

درس: فیزیک 2

استاد: سمیه مهربابیان

رشته: پایه

دانشگاه: صنعتی شاهرود

نویسنده: سهیل خباز وحیدگر

کد آرشیو

۱۰۱۱۰۲۰۵۲

فصل اول

بار الکتریکی

انواع بار

(۱) **مثبت**: در اثر جدا کردن الکترون ها از یک جسم به وجود می آید.(۲) **منفی**: الکترون ها به جسم اضافه شود این جسم دارای بار منفی خواهد بود.(۲) **منفی**: الکترون ها به جسم اضافه شود این جسم دارای بار منفی خواهد بود.

$$q_e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

خصوصیات بار الکتریکی

(۱) در نوع بار مثبت و منفی در طبیعت وجود دارد.

(۲) بارهای الکتریکی با هم برهم کنش دارند و این برهم کنش به صورت جاذبه بین بارهای غیر

هم نام و دافعه بین بارهای هم نام بروز می کند.

(۳) بار یک گیت توانسته است زیرا بار الکتریکی منفی از بار الکتریکی مثبت است.

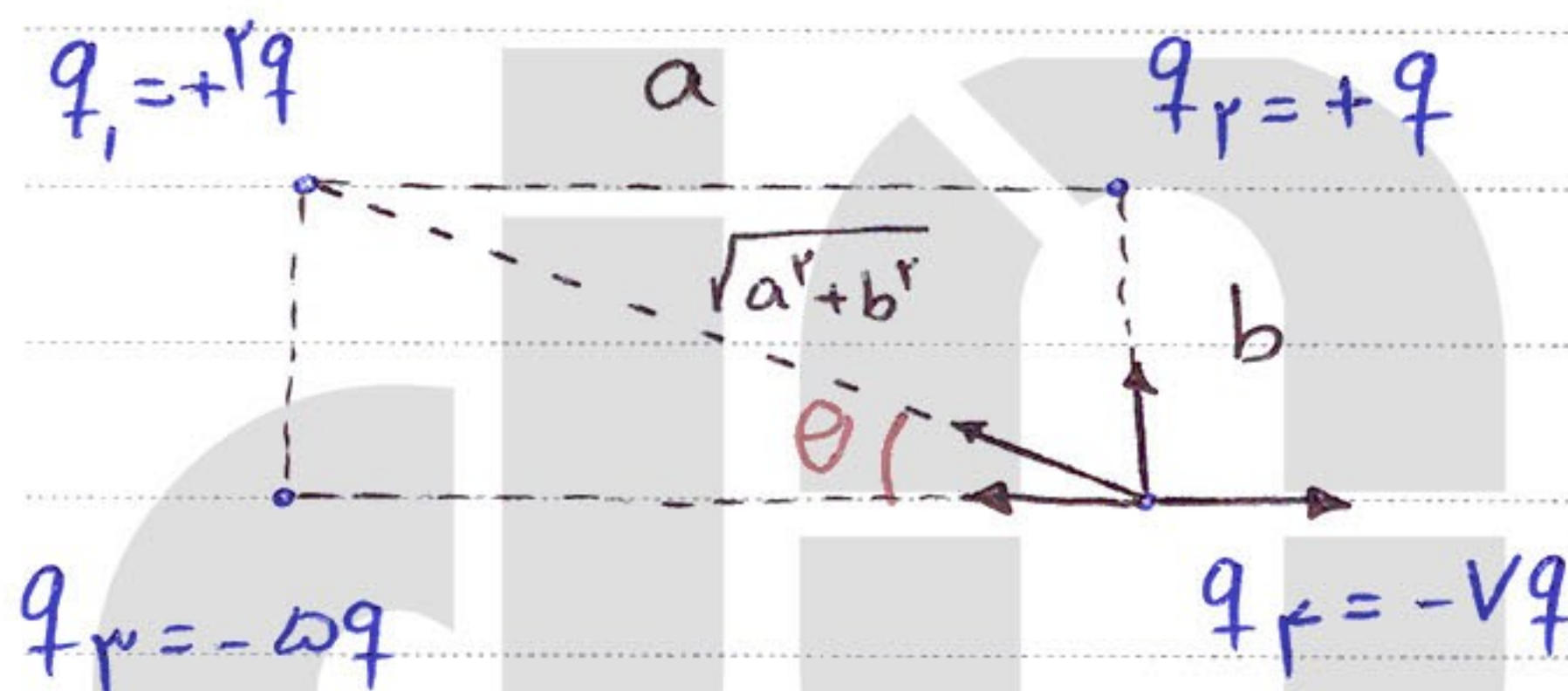
(۴) بار یک گیت پیوسته است (مانند پیوستگی بار)

$$+q \text{ --- } q \quad \left\{ \begin{array}{l} F \propto q_1, q_2 \\ F \propto \frac{1}{r^2} \end{array} \right. \Rightarrow F = \frac{k q_1 q_2}{r^2}$$

$$k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ; \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

↓ ↙ ↘
ثابت گذشتی خلا

مثال: نیروی را در برابر q_1 و q_2 بدست آورید.



$$F_{13} = \frac{k \times (-q) \times (q) q^2}{a^2 + b^2} = \frac{1 \times k q^2}{a^2 + b^2}$$

$$F_{23} = \frac{k \times 1 \times (q) q^2}{b^2} = \frac{q k q^2}{b^2}$$

$$F_{33} = \frac{k \times q \times q q^2}{a^2} = \frac{q k q^2}{a^2}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{33} - F_{13} \cos \theta = \frac{q k q^2}{a^2} - \left(\frac{1 \times k q^2}{a^2 + b^2} \times \cos \theta \right) \\ &= \frac{q k q^2}{a^2} - \left(\frac{1 \times k q^2}{a^2 + b^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\sum F_y = F_{r,y} + F_{1,y} = \frac{V k q^2}{b^2} + \left(\frac{14 k q^2}{a^2 + b^2} \times \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \rightarrow \tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$$

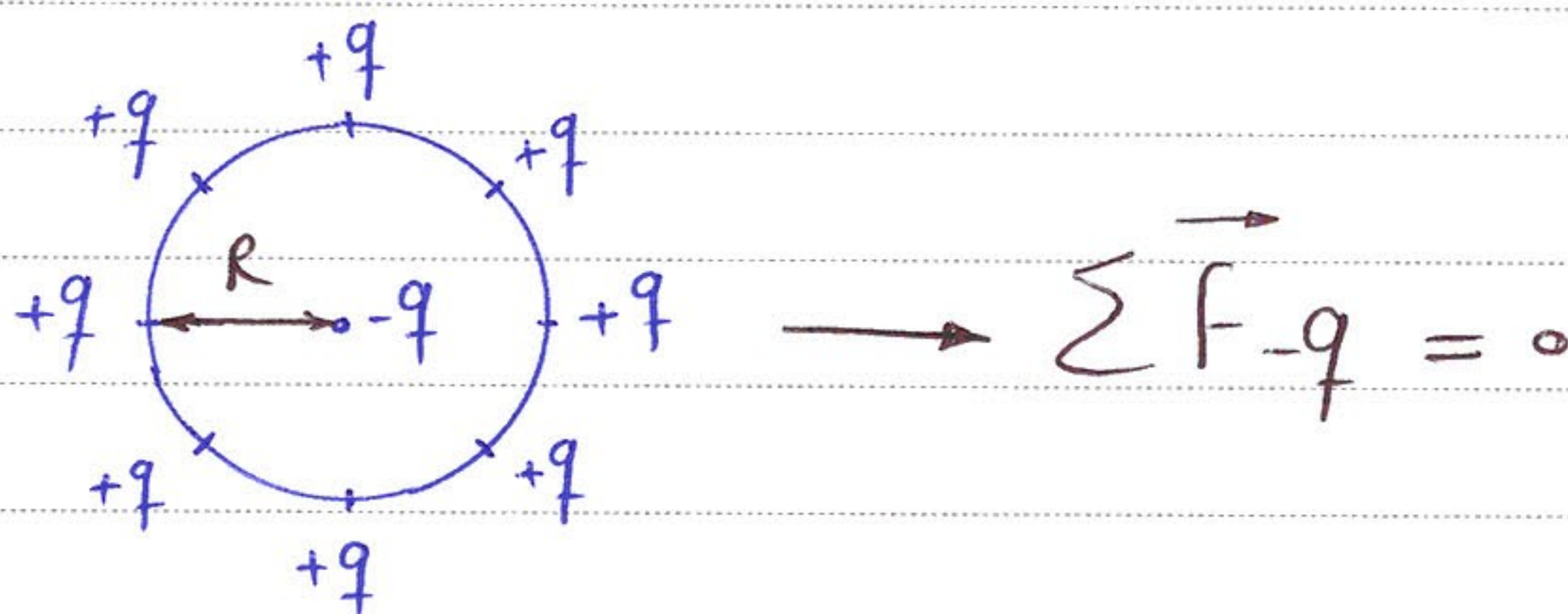
جهت نیرو

(۱) بردار نیرو در راستای خط راصل دربار است.

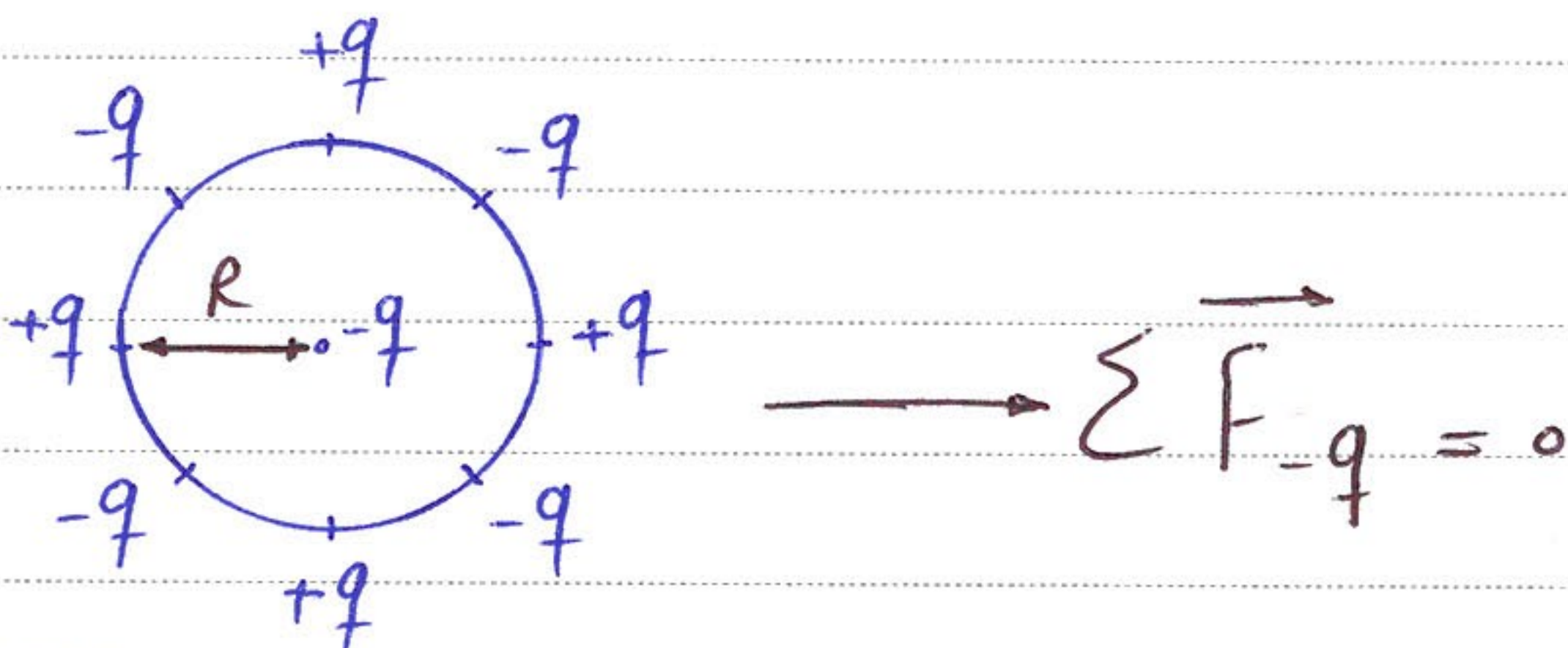
(۲) جهت در این راستا با توجه به علامت بارها مشخص می شود.

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \rightarrow \text{بردار یکد}$$

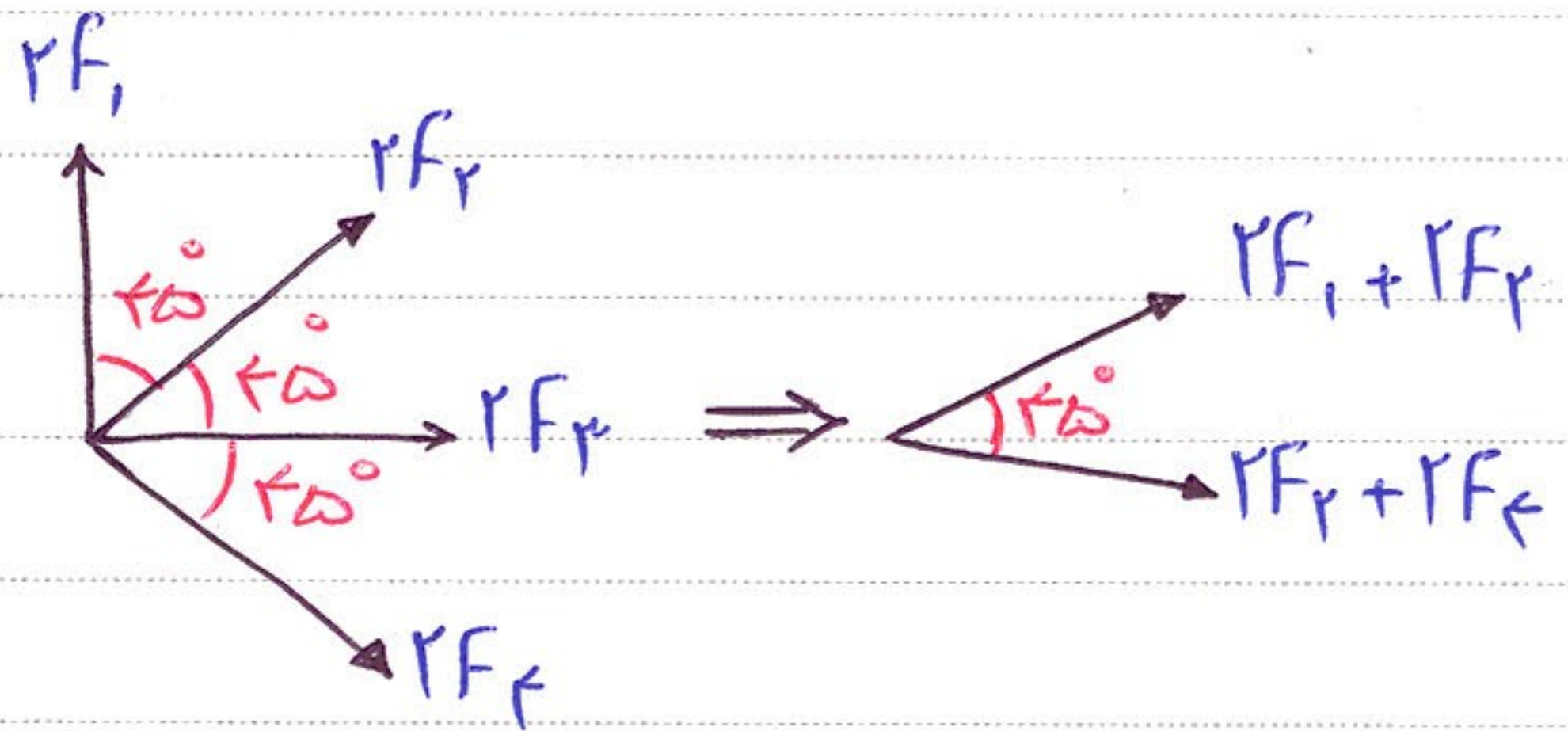
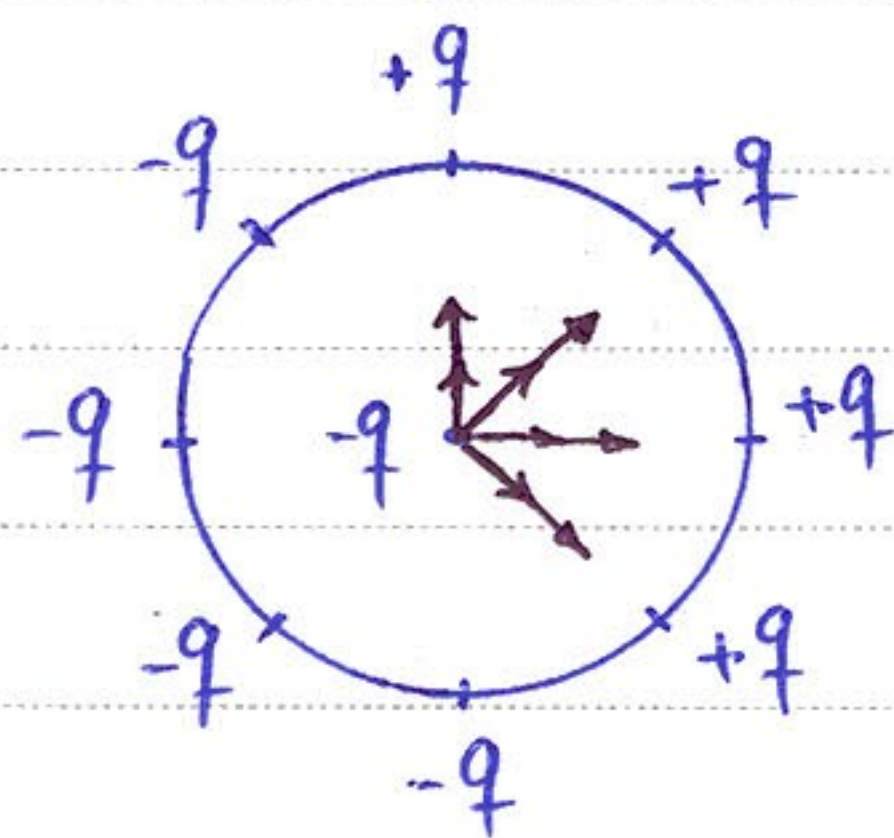
مثال: برای نیروهای وارد بر بار $-q$ ، مطابق شکل زیر بدست آورده.



