$$

51. $\int \frac{a^x\, dx}{1+a^{2x}}$. جواب $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arc\,tan}(a^x)$.

52. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}} dx$. // $-\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|$.

53. $\int \frac{e^t\, dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$. // $\operatorname{arc\,sin} e^t$.

54. $\int \sin(a+bx)\, dx$. // $-\frac{1}{b}\cos(a+bx)$.

55. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}} dx$. // $\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

56. $\int (\cos ax+\sin ax)^2 dx$. // $x-\frac{1}{2a}\cos 2ax$.

57. $\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. // $2\sin\sqrt{x}$.

58. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$. // $-\ln 10\times\cos(\log x)$.

59. $\int \sin^2 x\, dx$. // $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$

راهنمائی —

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

60. $\int \cos^2 x\, dx$. جواب $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$.

61. $\int \sec^2(ax+b)\, dx$. // $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$.

62. $\int \cot^2 ax\, dx$. // $-\frac{\cot ax}{a}-x$.

63. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}$. // $a\ln\left|\tan\frac{x}{2a}\right|$.

64. $\int \frac{dx}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$. // $\frac{1}{15}\ln\left|\tan\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$.

65. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}$. جواب $\frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax+b}{2}\right|$.

66. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$. // $\frac{1}{2}\tan(x^2)$.

67. $\int x\sin(1-x^2)\,dx$. // $\frac{1}{2}\cos(1-x^2)$.

68. $\int \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{2}}-1\right)^2 dx$. // $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln\left|\tan\frac{x\sqrt{2}}{2}\right|$.

69. $\int \tan x\,dx$. // $-\ln|\cos x|$.

70. $\int \cot x\,dx$. // $\ln|\sin x|$.

71. $\int \cot\frac{x}{a-b}\,dx$. // $(a-b)\times\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|$.

72. $\int \frac{dx}{\tan\frac{x}{5}}$. // $5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right|$.

73. $\int \tan\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$. // $-2\ln|\cos\sqrt{x}|$.

74. $\int x\cot(x^2+1)\,dx$. // $\frac{1}{2}\ln\times|\sin(x^2+1)|$.

75. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$. // $\ln|\tan x|$.

76. $\int \cos\frac{x}{a}\sin\frac{x}{a}\,dx$. // $\frac{a}{2}\sin^2\frac{x}{a}$.

77. $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx$. // $\frac{\sin^4 6x}{24}$.

78. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,dx$. // $-\frac{1}{4a\sin^4 ax}$.

79. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\,dx$. // $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x)$.

80. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}\,dx$. // $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}$.

81. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$. // $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}$.

82. $\int \tan^3\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}\,dx$. // $\frac{3}{4}\tan^4\frac{x}{3}$.

83. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$. // $\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x}$.

84. $\int \frac{\cot^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x}\,dx$. // $-\frac{3\cot^{\frac{5}{3}} x}{5}$.

85. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}\,dx$. // $\frac{1}{3}\left(\tan 3x+\frac{1}{\cos 3x}\right)$.

86. $\int \frac{(\cos ax+\sin ax)^2}{\sin ax}\,dx$. // $\frac{1}{a}\left(\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|+2\sin ax\right)$.

87. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b-a\cot 3x}\,dx$. // $\frac{1}{3a}\ln|b-a\cot 3x|$.

88. $\int (2\sinh 5x - 3\cosh 5x)\,dx.$ جواب $\frac{2}{5}\cosh 5x - \frac{3}{5}\sinh 5x.$

89. $\int \sinh^2 x\,dx.$ // $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x.$

90. $\int \frac{dx}{\sinh x}.$ // $\ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right|.$

91. $\int \frac{dx}{\cosh x}.$ // $2\arctan e^x.$

92. $\int \frac{dx}{\sinh x\cosh x}.$ // $\ln|\tanh x|.$

93. $\int \tanh x\,dx.$ // $\ln\cosh x.$

94. $\int \coth x\,dx.$ // $\ln|\sinh x|.$

95. $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx.$ // $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}.$

96. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}\,dx.$ // $\frac{1}{4}\ln|x^4-4x+1|.$

97. $\int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx.$ // $\frac{1}{4\sqrt{5}} \times \arctan \frac{x^4}{\sqrt{5}}.$

98. $\int xe^{-x^2}\,dx.$ // $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$

99. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}\,dx.$ // $\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2}).$

100 $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx.$ // $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x+1|.$

101. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}.$ // $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}.$

102. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx.$ // $\ln|x+\cos x|.$

103. $\int \frac{\tan 3x - \cot 3x}{\sin 3x}\,dx.$ // $\frac{1}{3}\left(\ln|\sec 3x + \tan 3x| + \frac{1}{\sin 3x}\right).$

104. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ // $-\frac{1}{\ln x}.$

105. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 2}}\,dx.$ // $\ln|\tan x + \sqrt{\tan^2 x - 2}|.$

106. $\int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}.$ // $\sqrt{2}\arctan(x\sqrt{2}) - \frac{1}{4(2x^2+1)}.$

107. $\int a^{\sin x}\cos x\,dx.$ // $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}.$

108. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx.$ // $\sqrt[3]{\frac{(x^3+1)^2}{2}}.$

109 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ // $\frac{1}{2}\arcsin(x^2).$

110 $\int \tan^2 ax\,dx.$ // $\frac{1}{a}\tan ax - x.$

111 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx.$ // $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2}.$

112 $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}}$. جواب $\arcsin\frac{\tan x}{2}$.

113. $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}}$. 〃 $a\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

114 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$. 〃 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$.

115 $\int \tan\sqrt{x-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. 〃 $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|$.

116 $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2}$. 〃 $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x^2}{2}\right|$.

117 $\int \frac{e^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,dx$. 〃 $e^{\arctan x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\arctan x$.

118 $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$. 〃 $-\ln|\sin x+\cos x|$.

119. $\int \frac{\left(1-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx$. 〃 $\sqrt{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|-2x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$.

120. $\int \frac{x^2}{x^2-2}\,dx$. 〃 $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$.

121. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$. 〃 $\ln|x|+2\arctan x$.

122. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$. 〃 $e^{\sin^2 x}$.

123. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$. 〃 $\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4-3x^2}$.

124. $\int \frac{dx}{e^x+1}$. 〃 $x-\ln(1+e^x)$.

125. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$ $(0<b<a)$. 〃 $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

126. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx$. 〃 $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-2})$.

127. $\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax}$. 〃 $\frac{1}{a}\ln|\tan ax|$.

128. $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)dt$. 〃 $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$.

129. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$. 〃 $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|$.

130. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$. 〃 $-\frac{\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2}{2}$.

131. $\int e^{-\tan x}\sec^2 x\,dx$. 〃 $-e^{-\tan x}$.

132. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx.$ جواب $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right).$

133. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$ // $-2\cot 2x.$

134. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ // $\frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1-x^2}.$

135. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec^2 x+1}} dx.$ // $\ln(\sec x + \sqrt{\sec^2 x+1}).$

136. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x} dx.$ // $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}\right|.$

137. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right).$

راهنمائی :

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2}.$$

138. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}} dx.$ // $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}.$

139. $\int x^2 \cos(x^3+3)\, dx.$ // $\frac{1}{3}\sinh(x^3+3).$

140. $\int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x} dx.$ // $\frac{1}{\ln 3} 3^{\tanh x}.$

141. $\int x(2x+5)^{10}\, dx.$ // $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right].$

142. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx.$ // $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}|\right).$

143. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$ // $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|.$

144. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$ // $2\arctan\sqrt{e^x-1}.$

145. $\int \frac{\ln 2x\, dx}{\ln 4x\, x}.$ // $\ln x - \ln 2 \ln|\ln x + 2\ln 2|.$

146. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ // $\frac{(\arcsin x)^3}{3}.$

147. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx.$ // $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}.$

148. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$ // $\frac{2}{5}(\cos^2 x - 5) \times \sqrt{\cos x}.$

149. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$ // $\ln\left|\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$

۳ــ٤ . انتگرالگیری به روش جزء بجزء

دستور

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

موسوم به انتگرالگیری **به روش جزء بجزء** است که در آن u و v توابعی مشتقپذیر از x هستند. وقتی از این روش استفاده می کنیم انتگران را به حاصلضرب دو عامل تقسیم می کنیم. یکی از عاملها یک تابع است و عامل دیگر دیفرانسیل تابع دیگری است. اگر انتگران، به صورت حاصلضرب یک تابع لگاریتمی، یا یک تابع معکوس مثلثاتی، در یک چند جمله‌ای باشد، در اینصورت **معمولاً** u را تابع لگاریتمی یا تابع معکوس مثلثاتی، انتخاب می کنند. ولی اگر انتگران حاصلضرب یک تابع لگاریتمی یا یک تابع نمایی در یک تابع جبری باشد، **معمولاً** تابع جبری را u فرض می کنند.