$$\sum \vec{F}_q = 0$$



$$\sum \vec{F}_q = 0$$



$$F_{T,r} = \sqrt{F^2 + F^2} = \sqrt{2} F$$

$$F_{T,r} + 2F = \sqrt{2} F + 2F = F(\sqrt{2} + 2)$$

$$|\vec{F}_T| = \sqrt{F^2(2 + 2 + 2\sqrt{2}) + F^2} = 2F\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

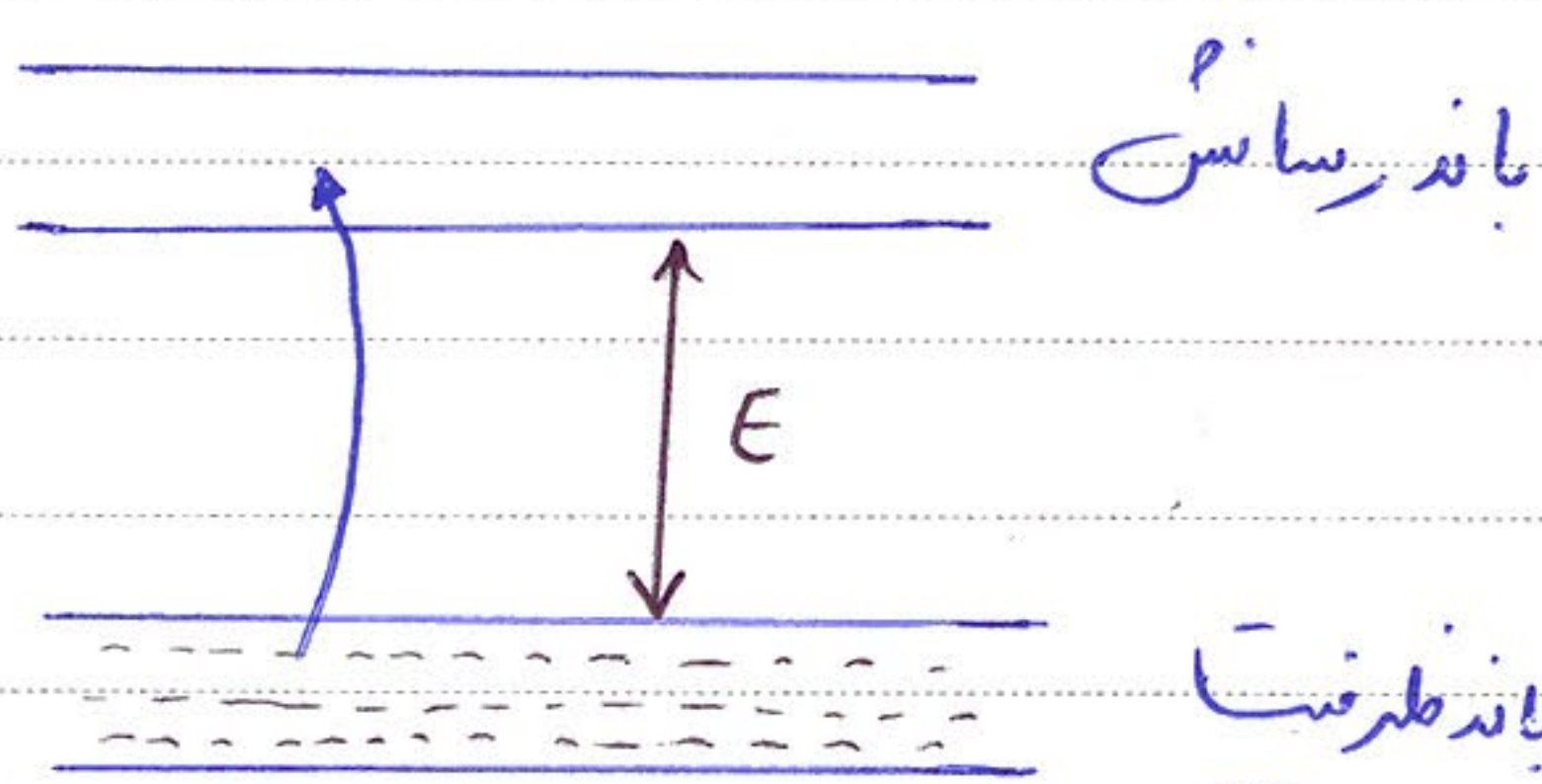
تقریباً: زاویه برابر باشند در مثال بالا را درست آورده.

(۱) رسانا: بار الکتریکی در این موارد جریان پیدا می کند.

بر اساس پاسخ (۲) نیم رسانا:

مواد پدیدان الکتریکی (۳) نارسانا:

(۴) ابررسانا: هیچ مقاومتی در مقابل عبور جریان ندارد.



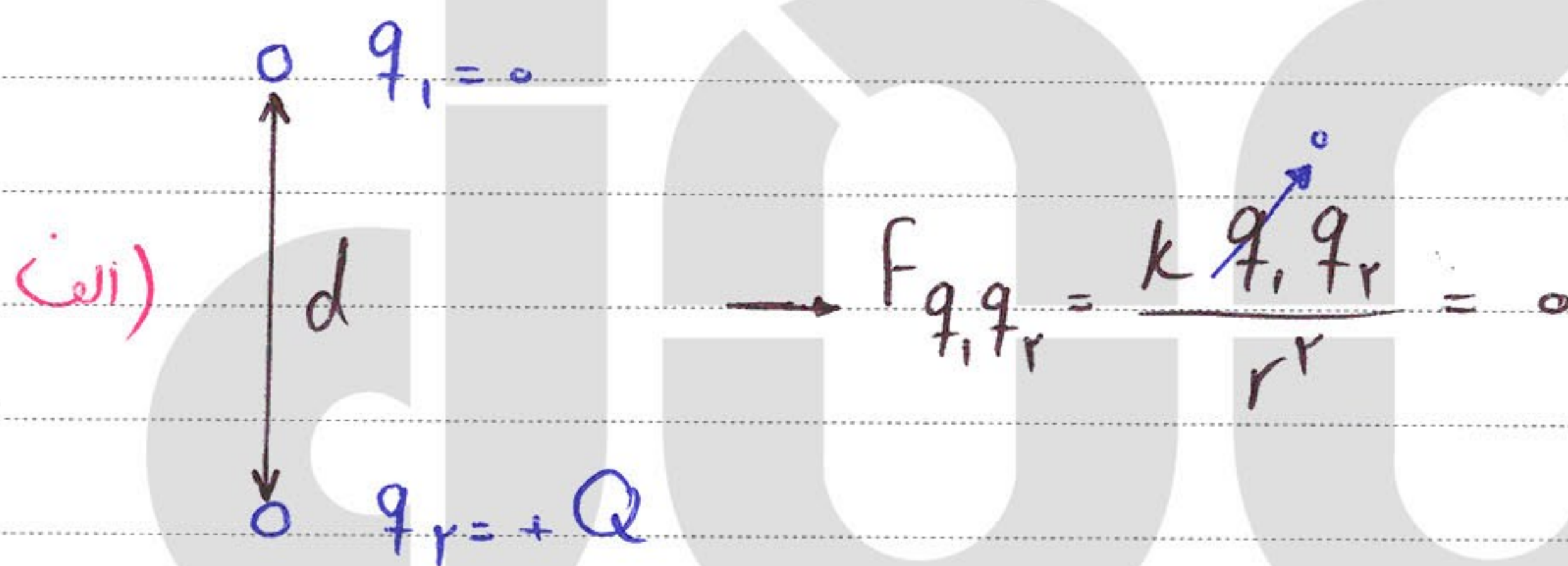
بار سوم در مقابل قرار می گیرد ✓

بار سوم خارج دو بار نزدیک بار اولیته و $1q_1 > 1q_2$ و q_3 $-q_2$ $+q_1$

بار سوم بین دو بار نزدیک بار اولیته و $1q_1 > 1q_2$ و q_3 $+q_2$ $+q_1$

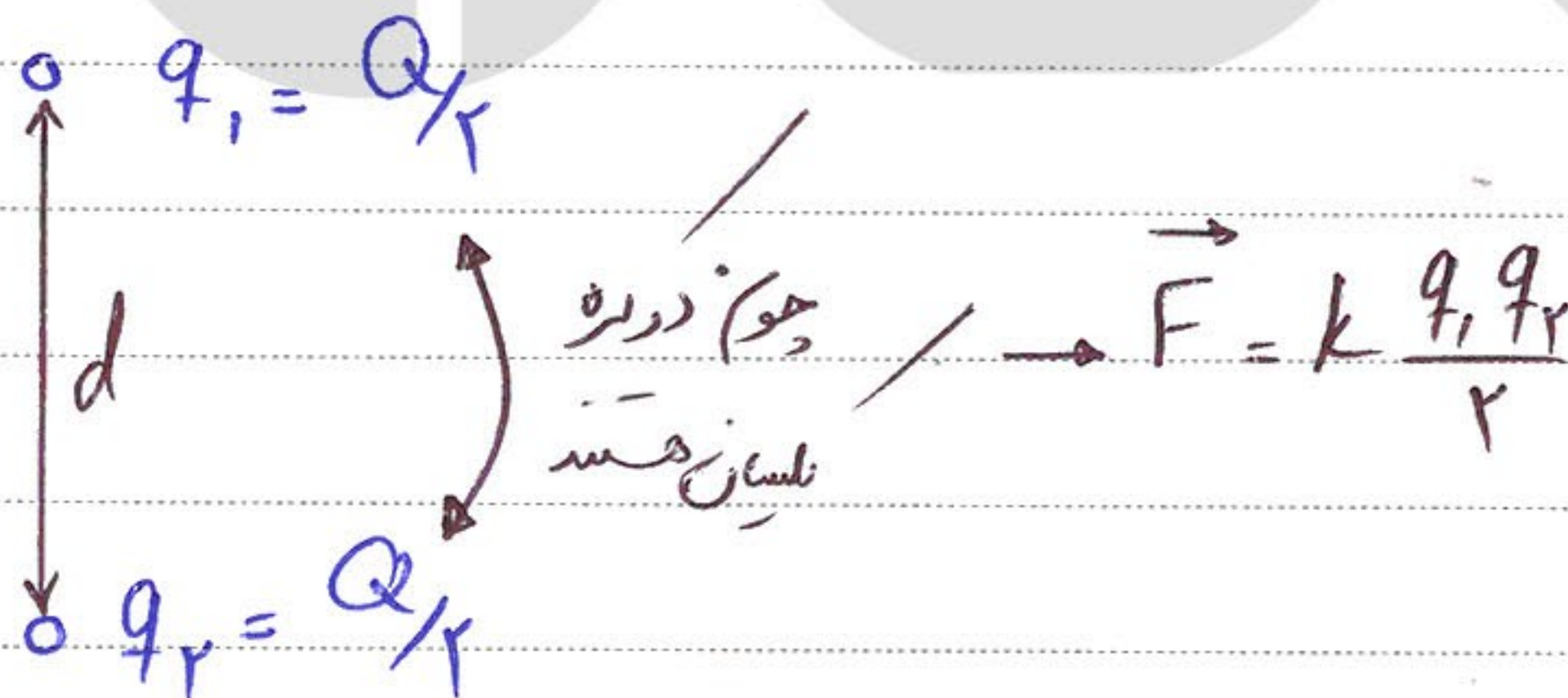
مثال: دو کره ۱ و ۲ دارای خصوصیات مشخص هستند. نیروی وارد شده به دو بار را در حالت های زیر

پیدا کنید آورده.



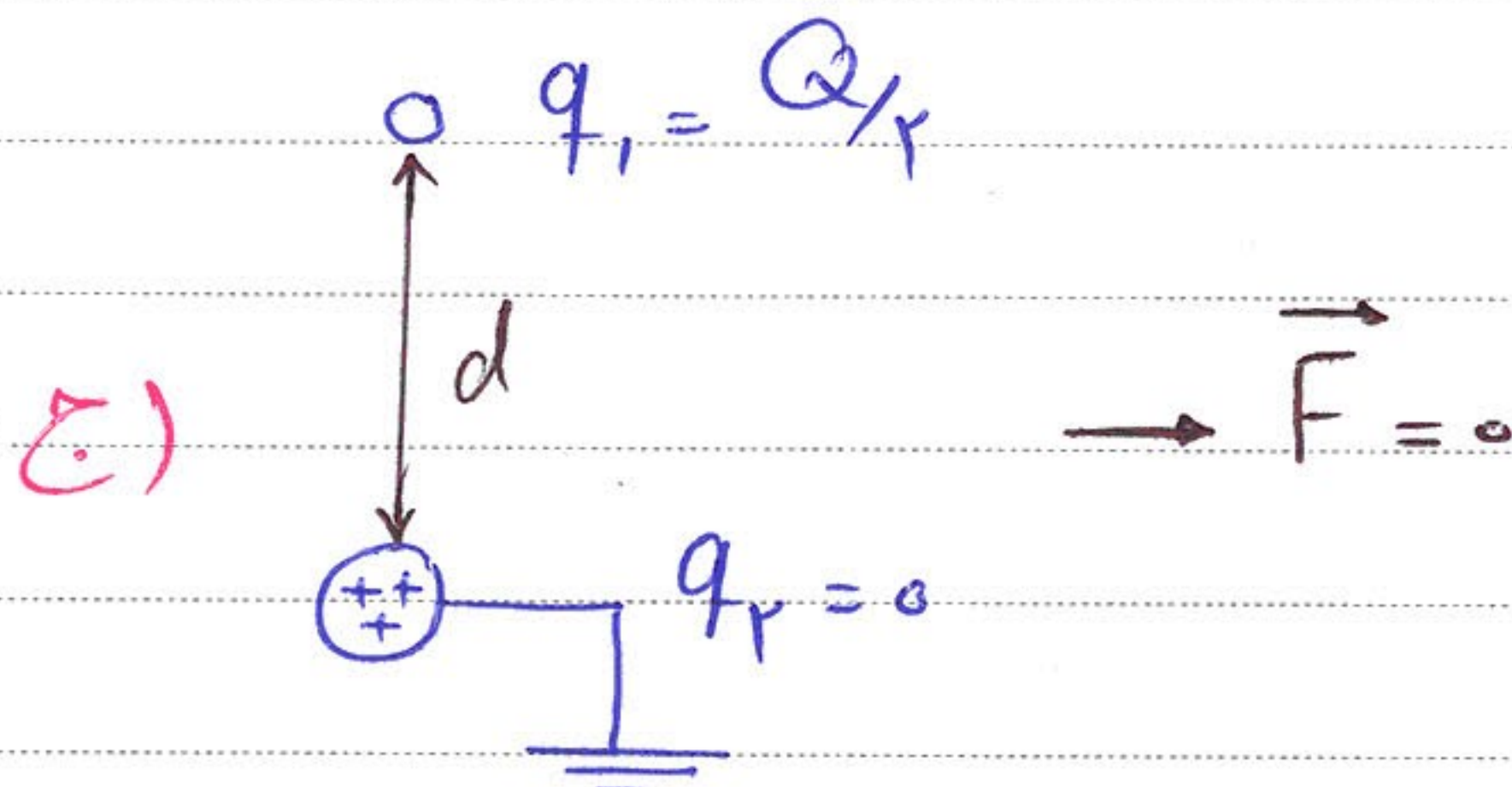
(ب) دو بار به هم می چسبند و سپس

در فاصله قطبی قرار می گیرند.



سیستم دایره ای که نسبت برای همین

قانون با بستن بار دایره ای نسبت



فصل دوم

میدان‌های الکتریکی

میدان الکتریکی: هر بار الکتریکی اطراف خود میدان الکتریکی دارد. به توسط این میدان به

بارهای دیگر نیرو وارد می‌کند.

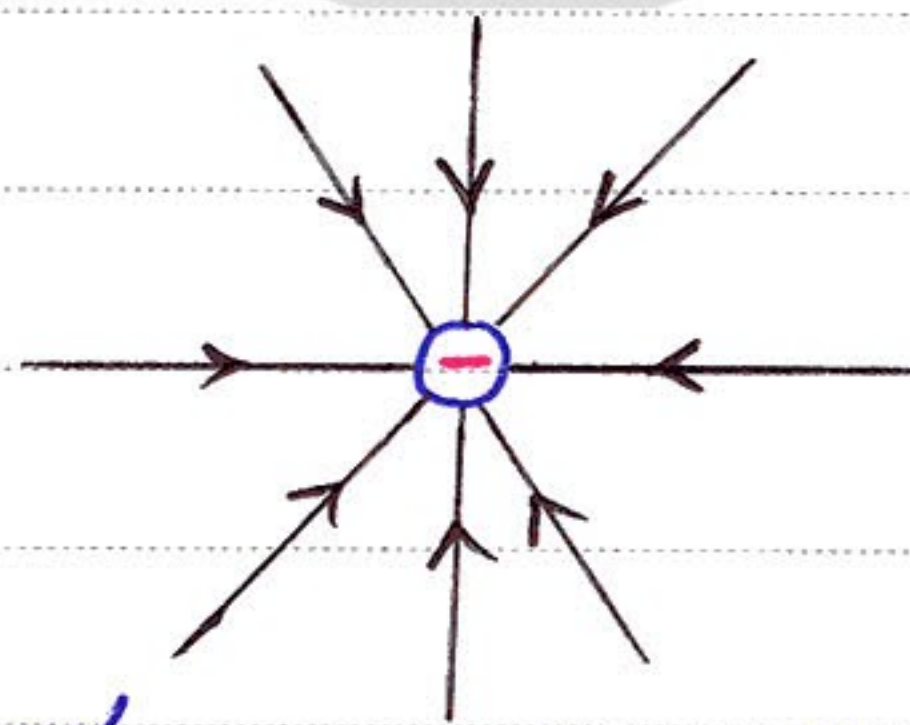
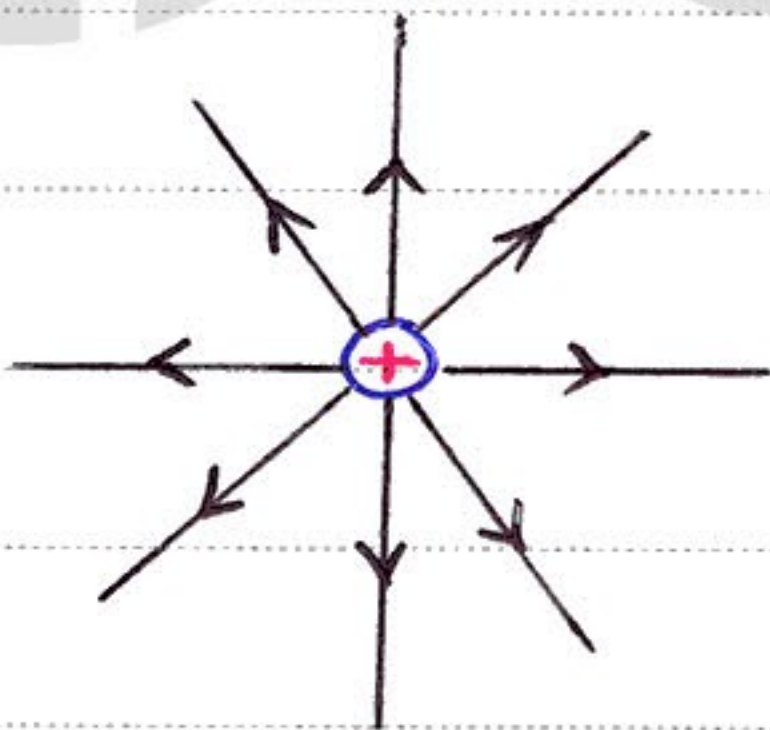
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \left(\frac{N}{C} \right)$$

– میدان الکتریکی یک لست برداری است و هم جهت با نیروی الکتریکی می‌باشد.

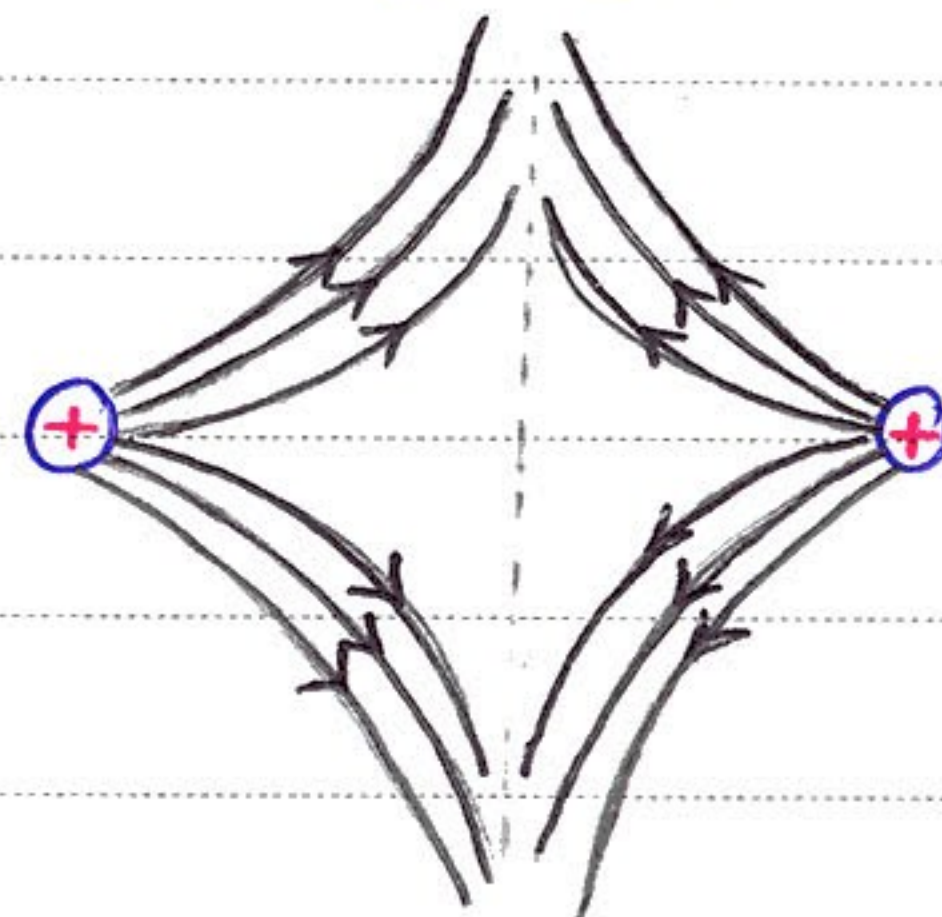
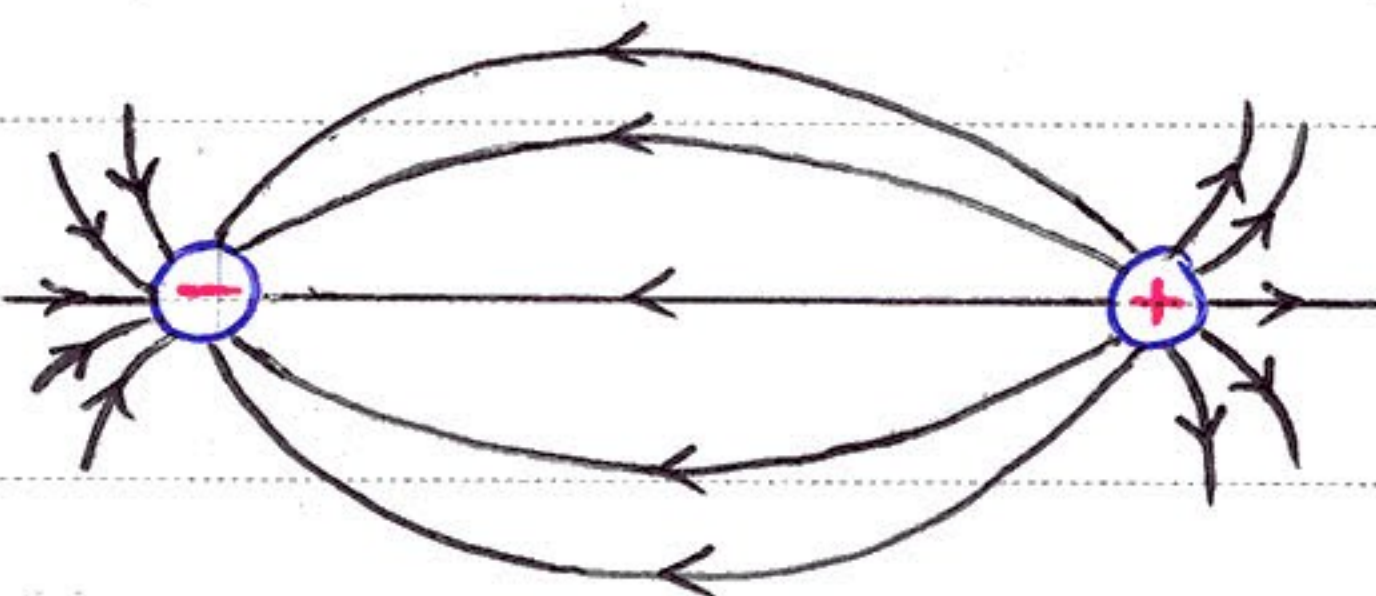
خطوط میدان الکتریکی: این خطوط میدان الکتریکی مستقیم باشد جهت میدان الکتریکی در راستای

این خطوط است و این خطوط انحناء دارند جهت خطوط میدان الکتریکی مناسب برای خطوط

است.



– این تعداد خطوط میدان بستری باشد میدان در آن نقطه قوی‌تر است.



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{k q q_0}{r^2} \hat{r} / q_0 = \frac{k q}{r^2} \hat{r}$$

بردار میدان الکتریکی به بار مثبت داخل می شود و خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج می شود.

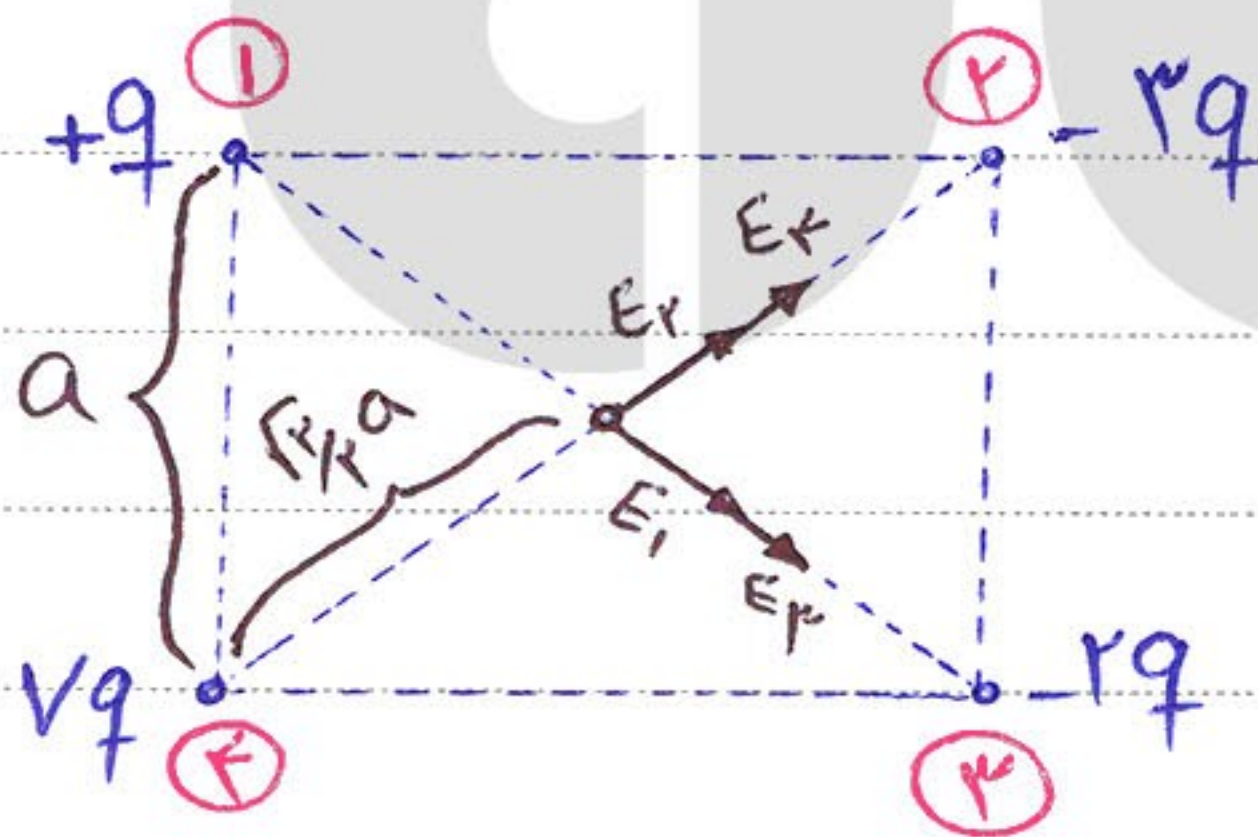
الترجین بار نقطه ای در فضا وجود داشته باشد جهت دارای میدان الکتریکی است.

$$\vec{E} = \frac{k q}{r^2} \hat{r}$$

در هر نقطه از فضا میدان الکتریکی بردار میدان الکتریکی به بار مثبت داخل می شود به صورت

برای میدان های ناشی از همی بارها محاسبه می شود.

مثال: میدان الکتریکی در مرکز مربع را محاسبه کنید!

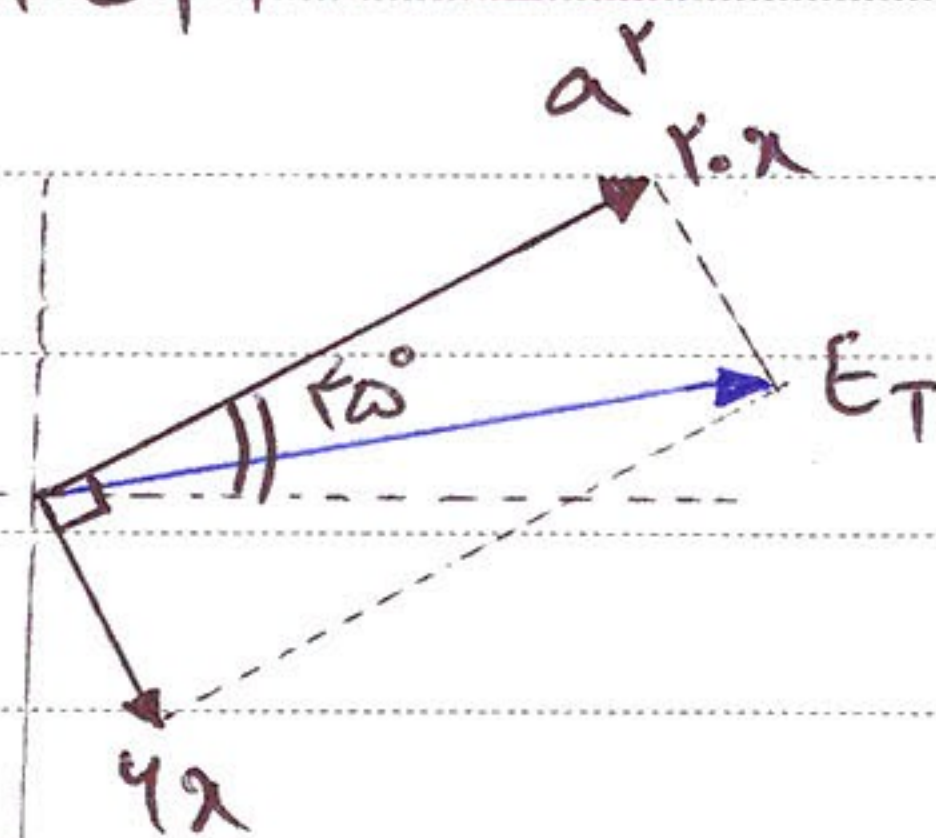


$$|E_1| = \frac{kq}{(r)^2} = \frac{2qk}{a^2}; |E_2| = \frac{12kq}{a^2}$$

$$|E_3| = \frac{4kq}{a^2}; |E_4| = \frac{4kq}{a^2}$$

$$\begin{cases} |E_1 + E_4| = \frac{18kq}{a^2} \\ |E_2 + E_3| = \frac{18kq}{a^2} \end{cases}$$

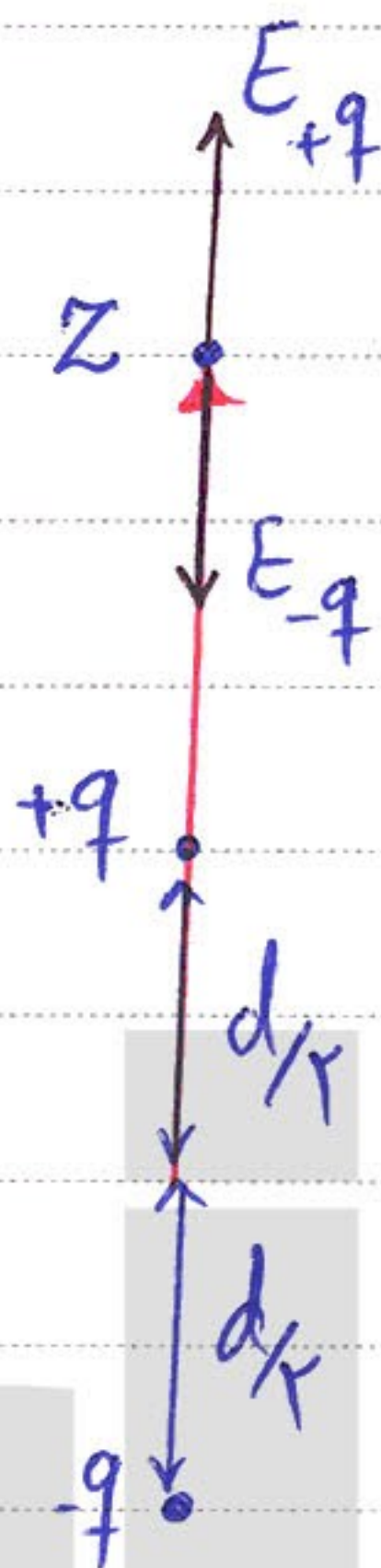
$$\Rightarrow E_T = \sqrt{\frac{18^2 k^2 q^2}{a^4} + \frac{18^2 k^2 q^2}{a^4}}; x = \frac{kq}{a^2}$$



$$\begin{cases} 18x \cos 45^\circ + 18x \cos 45^\circ = 18x \\ 18x \sin 45^\circ - 18x \sin 45^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{V \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r} \kappa}{1/r} = \frac{V}{1/r} \Rightarrow \theta = \text{Arc tan} \left(\frac{V}{1/r} \right)$$