۱ــ۳ــ٤ $I = \int \arc\tan x\,dx$ را حل کنید.

حل . فرض می کنیم :

$$u = \arctan x, \qquad dv = dx.$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \qquad v = x;$$

$$I = \int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

۲ــ۳ــ٤ $I = \int \arcsin x\,dx$ **جواب :** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

۳ــ۳ــ٤ $I = \int x\cos x\,dx$ **را حل کنید.**

حل . فرض می کنیم :

$$u = x; \qquad dv = \cos x\,dx,$$

از آنجا

$$du = dx; \qquad v = \sin x,$$

$$I = \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

حال نشان می‌دهیم که هر گاه انتخاب u و dv نامناسب باشد، چه اشکالی پیش می آید؟

در انتگرال $\int x\cos x\,dx$ فرض می کنیم :

$$u = \cos x; \qquad dv = x\,dx,$$

بنابراین

$$du = -\sin x\,dx; \qquad v = \frac{1}{2}x^2.$$

در این حالت

$$I = \frac{1}{2}x^2\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \sin x\,dx.$$

پر واضح است که انتگرال حاصل از اولی مشکلتر است.

۴ـ۳ـ۴ $I = \int x^3 \ln x\,dx.$

حل. فرض می کنیم

$$u = \ln x; \quad dv = x^3\,dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{x}; \quad v = \frac{1}{4}x^4,$$

$$I = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^4\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

۵ـ۳ـ۴ $I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\,dx.$

حل. فرض می کنیم

$$u = x^2 - 2x + 5; \quad dv = e^{-x}\,dx,$$

و از آنجا

$$du = (2x - 2)\,dx; \quad v = -e^{-x};$$

$$I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) + 2\int (x-1)e^{-x}\,dx.$$

بار دیگر از روش جزء بجزء برای انتگرال حاصل استفاده می کنیم:

$$x - 1 = u; \qquad dv = e^{-x}\,dx,$$

$$du = dx; \quad v = -e^{-x}.$$

از آنجا

$$I_1 = 2\int (x-1)e^{-x}\,dx = -2e^{-x}(x-1) + 2\int e^{-x}\,dx = -2xe^{-x} + C.$$

بنابراین

$$I = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) - 2xe^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 5) + C.$$

تذکر. نتیجه‌ای که از انتگرالگیری، انتگرالهای به صورت $\int P(x)e^{ax}\,dx$ حاصل می شود این است که جواب انتگرال، تابعی به صورت $Q(x)e^{ax}$ است که در آن

$Q(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجهٔ آن با درجهٔ چند جمله‌ای $P(x)$ یکی است. در محاسبه انتگرالها با این روش، از روش ضرایب مجهول استفاده می شود. بدین معنی که $Q(x)$ را یک چند جمله‌ای هم درجه با چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب مجهول فرض کرده و سپس از دو طرف مشتق می‌گیریم و نتیجه را با هم معادل قرار می دهیم به دستگاه معادلاتی می رسیم که از حل آن ضرایب مورد نظر را تعیین می کنیم.

برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را حل می کنیم.

۶ــ۳ــ٤ روش ضرایب مجهول را بکار برده و انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I=\int (3x^3-17)\,e^{2x}\,dx.$$

حل .فرض می کنیم

$$\int (3x^3-17)\,e^{2x}\,dx=(Ax^3+Bx^2+Dx+E)\,e^{2x}+C$$

از دو طرف مشتق می گیریم:

$$(3x^3-17)\,e^{2x}=2\,(Ax^3+Bx^2+Dx+E)\,e^{2x}+e^{2x}\,(3Ax^2+2Bx+D)$$

از دو طرف e^{2x} را حذف می کنیم، داریم:

$$3x^3-17\equiv 2Ax^3+(2B+3A)\,x^2+(2D+2B)\,x+(2E+D)$$

ضرایب x های هم درجه را در دو طرف با هم مساوی قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} &3=2A; &&0=2B+3A;\\ &0=2D+2B; &&-17=2E+D. \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر زیر نتیجه می شوند:

$$A=\frac{3}{2};\quad B=-\frac{9}{4};\quad D=\frac{9}{4};\quad E=-\frac{77}{8}.$$