مثال: میدان الکتریکی برآیند در نقطه Z، بدست آورید. (در قطبی الکتریکی)



$$|\vec{E}| = |\vec{E}_{+q}| - |\vec{E}_{-q}|$$

$$|\vec{E}_{+q}| = \frac{kq}{(z - d/r)^2} ; |\vec{E}_{-q}| = \frac{kq}{(z + d/r)^2}$$

$$|\vec{E}| = \frac{kq}{(z - d/r)^2} - \frac{kq}{(z + d/r)^2}$$

$$\rightarrow |\vec{E}| = \frac{kq}{z^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{d}{rz}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{rz}\right)^2} \right)$$

$$\rightarrow |\vec{E}| = \frac{kq}{z^2} \left(\frac{(1 + \frac{d}{rz})^2 - (1 - \frac{d}{rz})^2}{\left((1 - \frac{d}{rz})(1 + \frac{d}{rz})\right)^2} \right) = \dots = \frac{rkqd}{z^3} \left(\frac{1}{(1 - (\frac{d}{rz})^2)^2} \right)$$

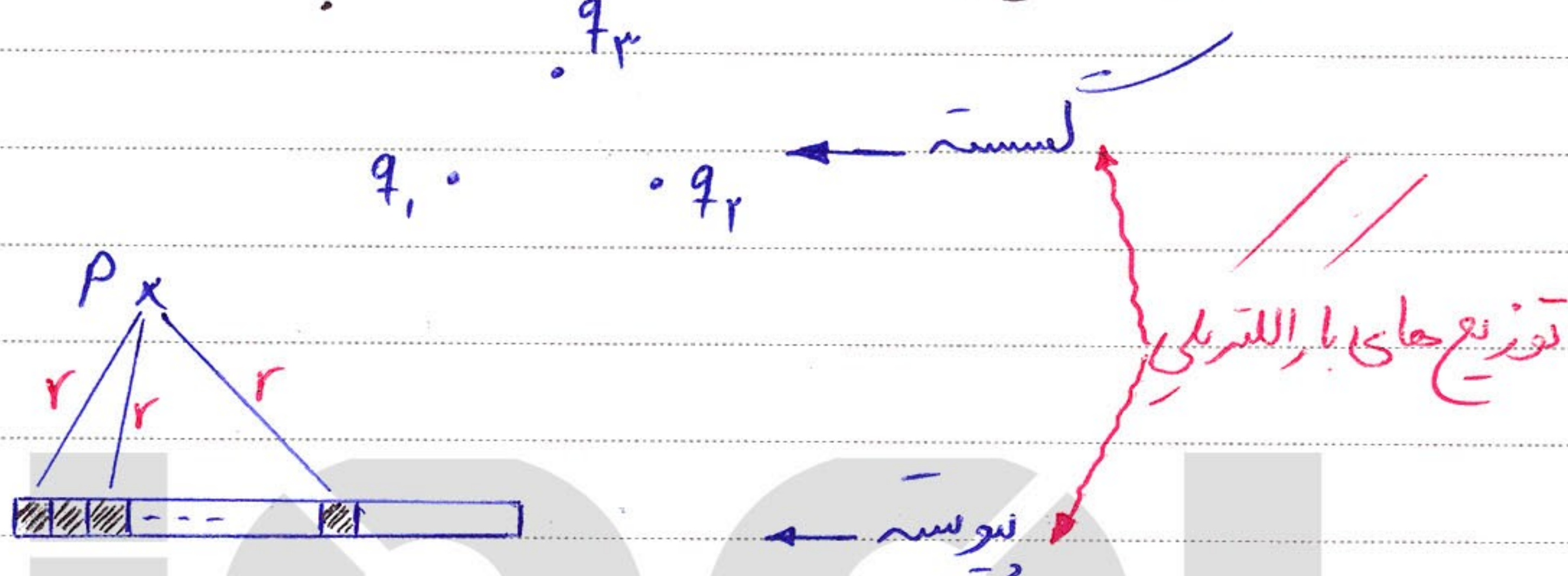
$$\rightarrow E = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon_r z^3} \times \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{d}{rz}\right)^2\right)^2}$$

$$z \gg d \text{ (فواصل دور)} \rightarrow \frac{d}{rz} = 0 \rightarrow E = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon_r z^3}$$

میدان دوقطبی $(\vec{P})$: برداری است که در دوقطبی الکتریکی از بار مثبت به بار منفی رسم می‌شود.

$$q d = |\vec{P}| \quad \vec{E} = \frac{\vec{P}}{2\pi\epsilon_0 Z^3}$$

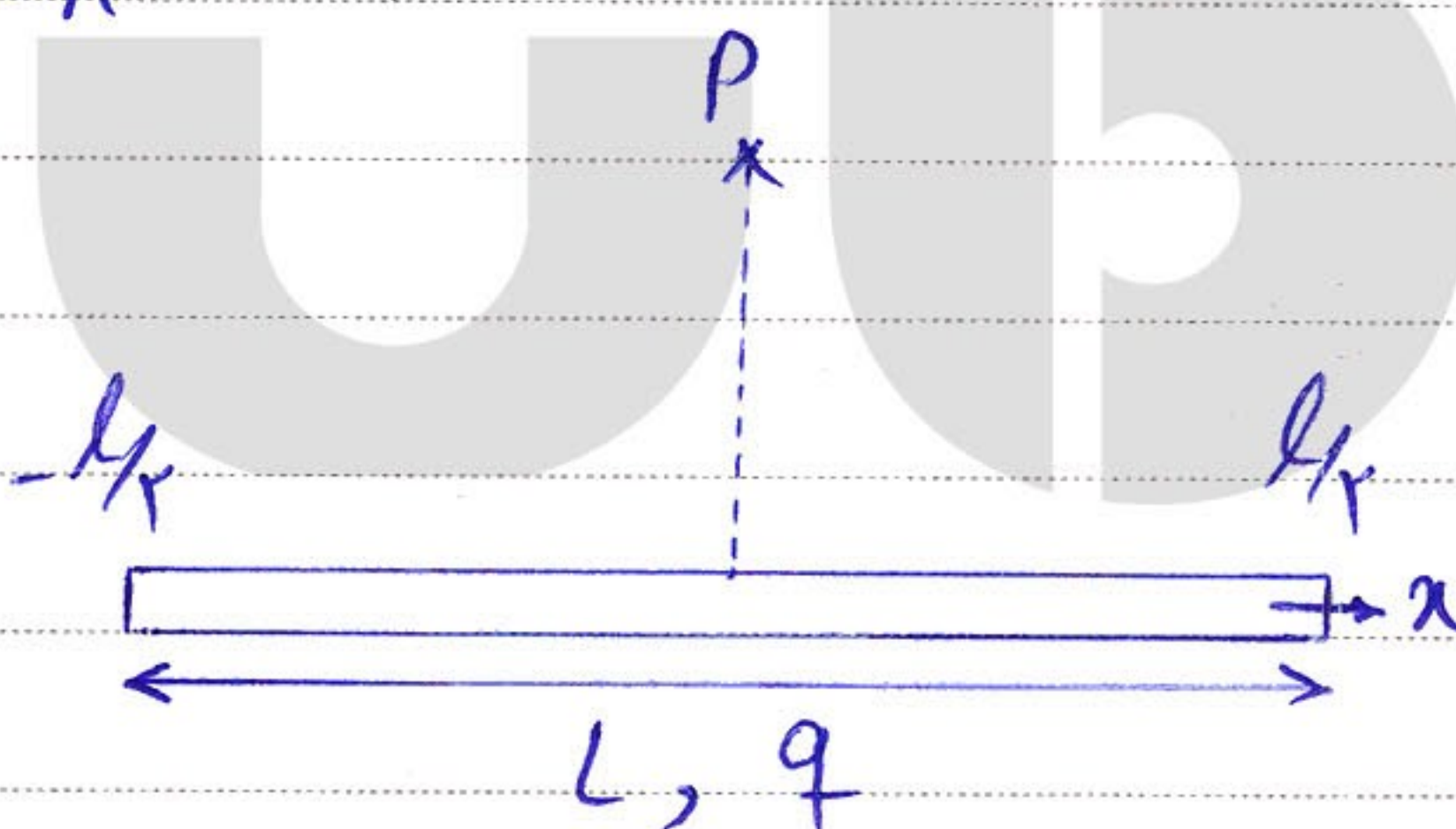
(میدان حاصل از $\vec{P}$ از فاصله Z از مرکز دوقطبی)



$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$$

$L \rightarrow$ طول میله

$q \rightarrow$ بار کل



مراحل حل مسائل توزیع بار پیوسته

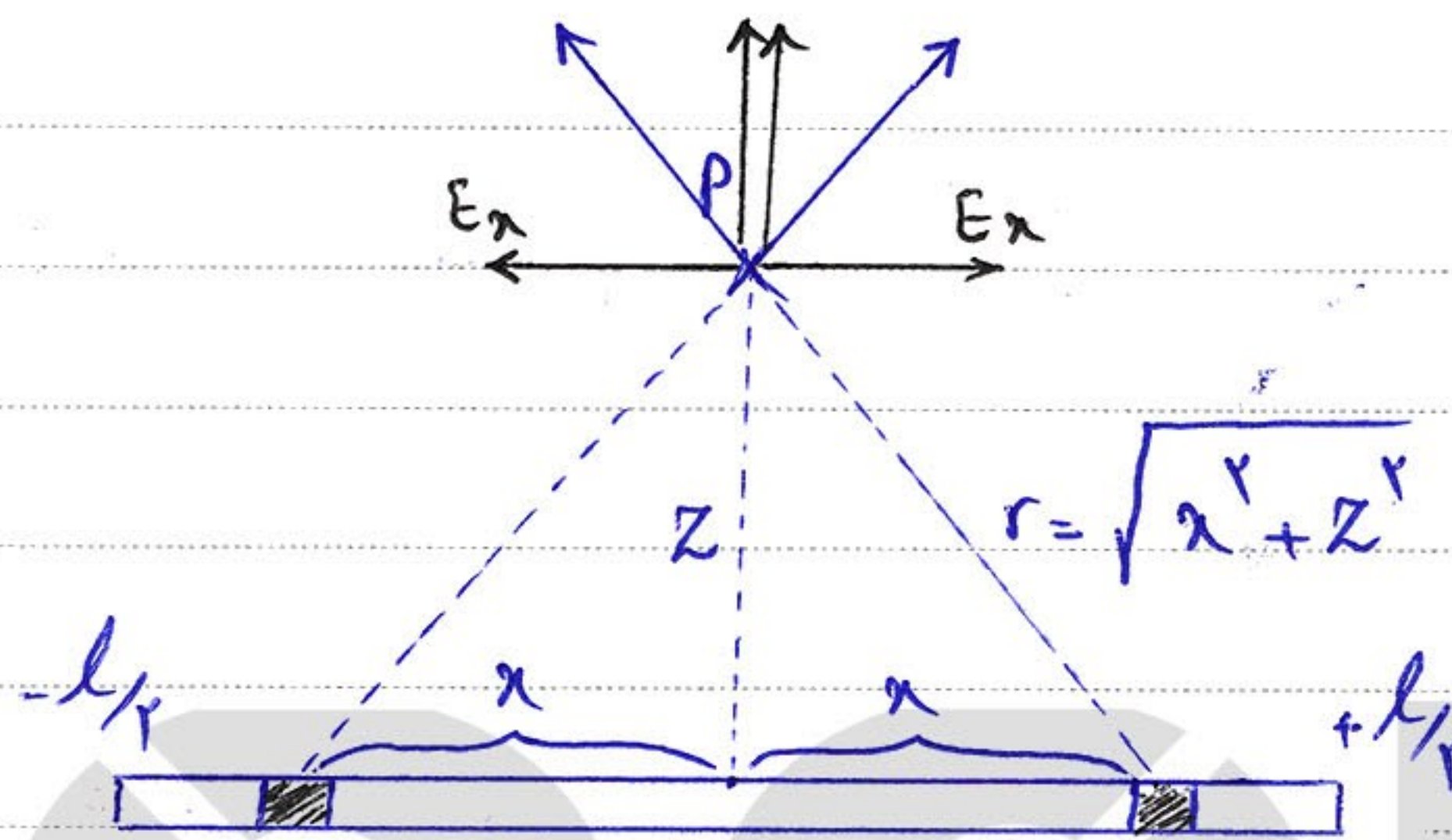
(۱) انتخاب دستگاه مختصات مناسب و مبدأ آن (ستاره).

(۲) انتخاب المان بار بر روی توزیع بار در یک محل دلخواه و محاسبه مقدار بار آن.

(۳) محاسبه فاصله المان بار تا محل مورد نظر (جایی که میدان در آن نقطه محاسبه می‌شود).

(۴) محاسبی میدان الکتریکی را، در محل مورد نظر به همراه مؤلفه‌های آن.

(۵) انتگرال سری از مؤلفه‌های میدان الکتریکی.



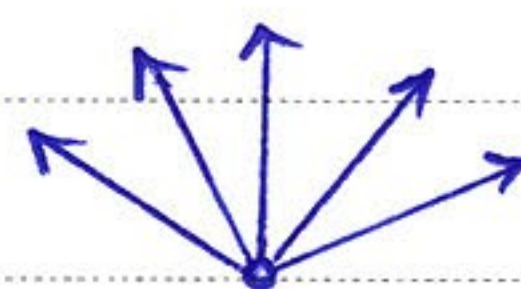
* محل مورد نظر را هر کجا به بزرگ z ، با توجه به هم تغییر می‌لند.

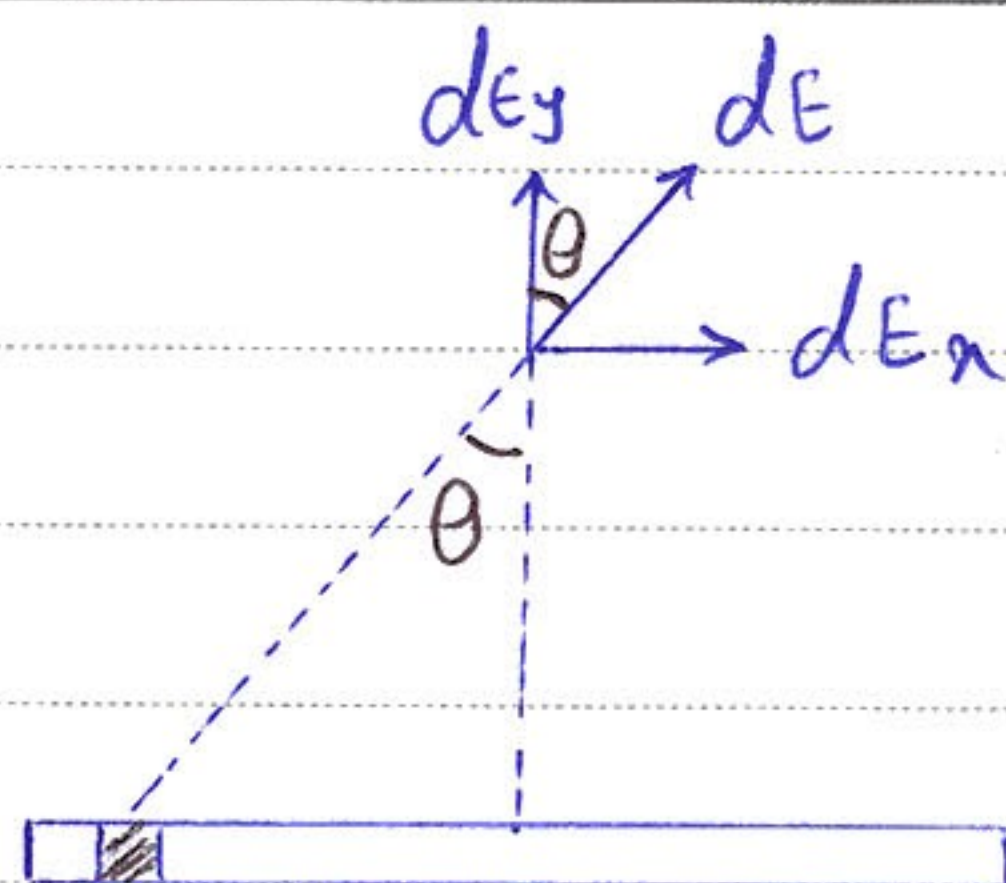
$$\frac{dq}{q} = \frac{dl}{L} \rightarrow dq = \frac{q}{L} dl = \frac{q}{L} dx$$

$$dE = \frac{k q d}{r^2} = \frac{k \frac{q}{L} dx}{(\sqrt{x^2 + z^2})^2}$$

* مؤلفه‌های E میدان الکتریکی دوبه دو بدینرا حتی می‌لند.

$$\sum E_x = 0$$





$$dE_y = dE \cos \theta$$

$$\Rightarrow dE_y = \frac{kq dx}{L(x^2 + Z^2)^{3/2}} \times \frac{Z}{\sqrt{x^2 + Z^2}}$$

$$\rightarrow E_y = \int dE_y = \frac{kqZ}{L} \int \frac{dx}{(x^2 + Z^2)^{3/2}} \rightarrow \begin{cases} x = Z \tan \theta \\ dx = Z(1 + \tan^2 \theta) d\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{Z(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(Z^2 \tan^2 \theta + Z^2)^{3/2}} = \int \frac{Z \sec^2 \theta}{Z^3 \sec^3 \theta} d\theta = \int \frac{1}{Z^2 \sec \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{Z^2} \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = \frac{1}{Z^2} \int \cos \theta d\theta$$

$$x = L/r \rightarrow \theta = \text{Arc tan}(x/r) = \text{Arc tan}(L/rZ)$$

$$x = -L/r \rightarrow \theta = \text{Arc tan}\left(\frac{x-L}{rZ}\right)$$

$$E_y = \frac{kqZ}{LZ^2} \int_{\tan^{-1}(-L/rZ)}^{\tan^{-1}(L/rZ)} \cos \theta d\theta = \frac{kq}{LZ} \sin \theta \Big|_{\text{Arc tan}(-L/rZ)}^{\text{Arc tan}(L/rZ)}$$

$$= \frac{kq}{LZ} \left[\sin(\tan^{-1}(L/rZ)) - \sin(\tan^{-1}(-L/rZ)) \right]$$

$$\star \text{ اگر طول میانی بی نهایت باشد } \rightarrow \frac{kq}{LZ} \left[\sin(\tan^{-1}(\infty)) - \sin(\tan^{-1}(-\infty)) \right]$$

$$= \frac{\lambda k q}{L Z} = \frac{\lambda q}{L \epsilon_0 \epsilon_r Z} = \frac{q}{2 L \epsilon_0 \pi Z}$$

کارترین بد بدی

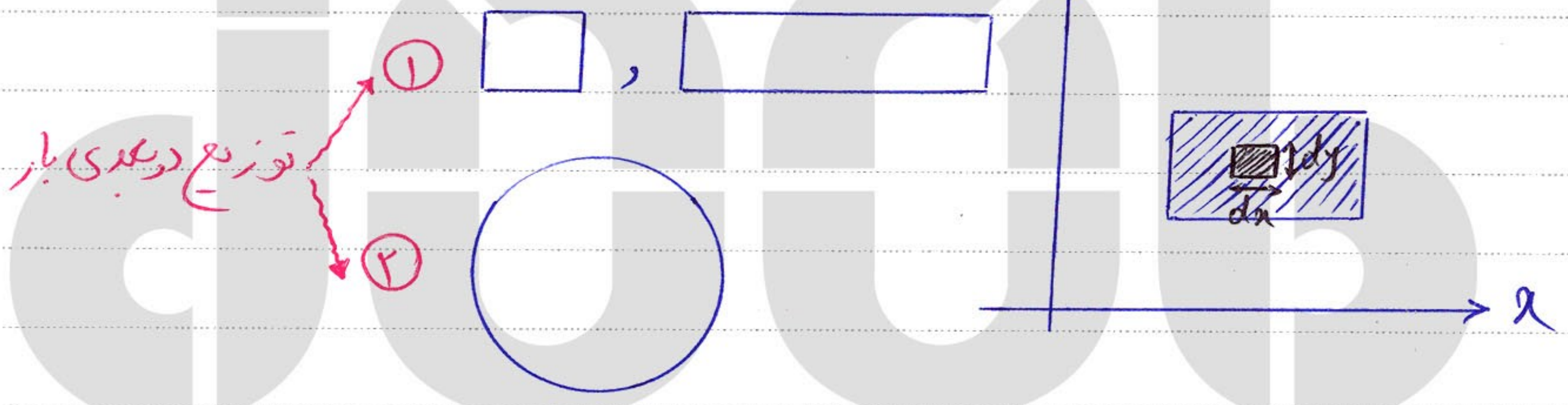
(خط بار) توزیع بد بدی

x

$$\frac{q}{L} \rightarrow dq = \frac{q}{L} dx \rightarrow dq = \lambda dx$$

بار در واحد طول (چگالی خطی بار)

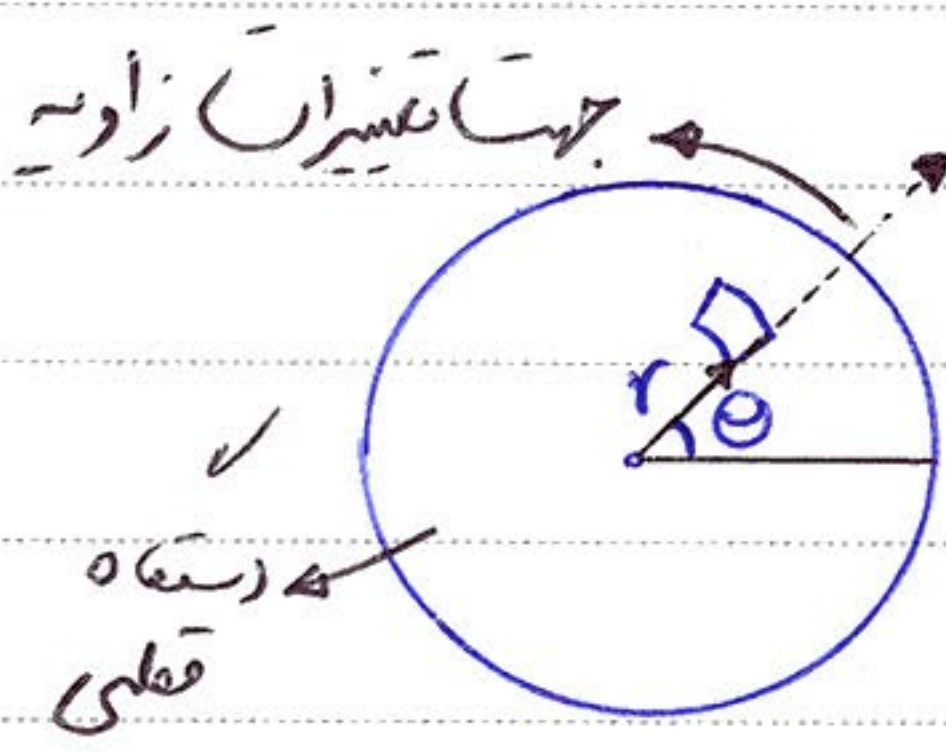
① دستگاه مختصات دو بعدی



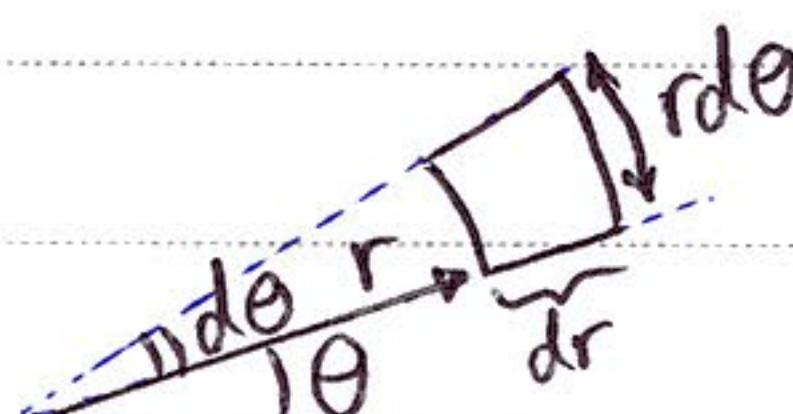
$$\frac{q}{S} \rightarrow dq = \frac{q}{S} ds \rightarrow dq = \sigma ds$$

بار در واحد سطح (چگالی سطحی بار)

$$\rightarrow dq = \sigma dx dy$$



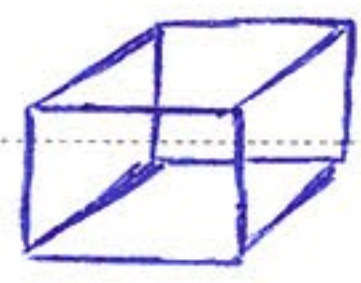
③ دستگاه دایره ای (دستگاه قطبی)

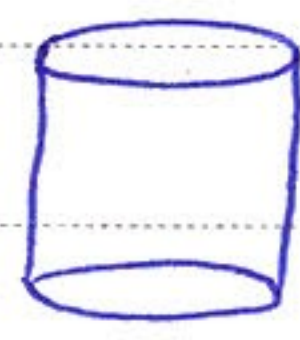


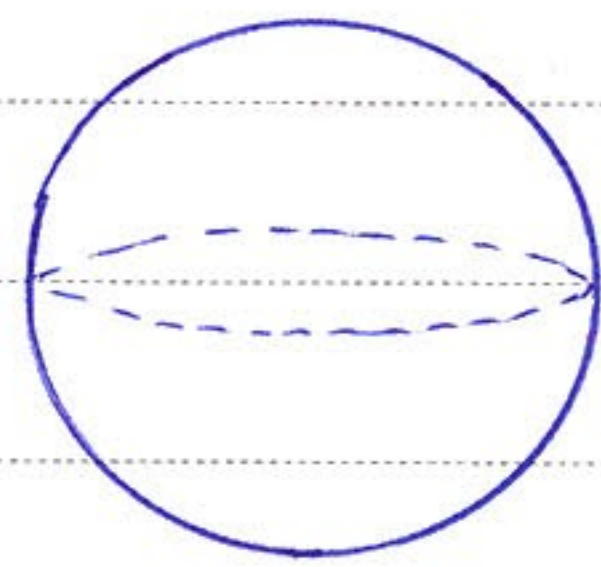
$$ds = r dr d\theta$$

$$\Rightarrow dq = \sigma r dr d\theta$$

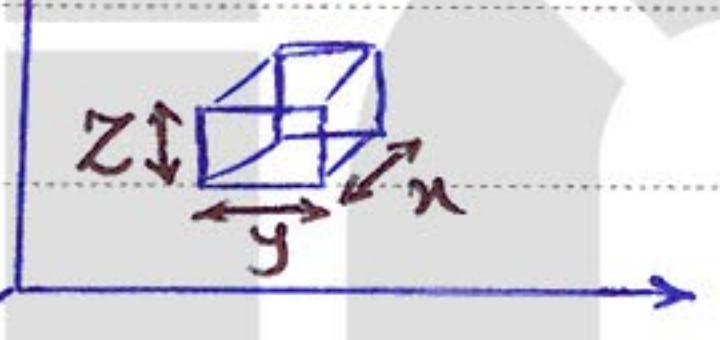
توزیع سه بعدی بار

①  → دستگاه کارتزین ۳ بعدی

②  → (r, θ, z) دستگاه استوانه‌ای

③  → (r, θ, ϕ) دستگاه کروی

①



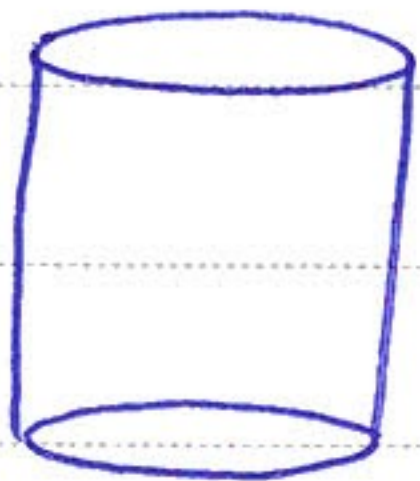
q r
 dq dr

$\Rightarrow dq = \left(\frac{q}{r}\right) dr = \rho dr$

که میزان بار در واحد حجم (چگالی حجمی بار)

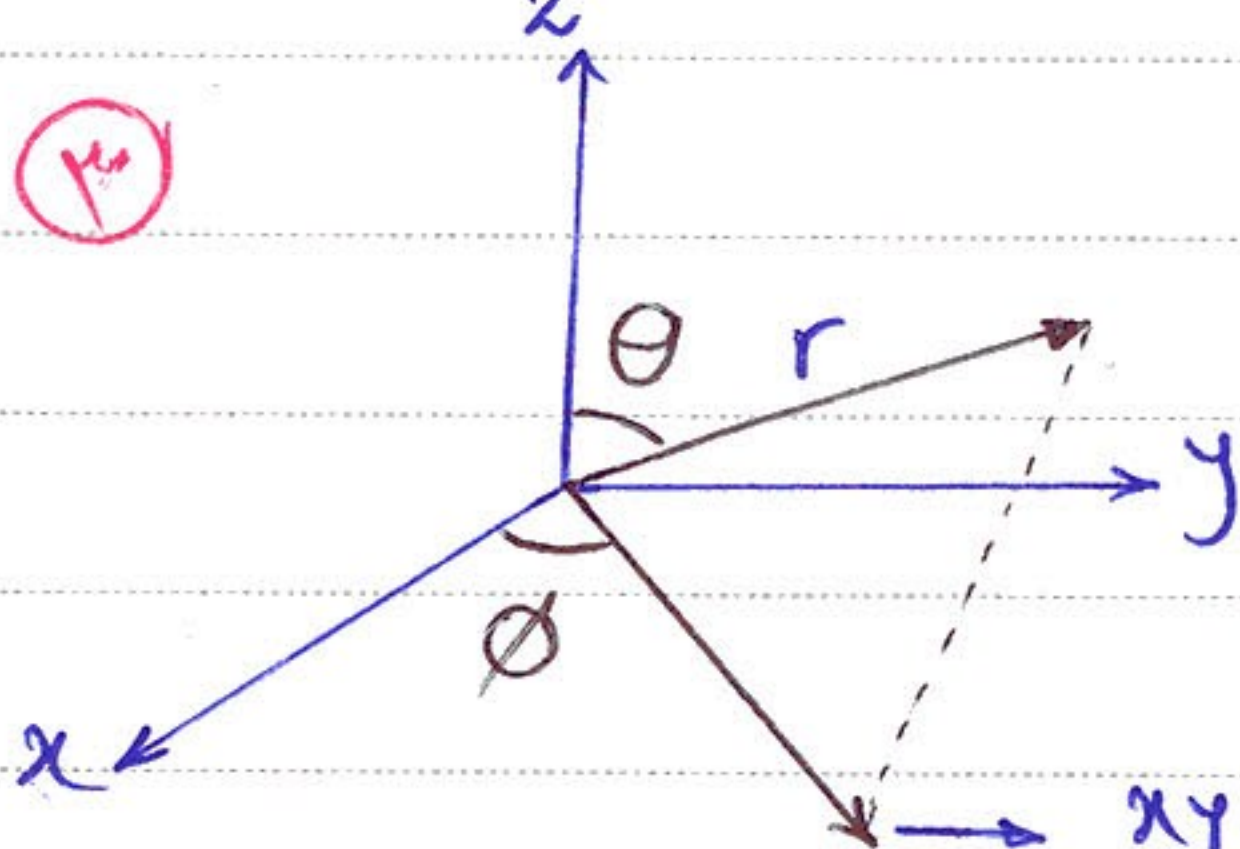
$\Rightarrow dr = dx dy dz \rightarrow dq = \rho dx dy dz$

②



$\rightarrow dr = r d\theta dr dz \Rightarrow dq = \rho r d\theta dr dz$

③



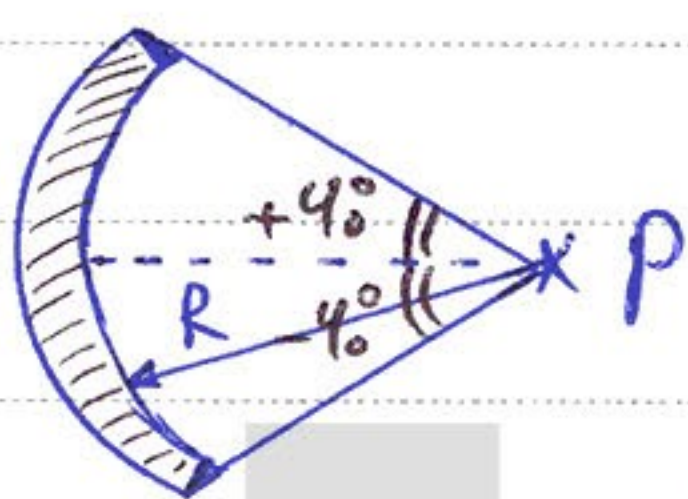
— r ، زاویه θ در تصویر کنیم، این تصویر با محور x زاویه ϕ می‌سازد.