پس

$$\int (3x^3-17)\,e^{2x}\,dx=\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}+C.$$

۷ــ۳ــ٤ . انتگرال زیر را حساب نمائید:

$$I=\int (x^3+1)\cos x\,dx.$$

حل . فرض می کنیم

$$u=x^3+1;\quad dv=\cos x\,dx,$$

از آنجا

$$du = 3x^2\, dx; \quad v = \sin x.$$

$$I = (x^3+1)\sin x - 3\int x^2 \sin x\, dx = (x^3+1)\sin x - 3I_1,$$

که در آن

$$I_1 = \int x^2 \sin x\, dx.$$

از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2I_2,$$

که در آن

$$I_2 = \int x \cos x\, dx.$$

بار دیگر از روش جزء بجزء برای انتگرال حاصل استفاده می کنیم :

$$I_2 = x \sin x + \cos x + C.$$

بالاخره داریم :

$$I = \int (x^3+1)\cos x\, dx = (x^3+1)\sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x + C =$$
$$= (x^3 - 6x + 1)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + C.$$

تذکر. روش ضرایب مجهول برای محاسبهٔ انتگرالهای

$$\int P(x)\sin ax\, dx, \quad \int P(x)\cos ax\, dx.$$

بکار می رود.

۸ــ۳ــ٤ .

$$I = \int (x^2 + 3x + 5)\cos 2x\, dx.$$

حل

$$\int (x^2+3x+5)\cos 2x\, dx =$$
$$= (A_0x^2 + A_1x + A_2)\cos 2x + (B_0x^2 + B_1x + B_2)\sin 2x + C.$$

از طرفین مشتق می گیریم

$$(x^2+3x+5)\cos 2x = -2(A_0x^2 + A_1x + A_2)\sin 2x +$$
$$+ (2A_0x + A_1)\cos 2x + 2(B_0x^2 + B_1x + B_2)\cos 2x + (2B_0x + B_1)\sin 2x =$$
$$= [2B_0x^2 + (2B_1 + 2A_0)x + (A_1 + 2B_2)]\cos 2x +$$
$$+ [-2A_0x^2 + (2B_0 - 2A_1)x + (B_1 - 2A_2)]\sin 2x.$$

ضرایب x های هم درجه در دو طرف را که در ضرایب $\sin 2x$ و $\cos 2x$ موجودند، معادل با

هم قرار می دهیم دستگاه معادلات

$$\begin{array}{lll} 2B_0=1; & 2(B_1+A_0)=3; & A_1+2B_2=5; \\ -2A_0=0; & 2(B_0-A_1)=0; & B_1-2A_2=0. \end{array}$$

حاصل می شود. از حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر زیر نتیجه می شوند:

$$A_0=0;\ B_0=\frac{1}{2};\ A_1=\frac{1}{2};\ B_1=\frac{3}{2};\ A_2=\frac{3}{4};\ B_2=\frac{9}{4}.$$

پس

$$\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin^2 x+C.$$

۹ـ۳ـ٤ $I=\int (3x^2+6x+5)\arctan x\,dx.$

حل . فرض می کنیم

$$u=\arctan x;\qquad dv=(3x^2+6x+5)\,dx,$$

از آنجا

$$du=\frac{dx}{1+x^2};\quad v=x^3+3x^2+5x.$$

پس

$$I=(x^3+3x^2+5x)\arctan x-\int\frac{x^3+3x^2+5x}{1+x^2}\,dx.$$

برای حل انتگرال اخیر، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم

$$I_1=\int\frac{x^3+3x^2+5x}{1+x^2}\,dx=\int(x+3)\,dx+\int\frac{4x-3}{x^2+1}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+3x+2\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-3\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}+3x+2\ln(x^2+1)-3\arctan x+C.$$

مقدار I_1 را درجای خود قرار می دهیم

$$I=(x^3+3x^2+5x+3)\arctan x-x^2/2-3x-2\ln(x^2+1)+C.$$

۱۰ـ۳ـ٤ . انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I=\int e^{5x}\cos 4x\,dx.$$

حل . فرض می کنیم

$$e^{5x}=u;\quad \cos 4x\,dx=dv,$$

از آنجا

$$5e^{5x}\,dx=du;\quad v=\frac{1}{4}\sin 4x.$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x - \frac{5}{4} \int e^{5x} \sin 4x \, dx.$$

دوباره روش جزء بجزء را بکار می بریم :

$$I_1 = \int e^{5x} \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4} e^{5x} \cos 4x + \frac{5}{4} \int e^{5x} \cos 4x \, dx.$$

بنابر این

$$I = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x - \frac{5}{4} \left(-\frac{1}{4} e^{5x} \cos 4x + \frac{5}{4} \int e^{5x} \cos 4x \, dx \right)$$

بالاخره

$$I = \frac{4}{41} e^{5x} \left(\sin 4x + \frac{5}{4} \cos 4x \right) + C.$$

۱۱ـ۳ـ٤ .

$$I = \int \cos(\ln x) \, dx.$$

حل . فرض می کنیم

$$u = \cos(\ln x); \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = -\sin(\ln x) \frac{dx}{x}; \quad v = x.$$

بنابر این

$$I = \int \cos(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx.$$

از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$u = \sin(\ln x); \qquad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = \cos(\ln x) \frac{dx}{x}; \quad v = x.$$

پس

$$I_1 = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx.$$

بنابر این

$$I = \int \cos(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I.$$

بالاخره

$$I = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

۱۲ـ۳ـ٤ . $$I = \int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$$

حل . انتگران را به صورت زیر تغییر می دهیم :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x.$$

پس

$$I=\int x\ln(x+1)\,dx-\int x\ln x\,dx=I_1-I_2.$$

انتگرالهای I_1 و I_2 را به روش جزء بجزء حساب می کنیم

$$u=\ln(x+1);\quad dv=x\,dx,$$

از آنجا

$$du=\frac{dx}{1+x};\quad v=\frac{1}{2}(x^2-1).$$

پس

$$I_1=\int x\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)\,dx}{1+x}=$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int(x-1)\,dx=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C.$$

بطور مشابه انتگرال بعدی را حل می کنیم :

$$I_2=\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

بالاخره داریم :

$$I=\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x}{2}+C.$$

۱۳ــ۳ــ٤ . $I=\int\frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1)-2\ln x]}{x^4}\,dx.$

حل . نخست تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم :

$$1+\frac{1}{x^2}=t.$$

بنابر این

$$dt=-\frac{2dx}{x^3}\qquad \text{یا}\qquad \frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\,dt.$$

پس

$$I=\int\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,\ln t\,dt.$$

انتگرال حاصل با روش جزء بجزء به راحتی حساب می شود. فرض می کنیم

$$u=\ln t;\quad dv=\sqrt{t}\,dt.$$

پس

$$du=\frac{dt}{t}; \quad v=\frac{2}{3}t\sqrt{t}.$$

از آنجا

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\ln t\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t-\frac{2}{3}\int\sqrt{t}\,dt\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t-\frac{4}{9}t\sqrt{t}\right]+C.$$

جواب را نسبت به x می نویسیم

$$I=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\right]+C=$$
$$=\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{9x^3}\left[2-3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]+C.$$

۴ـ۳ـ۱۴ . $I=\int\sin x\ln\tan x\,dx.$

جواب : $-\cos x\ln\tan x+\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C.$

۴ـ۳ـ۱۵ $I=\int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx.$

حل . فرض می کنیم

$$u=\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}); \quad dv=dx,$$

از آنجا

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$
$$v=x.$$

بنابراین

$$I=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}\int x\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$
$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

تذکر : در محاسبه بعضی از انتگرالها که مجبور به استفاده از روش جزء بجزء بدفعات متعدد هستیم ، دستوری تحت عنوان «**تعمیم دستور انتگرالگیری به روش جزء بجزء**» یا «**دستور انتگرالگیری مکرر به روش جزء بجزء**» به صورت زیر

بدست می آید:

$$\int u(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v_1(x) - u'(x)\,v_2(x) + u''(x)\,v_3(x) - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)\,v_n(x) - (-1)^{n-1}\int u^{(n)}(x)\,v_n(x)\,dx,$$

که در آن

$$v_1(x) = \int v(x)\,dx;\quad v_2(x) = \int v_1(x)\,dx;\quad \dots;\quad v_n(x) = \int v_{n-1}(x)\,dx.$$

البته، در اینجا فرض براین است که تمام مشتقات و انتگرالهایی که ظاهر می شوند، موجودند.