تصویر r بر روی صفحه xy

$$dr = r' \sin \theta d\theta d\phi dr \Rightarrow dq = \rho r' \sin \theta d\theta d\phi dr$$

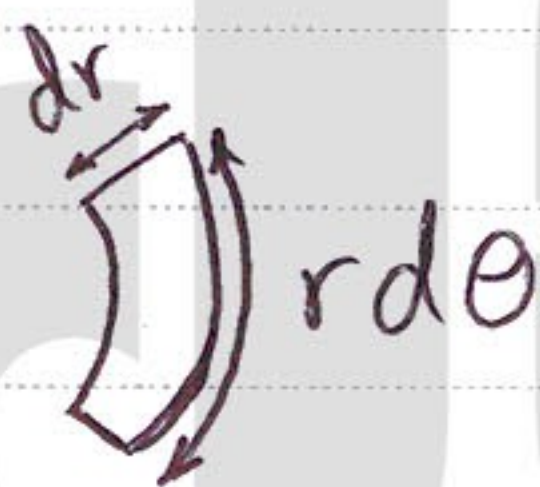
مثال: یک کمان باردار با شعاع انتهایی R و حدود تغییرات زاویه ای -4° تا $+4^\circ$ در شکل مشخص است. میدان الکتریکی ناشی از این کمان را در مرکز بدست آورید.

$$dq = \lambda r dr d\theta \quad (r \text{ ثابت است پس } dr \text{ نداریم})$$



چون به مسیر دایره ای است دی بار در شعاع نسبت درونی محیط دایره است

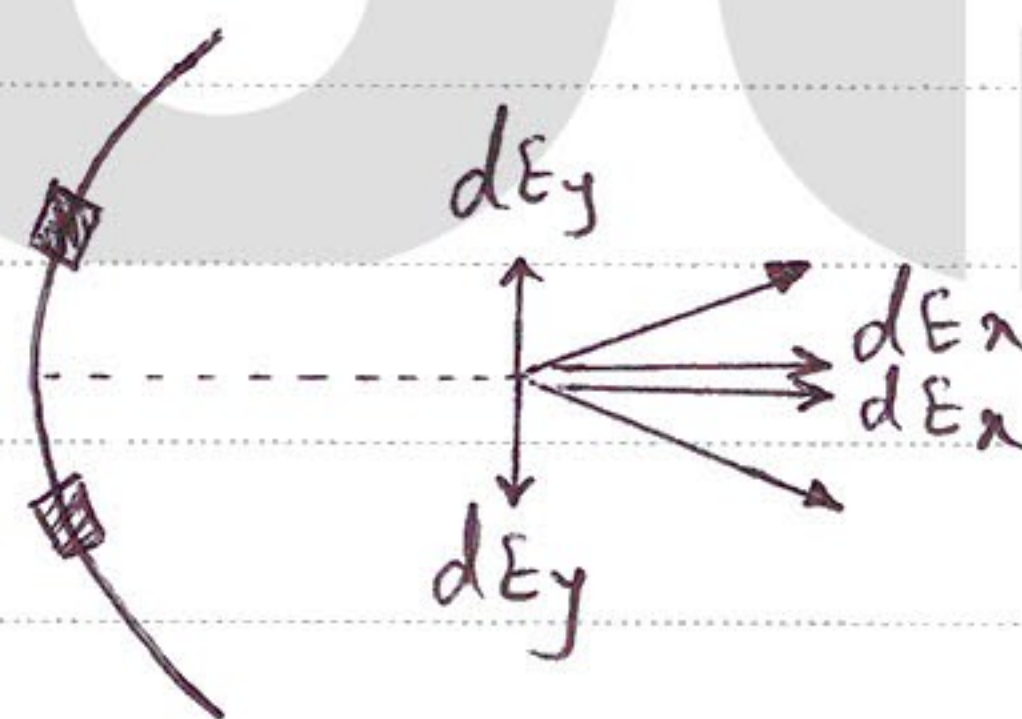
$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$$



چون فقط روی محیط بار داریم



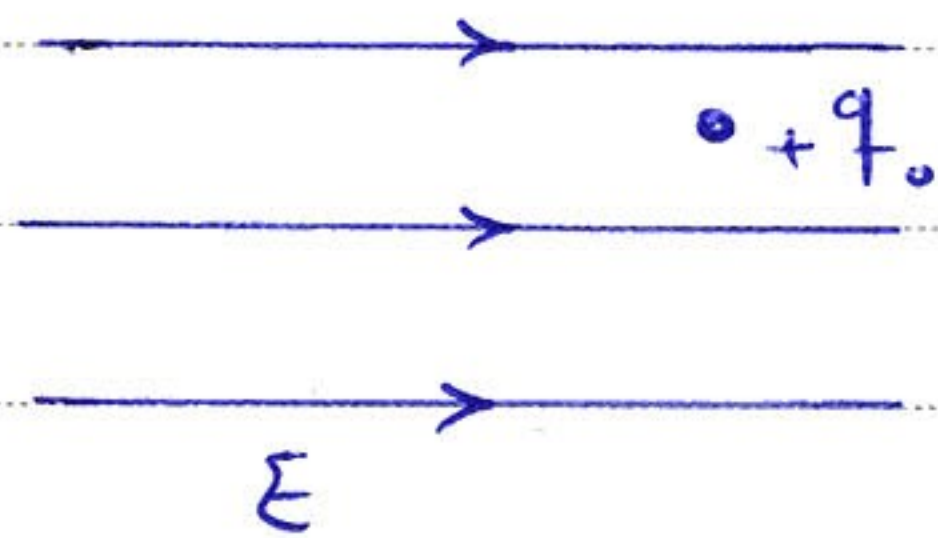
$$dE = \frac{k q d}{r^2} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$



$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} \Rightarrow \begin{cases} E_y = 0 \rightarrow \text{مؤلفه های y در جهت برعکس می شود} \\ dE_x = dE \cos \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \int \frac{\lambda d\theta}{4\pi \epsilon_0 R} \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0 R} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \cos \theta d\theta$$

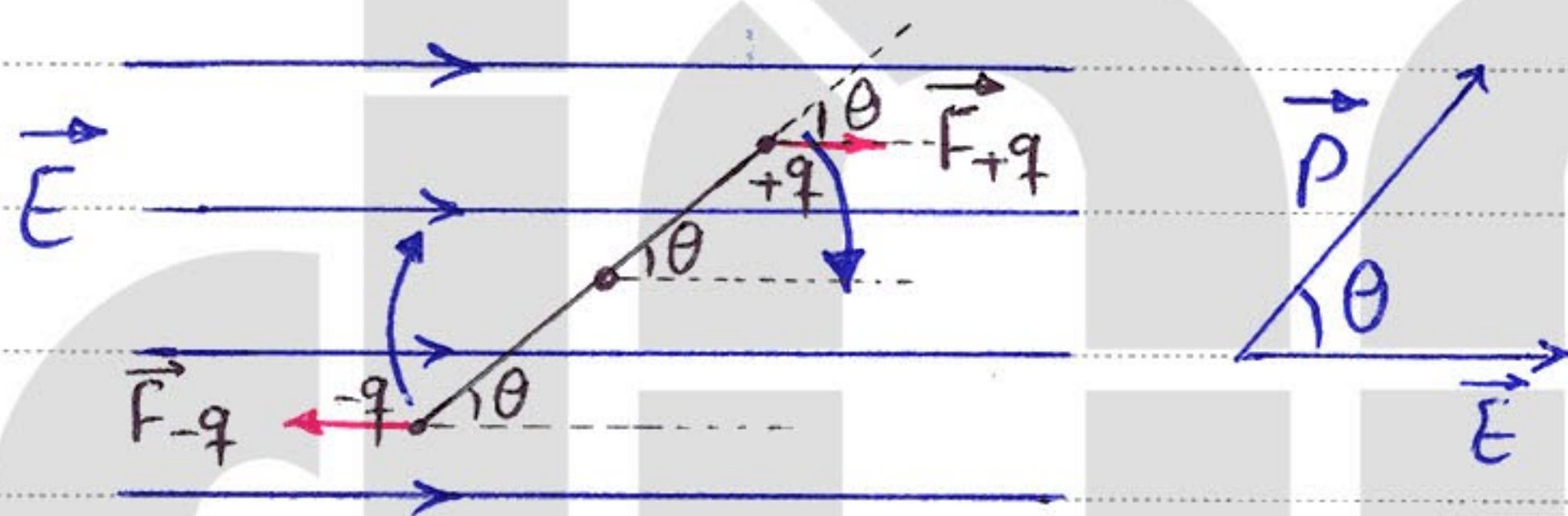
بار نقطه‌ای در میدان دو قطبی



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow |\vec{F}| = q |\vec{E}|$$

* اگر بار مثبت باشد نیروی وارد بر آن از طرف میدان و در جهت میدان است.

* اگر بار منفی باشد نیروی وارد بر آن از طرف میدان و در خلاف جهت میدان است.



دو قطبی حرکت
استاتی ندارد.

$$\tau_+ = \tau_{q_+} = r F \sin \theta = -d_+ F \sin \theta$$

(لشاور ساعتگرد)

$$\tau_- = \tau_{q_-} = r F \sin \theta = -d_- F \sin \theta$$

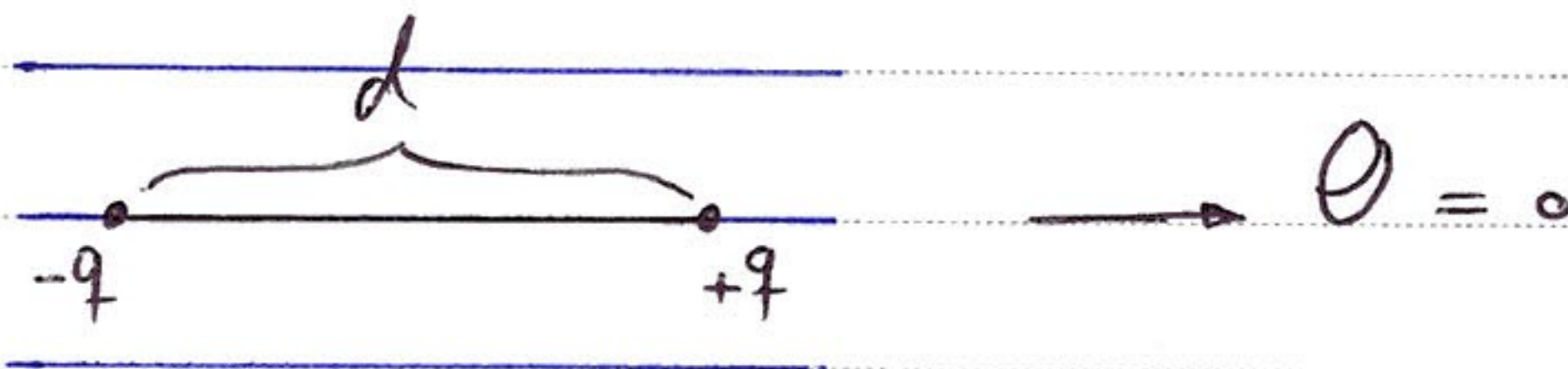
$$\tau = -d_+ F \sin \theta - d_- F \sin \theta = -d F \sin \theta$$

$$\begin{cases} F = qE \\ \tau = -F d \sin \theta = -q E d \sin \theta = -p E \sin \theta = -p \times E \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = -\vec{p} \times \vec{E} \quad (\text{ضرب خارجی})$$

انرژی پتانسیل دو قطبی در میدان الکتریکی

اگر دو قطبی هم‌راستا با میدان باشد ($\theta = 0$) در بیشینه (Min) انرژی پتانسیل قرار داریم. (میدان باعث حرکت دو قطبی الکتریکی نمی‌شود)



$$\Delta U = -W = -\int \tau d\theta ; \Delta U = U_f - U_i$$

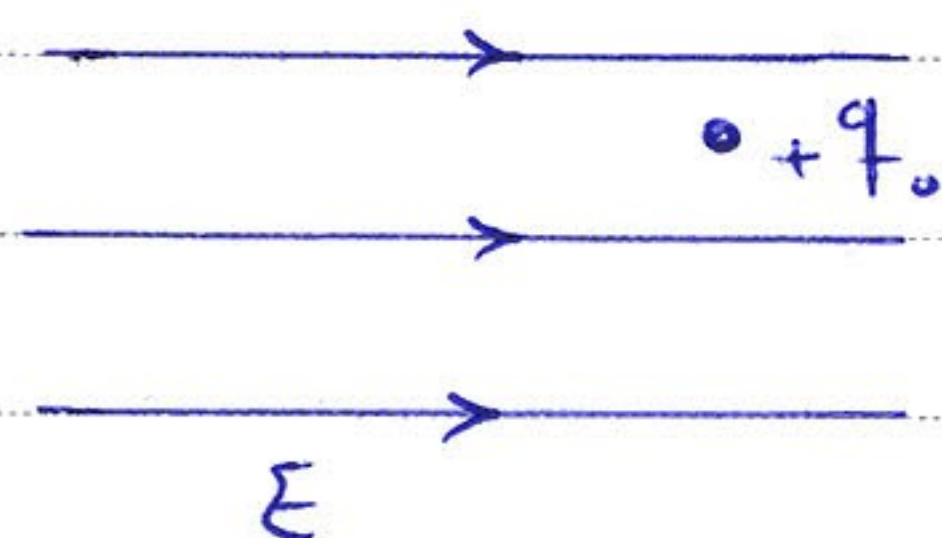
صفر انرژی پتانسیل در ($\theta = \pi/2$)

$$\Rightarrow \Delta U = U = -\int_{\pi/2}^{\theta} \tau d\theta \Rightarrow U = \int_{\pi/2}^{\theta} -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow U = -pE \text{ (min)} \\ \theta = \pi \rightarrow U = pE \text{ (max)} \end{cases}$$

$$\theta = \pi/2 \rightarrow U = 0$$

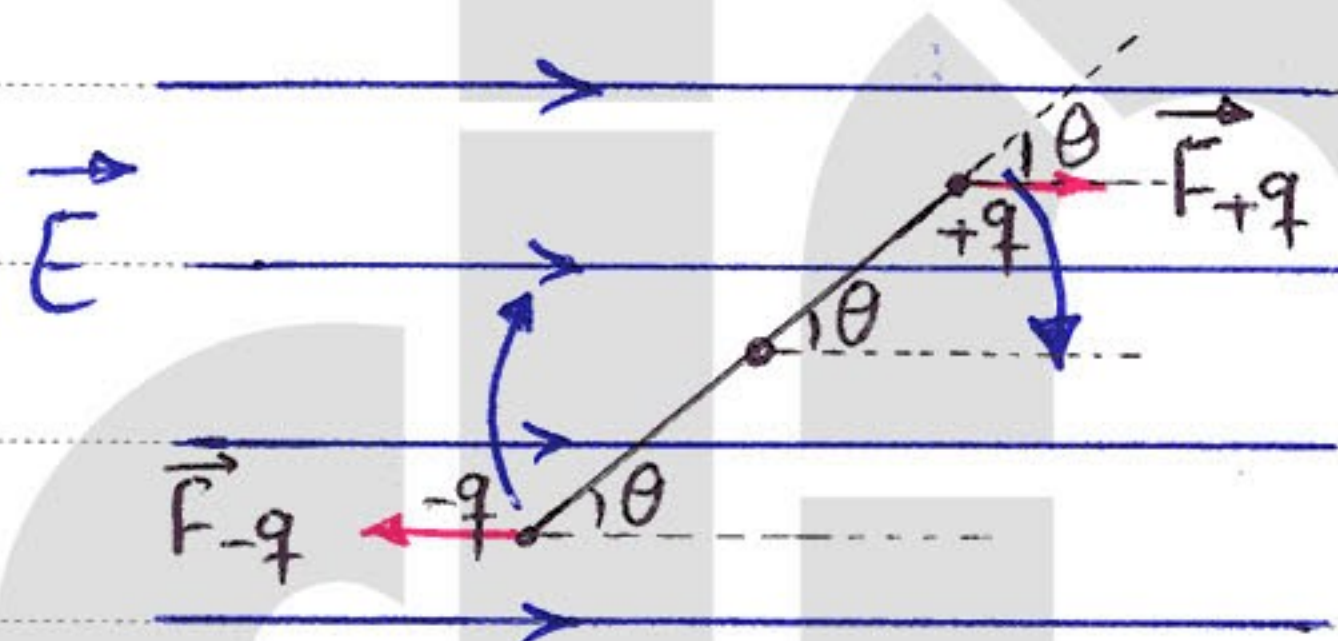
بار نقطه‌ای در میدان دو قطبی



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow |\vec{F}| = q |\vec{E}|$$

* اگر بار مثبت باشد نیروی وارد بر آن از طرف میدان در جهت میدان است.

* اگر بار منفی باشد نیروی وارد بر آن از طرف میدان در خلاف جهت میدان است.



دو قطبی حرکت
استاتی ندارد.

$$\tau_1 = \tau_{q_+} = r F \sin \theta = -d_{1r} F \sin \theta$$

(نسبت ساعتگرد)

$$\tau_2 = \tau_{q_-} = r F \sin \theta = -d_{2r} F \sin \theta$$

$$\tau = -d_{1r} F \sin \theta - d_{2r} F \sin \theta = -d F \sin \theta$$

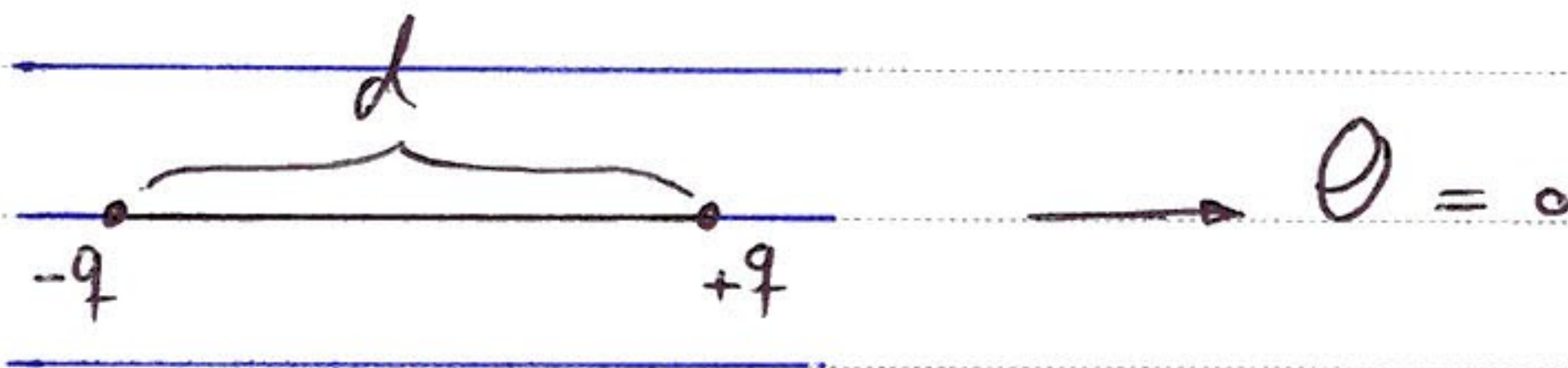
$$\left\{ \begin{array}{l} F = qE \end{array} \right.$$

$$\tau = -F d \sin \theta = -q E d \sin \theta = -P E \sin \theta = -P \times E$$