استفاده از فرمول تعمیم انتگرالگیری به روش جزء بجزء، وقتی مناسب است که انتگرال به صورت $\int P_n(x)\,\varphi(x)\,dx$ باشد که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله ای از درجهٔ n است و عامل $\varphi(x)$ طوری است که بتوان از آن $n+1$ بار انتگرال متوالی گرفت. مثلاً:

$$\int P_n(x)\,e^{kx}\,dx = P_n(x)\frac{e^{kx}}{k} - P_n'(x)\frac{e^{kx}}{k^2} + \dots +$$
$$+ (-1)^n P_n^{(n)}(x)\frac{e^{kx}}{k^{n+1}} + C =$$
$$= e^{kx}\left[\frac{P_n(x)}{k} - \frac{1}{k^2}P_n'(x) + \dots + \frac{(-1)^n}{k^{n+1}}P_n^{(n)}(x)\right] + C.$$

۱۶ـ۳ـ٤ . با استفاده از دستور «**تعمیم انتگرالگیری به روش جزء بجزء**» انتگرالهای زیر را حساب نمائید:

(a) $\int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\cos 2x\,dx,$

(b) $\int (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1)\sqrt{2x+6}\,dx.$

حل: (a)

$$\int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\cos 2x\,dx = (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\frac{\sin 2x}{2} -$$
$$-(3x^2 - 4x + 3)\left(-\frac{\cos 2x}{4}\right) + (6x - 4)\left(-\frac{\sin 2x}{8}\right) - 6\frac{\cos 2x}{16} + C =$$
$$= \frac{\sin 2x}{4}(2x^3 - 4x^2 + 3x) + \frac{\cos 2x}{8}(6x^2 - 8x + 3) + C;$$

حل: (b)

$$\int (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1)\sqrt{2x+6}\,dx =$$
$$= (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1)\frac{(2x+6)^{3/2}}{3} - (6x^2 + 6x - 8)\frac{(2x+6)^{5/2}}{3\cdot 5} +$$
$$+ (12x + 6)\frac{(2x+6)^{7/2}}{3\cdot 5\cdot 7} - 12\frac{(2x+6)^{9/2}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + C =$$
$$= \frac{\sqrt{2x+6}}{5\cdot 7\cdot 9}(2x+6)(70x^3 - 45x^2 - 396x + 897) + C.$$

انتگرالهای زیر را حساب نمائید

۴ـ۳ـ۱۷ $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$ جواب $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$

۴ـ۳ـ۱۸ $\int \sqrt[3]{x}(\ln x)^2\,dx.$ جواب $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2-\frac{3}{2}\ln x+\frac{9}{8}\right]+C.$

۴ـ۳ـ۱۹ $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+}}$ جواب : $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C.$

۴ـ۳ـ۲۰ $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}.$ جواب : $-0.5\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\cot x\right)+C.$

۴ـ۳ـ۲۱ $\int 3^x\cos x\,dx.$ جواب: $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}+C.$

۴ـ۳ـ۲۲ $\int (x^3-2x^2+5)e^{3x}\,dx.$ جواب :

$\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}\right)e^{3x}+C.$

۴ـ۳ـ۲۳ $\int (1+x^2)^2\cos x\,dx.$ جواب:

$(x^4-10x^2+21)\sin x+x(4x^3-20)\cos x+C.$

۴ـ۳ـ۲۴ $\int (x^2+2x-1)\sin 3x\,dx.$ جواب:

$\frac{9x^2+18x-11}{27}\cos 3x+\frac{2x+2}{9}\sin 3x+C.$

۴ـ۳ـ۲۵ $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx.$ جواب:

$\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C.$

۴ـ۳ـ۲۶ $\int x^3\arctan x\,dx.$ جواب ـ

$\frac{x^4-1}{4}\arctan x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C.$

۴ـ۳ـ۲۷ $\int x^2\arccos x\,dx.$ جواب :

$\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+C.$

۴ـ۳ـ۲۸ . با استفاده از دستور **«انتگرالگیری مکرر به روش جزء بجزء»** انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\text{(a)} \int (3x^2+x-2)\sin^2(3x+1)\,dx; \quad \text{(b)} \int \frac{x^2-7x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx.$$

جواب :

$$\text{(a)} \; -\frac{18x^2+6x-13}{72}\sin(6x+2)-\frac{6x+1}{72}\cos(6x+2)+\frac{1}{2}x^3+$$
$$+\frac{1}{4}x^2-x+C; \quad \text{(b)} \; \frac{3}{4}(x^2-7x+1)(2x+1)^{\frac{2}{3}}-\frac{9}{40}(2x-7)(2x+1)^{\frac{5}{3}}+$$
$$+\frac{27}{320}(2x+1)^{\frac{8}{3}}+C.$$

۲۹ــ۳ــ٤ . با استفاده از روش جزء بجزء انتگرالهای زیر را حساب کنید:

1. $\int \ln x\,dx.$	جواب	$x\ln x-x.$
2. $\int \arctan x\,dx.$	//	$x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$
3. $\int \arcsin x\,dx.$	//	$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}.$
4. $\int x\sin x\,dx.$	//	$\sin x-x\cos x.$
5. $\int x\cos 3x\,dx.$	//	$\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}.$
6. $\int \frac{x}{e^x}\,dx.$	//	$-\frac{x+1}{e^x}.$
7. $\int x\cdot 2^{-x}\,dx.$	//	$-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}.$
8. $\int x^2e^{3x}\,dx.$	//	$\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2).$
9. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}\,dx.$	//	$-e^{-x}(x^2+5).$
10. $\int x^3e^{-\frac{x}{3}}\,dx.$	//	$-3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+9x^2+54x+162).$
11. $\int x\sin x\cos x\,dx.$	//	$-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}.$
12. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx.$	//	$\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x.$
13. $\int x^2\ln x\,dx.$	//	$\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$
14. $\int \ln^2 x\,dx.$	//	$x\ln^2 x-2x\ln x+2x.$
15. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$	//	$-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}.$
16. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$	//	$2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}.$
17. $\int x\arctan x\,dx.$	//	$\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}$
18 $\int x\arcsin x\,dx.$	//	$\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\times\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}.$
19 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$	//	$x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}.$
20 $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$	//	$-x\cot x+\ln\|\sin x\|.$
21 $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$	//	$-\frac{x}{\sin x}+\ln\left\|\tan\frac{x}{2}\right\|.$
22 $\int e^x\sin x\,dx.$	//	$\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}.$
23 $\int 3^x\cos x\,dx.$	//	$\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}.$
24. $\int e^{ax}\sin bx\,dx.$	//	$\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}.$
25. $\int \sin(\ln x)\,dx.$	//	$\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)].$

روش های مناسب را بکار برده انتگرالهای زیر را حساب کنید

26. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$ جواب $-\frac{e^{-x_2}}{2}(x^2+1).$

27. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ // $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1).$

28. $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx.$ // $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x.$

29. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx.$ // $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}-x.$

30. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx.$ // $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}.$

31. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx.$ // $[\ln(\ln x)-1]\cdot\ln x.$

32. $\int x^2\arctan 3x\,dx.$ // $\frac{x^3}{3}\arctan 3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1).$

33. $\int x(\arctan x)^2\,dx.$ // $\frac{1+x^2}{2}\times(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

34. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$ // $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\times\arcsin x-2x.$

35. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$ // $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|.$

36. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$ // $-2\sqrt{1-x}\times\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}.$

37. $\int x\tan^2 2x\,dx.$ // $\frac{x\tan 2x}{2}+\frac{\ln|\cos 2x|}{4}-\frac{x^2}{2}.$

38. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx.$ // $\frac{e^{-x}}{2}\times\left(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1\right).$

39. $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$ // $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}.$

40. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$ // $-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x.$

حل - فرض کنید $u=x$ و $dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. داریم $du=dx$ و $v=-\frac{1}{2(x^2+1)}$

از آنجا

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{2(x^2+1)}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

41. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$ جواب $\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}\right)$

42. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ // $\frac{x}{2}\times\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

حل - فرض می کنیم $u=\sqrt{a^2-x^2}$ و $dv=dx;$ پس $du=-\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ و $v=x$

بنابراین

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$
$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

و در نتیجه

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$$