$$\vec{\tau} = -\vec{P} \times \vec{E} \quad (\text{ضرب خارجی})$$

انرژی پتانسیل دو قطبی در میدان الکتریکی

اگر دو قطبی هم‌استا با میدان باشد ($\theta = 0$) در بیشینه (Min) انرژی پتانسیل قرار داریم. (میدان باعث حرکت دو قطبی الکتریکی نمی‌شود)



$$\Delta U = -W = -\int \tau d\theta ; \Delta U = U_F - U_i$$

صفر انرژی پتانسیل در ($\theta = \pi/2$)

$$\Rightarrow \Delta U = U = -\int_{\pi/2}^{\theta} \tau d\theta \Rightarrow U = \int_{\pi/2}^{\theta} -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow U = -pE \text{ (min)} \\ \theta = \pi \rightarrow U = pE \text{ (max)} \end{cases}$$

$$\theta = \pi/2 \rightarrow U = 0$$

فصل سوم

قانون گاوس

قانون گاوس (مخصوص سیستم‌های دارای تقارن است)

$$\text{قانون کولن} \rightarrow E = \frac{F}{q} = \frac{kq}{r^2}$$

نُسخه: میزان عبور یکیت در واحد زمان

$$\text{نُسخه} \propto A$$

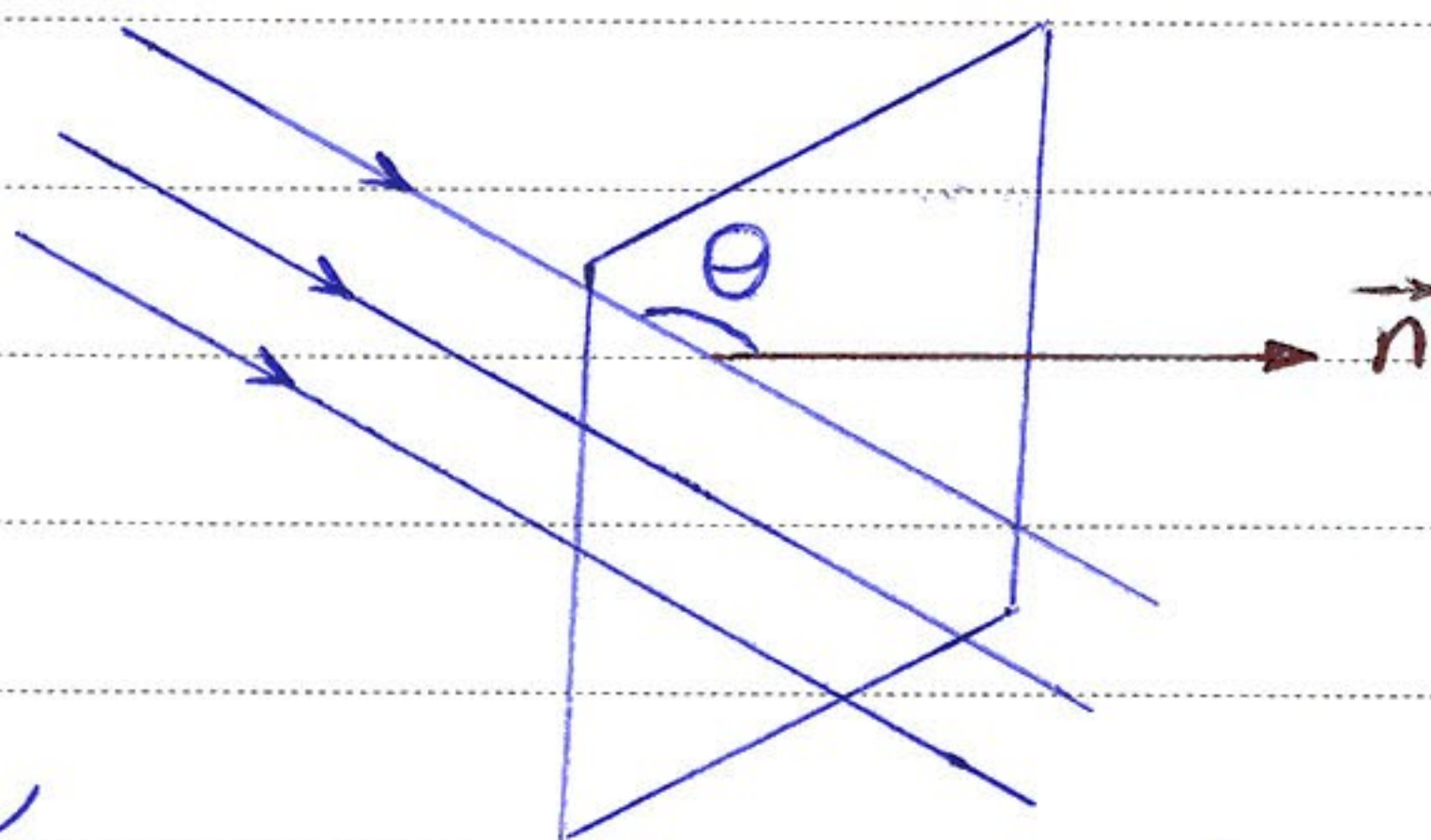
$$\text{نُسخه} \propto \text{مقدار یکیت}$$

$$\text{نُسخه} \propto \text{زاویه}$$

$$\Rightarrow \Phi_F = F A \cos \theta$$

زاویه بین بردار عمود بر سطح

و بردار یکیت مورد نظر ما

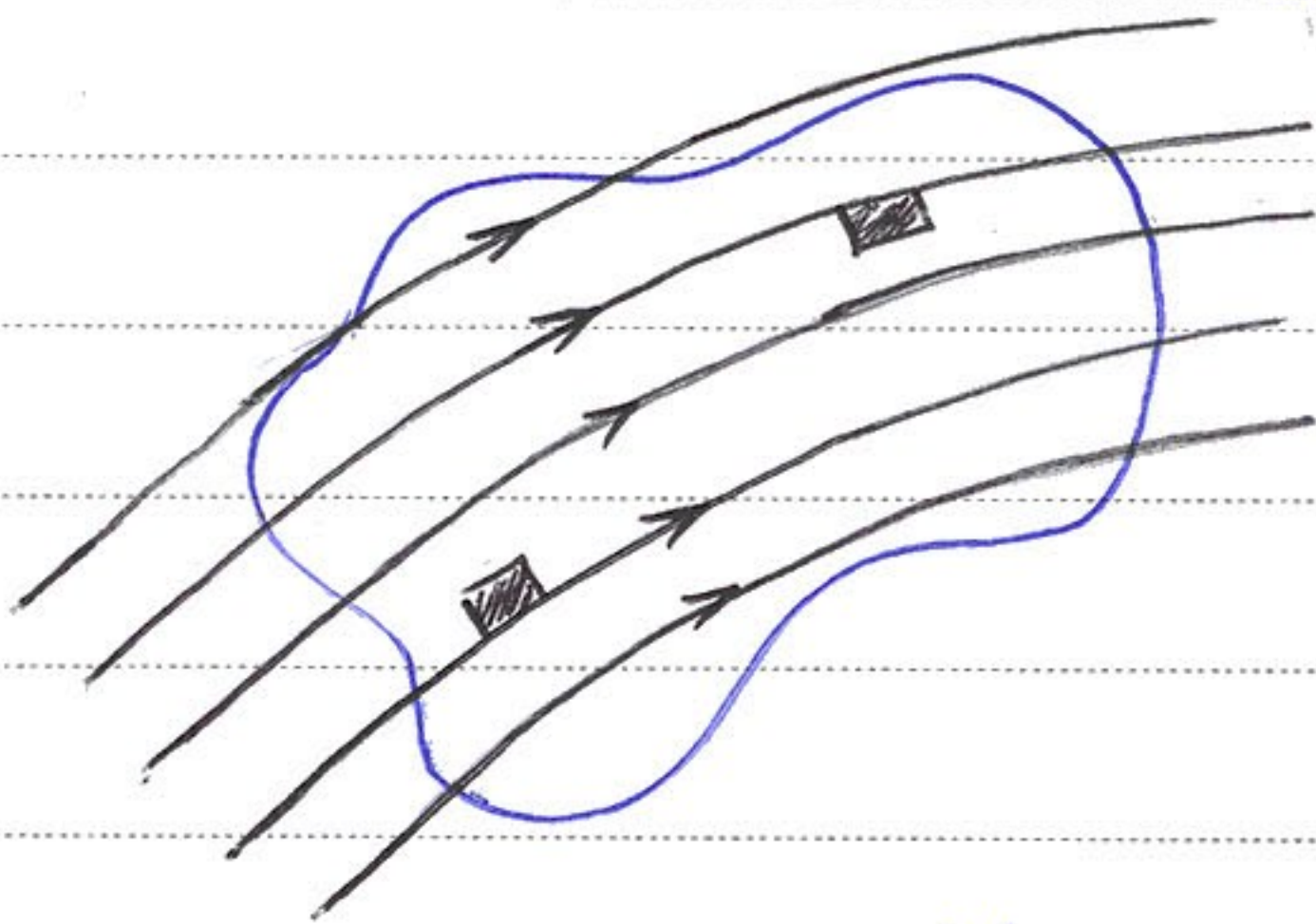


بردار سطح: بردار سطح برداری است که اندازه‌ی آن برابر مساحت سطح و جهت آن عمود

بر سطح به طرف خارج است.

$$\Phi_E = E A \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

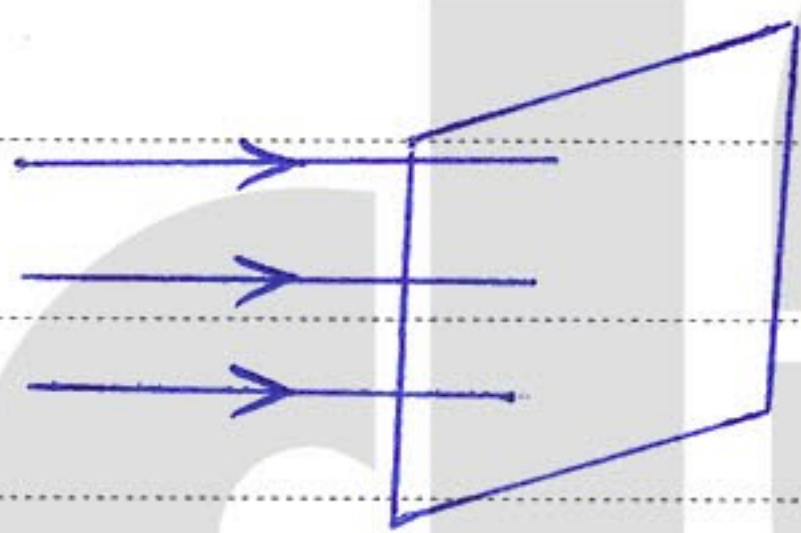
البرقیت میدان متغیر و سطح نامتناهی باشد



$$\Phi = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta A}$$

$$N \rightarrow \infty \rightarrow \Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

البرقیت میدان ثابت و جهت میدان با سطح ثابت باشد

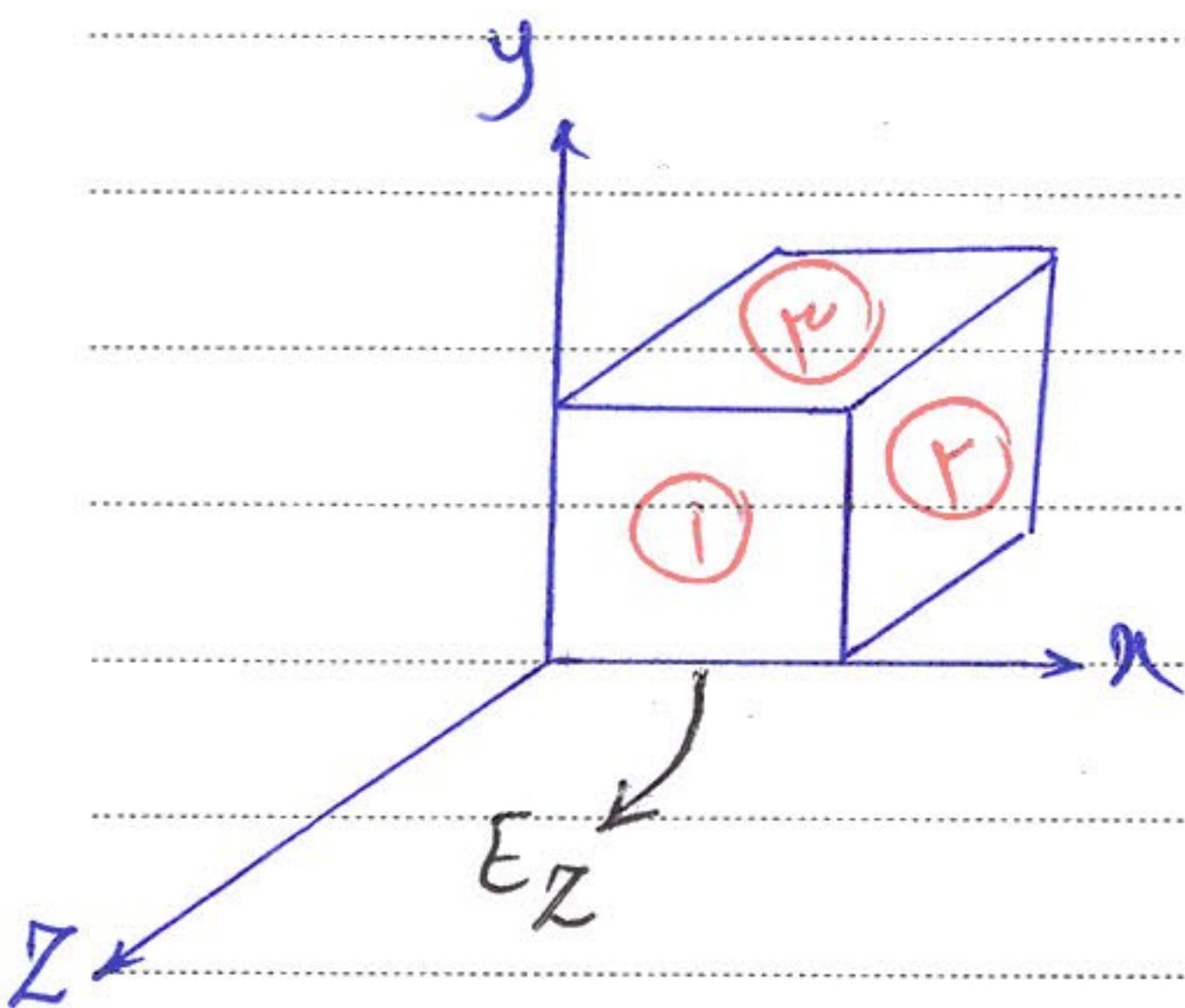


$$\int d\vec{a} = A$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

* یکای شار الکتریکی $(\frac{Nm^2}{C})$ می باشد.

سوال: شار عبوری از تمام صفحات در آن مطلوب چه است؟



$$\Phi_{A_1} = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \theta = E_z A \cos(0^\circ) = E_z A$$

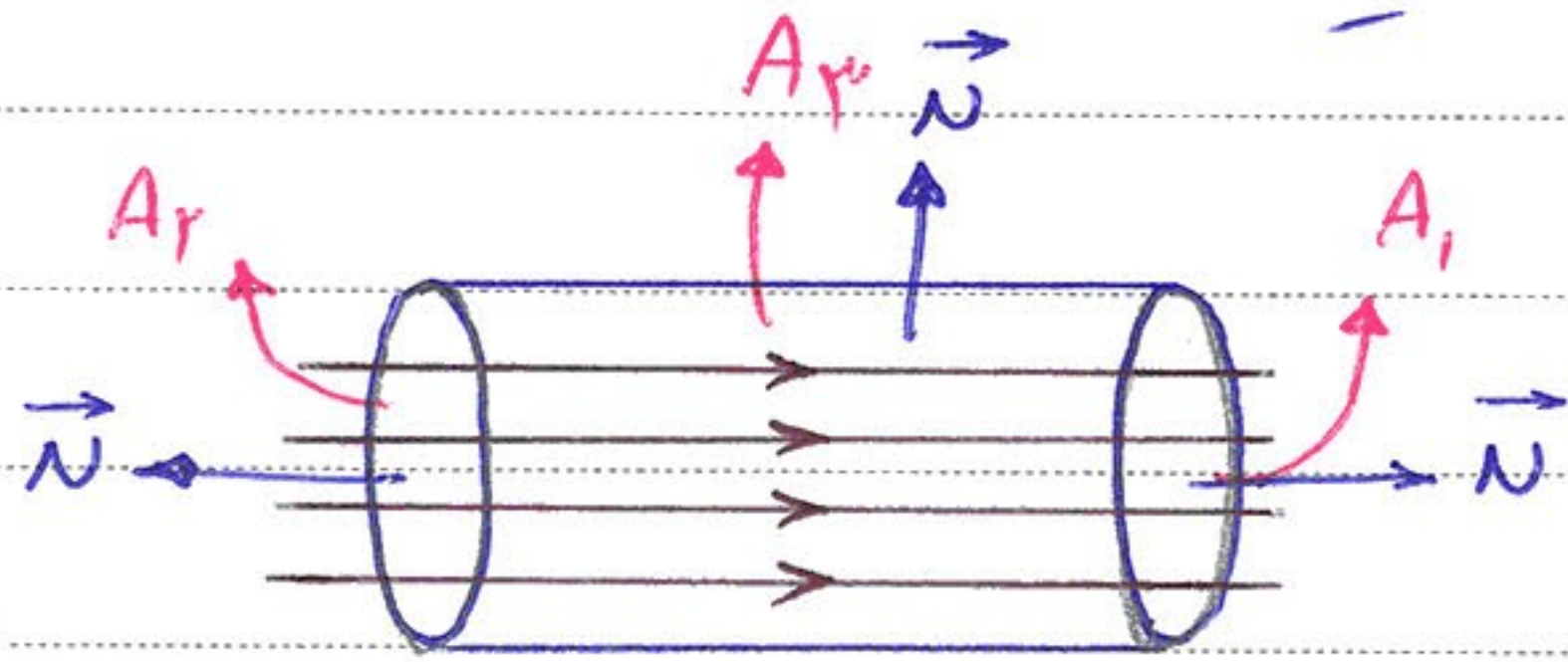
$$\Phi_{A_2} = EA \cos(180^\circ) = -E_z A$$

$$\Phi_{A_3} = EA \cos(90^\circ) = 0$$

$$\Phi_{A_4} = \Phi_{A_5} = \Phi_{A_6} = 0$$

نکته: اگر یک سطح بسته در میان الکتریکی ثابت قرار گیرد شار کل عبوری از آن صفر است.

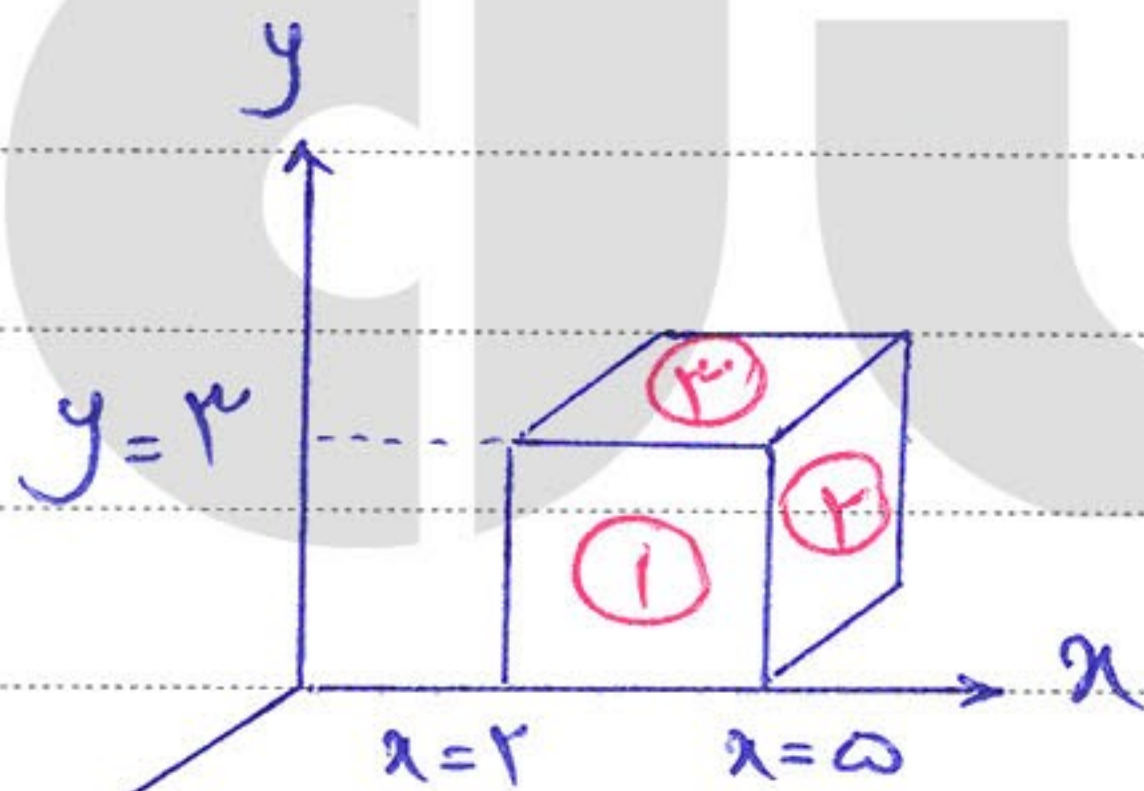
مثال: شار کل عبوری از استوانه را بدست آورید.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \phi_{A_1} + \phi_{A_r} + \phi_{A_3}$$

$$= EA_1 \cos(0^\circ) + EA_r \cos(180^\circ) + EA_3 \cos(90^\circ) = EA - EA = 0$$

مثال: شار کل عبوری از مکعب را بدست آورید.



$$\vec{E} = kx^2 \hat{i} - 2y \hat{j}$$

$$\phi_T = \sum_{i=1}^6 \phi_{A_i}$$

$$\phi_{A_1} = \int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{A_1} (kx^2 \hat{i} - 2y \hat{j}) \cdot d\vec{a}$$

بردار عمود بر سطح ① $\hat{k}$ در راستای محور z است.

$$= \int kx^2 da \hat{i} \cdot \hat{k} + \int -2y da \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\phi_{A_z} = \int (F_x \hat{i} - F_y \hat{j}) (-da \cdot \hat{k}) = \int (F_x \hat{i} \cdot \hat{k} + F_y \hat{j} \cdot \hat{k}) da = 0$$

$$\phi_{A_x} = \int (F_x \hat{i} - F_y \hat{j}) (da \cdot \hat{i}) = \int (F_x \hat{i} \cdot \hat{i} - F_y \hat{j} \cdot \hat{i}) da = F_x \int da$$

مساحت سطح

$$= F_x \omega \times 4 = 400$$

$$\phi_{A_y} = \int (F_x \hat{i} - F_y \hat{j}) (-da \cdot \hat{j}) = \int (-F_x \hat{i} \cdot \hat{j} + F_y \hat{j} \cdot \hat{j}) da = -F_x \int da$$

$$= -F_x \omega \times 4 = -F_x F \times 4 = -144$$

$$\phi_{A_z} = \int (F_x \hat{i} - F_y \hat{j}) (da \cdot \hat{j}) = \int (F_x \hat{i} \cdot \hat{j} - F_y \hat{j} \cdot \hat{j}) da = -F_y \int da$$

$$= -F_y \omega \times 4 = -4$$

$$\phi_{A_y} = \int (F_x \hat{i} - F_y \hat{j}) (-da \cdot \hat{j}) = \int (-F_x \hat{i} \cdot \hat{j} + F_y \hat{j} \cdot \hat{j}) da = F_y \int da$$

$$= F_y \omega \times 4$$

$$\Rightarrow \phi_T = 4(0 + 0 + 100 - 14 - 4 + 0) = 4 \times VF = \underline{444}$$

قانون گاوس

ع. ضرب در شار عبوری از یک سطح بسته برابر است با بار داخل سطح بسته.

$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{\text{enclosed}} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

نکته: اگر خطوط میدان از سطح خارج شوند شار مثبت و اگر به سطح وارد شوند منفی است.

مثال: شار میدان الکتریکی روی سطح بسته‌ی متقابل برابر است آورده.

$$\begin{aligned} q_1 &= +5C & q_2 &= -5C \\ q_3 &= +4C & q_4 &= -2C \end{aligned}$$

- مجموع بار داخل مثبت است پس خطوط میدان

از آن خارج می‌شوند پس شار مثبت خواهد بود.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{\text{enc}} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{+5 + 4 - 2}{\epsilon_0} = \frac{7}{\epsilon_0}$$

مقصد: بار در جسم رسانا بر روی سطح خارجی آن قرار می‌گیرد.

$$I = 0 \rightarrow \text{جسم رسانا به حالت استاتیکی میرسد} \rightarrow \text{زیرین لایه} \rightarrow \text{جسم رسانا}$$



$$\vec{E} = 0 \rightarrow \text{میدان الکتریکی}$$

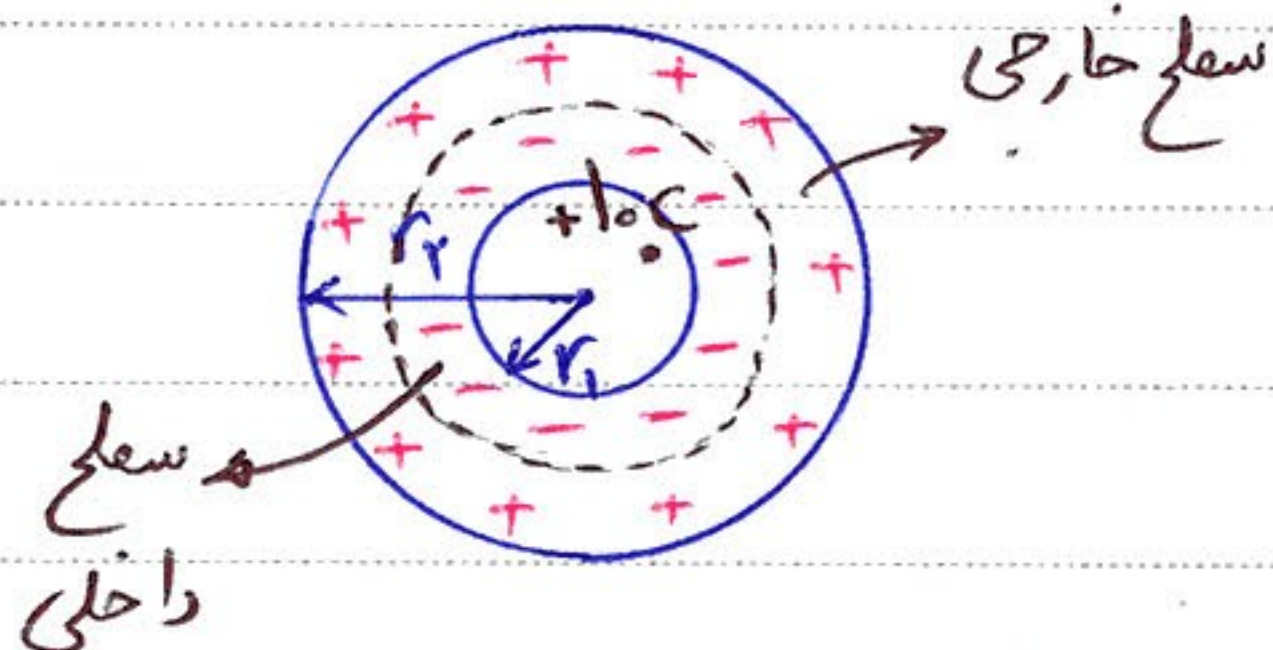
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{\text{enc}} = 0 \rightarrow \text{بار داخل جسم رسانا صفر}$$

است و بار رسانا روی سطح خارجی قرار می‌گیرد. (باتوجه به پایداری بار)

مثال: نویسه‌ی رسانایی داریم با شعاع r_1 و r_2 ، بار الکتریکی روی سطوح داخلی و خارجی

رسانا را بدست آورده.

میدان داخلی رسانا صفر است.



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q \Rightarrow q_{enc} = 0$$

« سطح خارجی $+10C$ » « سطح داخلی $-10C$ »

$$\Rightarrow q_{enc} = +10 - 10 = 0$$

کاربرد قانون گاوس در محاسبه‌ی میدان الکتریکی

$$E = \frac{kq}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

قانون گاوس

میدان الکتریکی بار نقطه‌ای

$$\epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc} \rightarrow \epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} \cos \alpha = \epsilon_0 E \cos \alpha \oint d\vec{a} = q$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 A \cos \alpha}$$

میدان الکتریکی در سطح بسته باید ثابت باشد تا بتوان آن را از انتگرال خارج کرد.

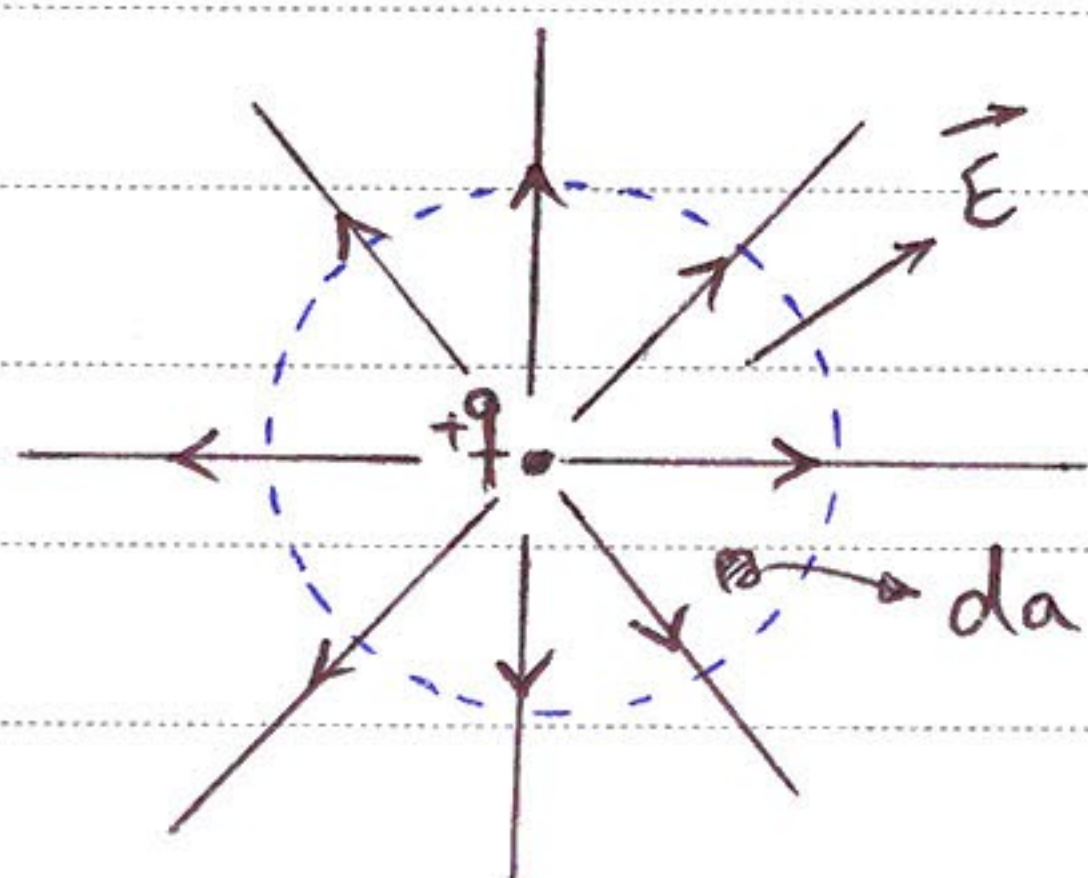
شرط استفاده از این رابطه

(۱) یک سطح بسته‌ی فرضی در نقطه‌ی مورد نظر داشته باشیم.

(۲) این سطح گاوس باید بتواند هم خوانی داشته باشد و میدان الکتریکی روی آن

ثابت بوده و α نیز ثابت باشد.

مثال: برای یک بار نقطه‌ای ساده:



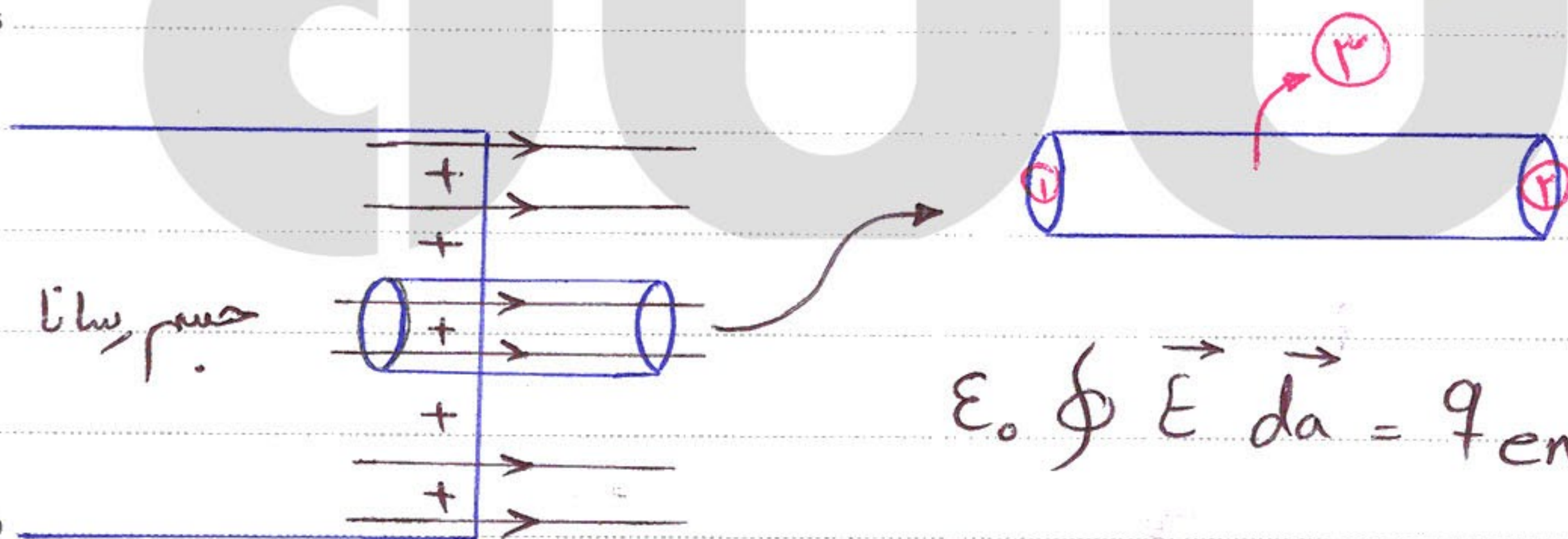
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc}$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$= \epsilon_0 \oint E \cdot da \cos(0) = \epsilon_0 E \oint da = q$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

مثال: میدان الکتریکی با استفاده از قانون گاوس نزدیک سطح رسانا بدست آورید.



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 \left[\int_{A_1} E \cdot d\vec{a} + \int_{A_2} E \cdot d\vec{a} + \int_{A_3} E \cdot d\vec{a} \right] = q$$

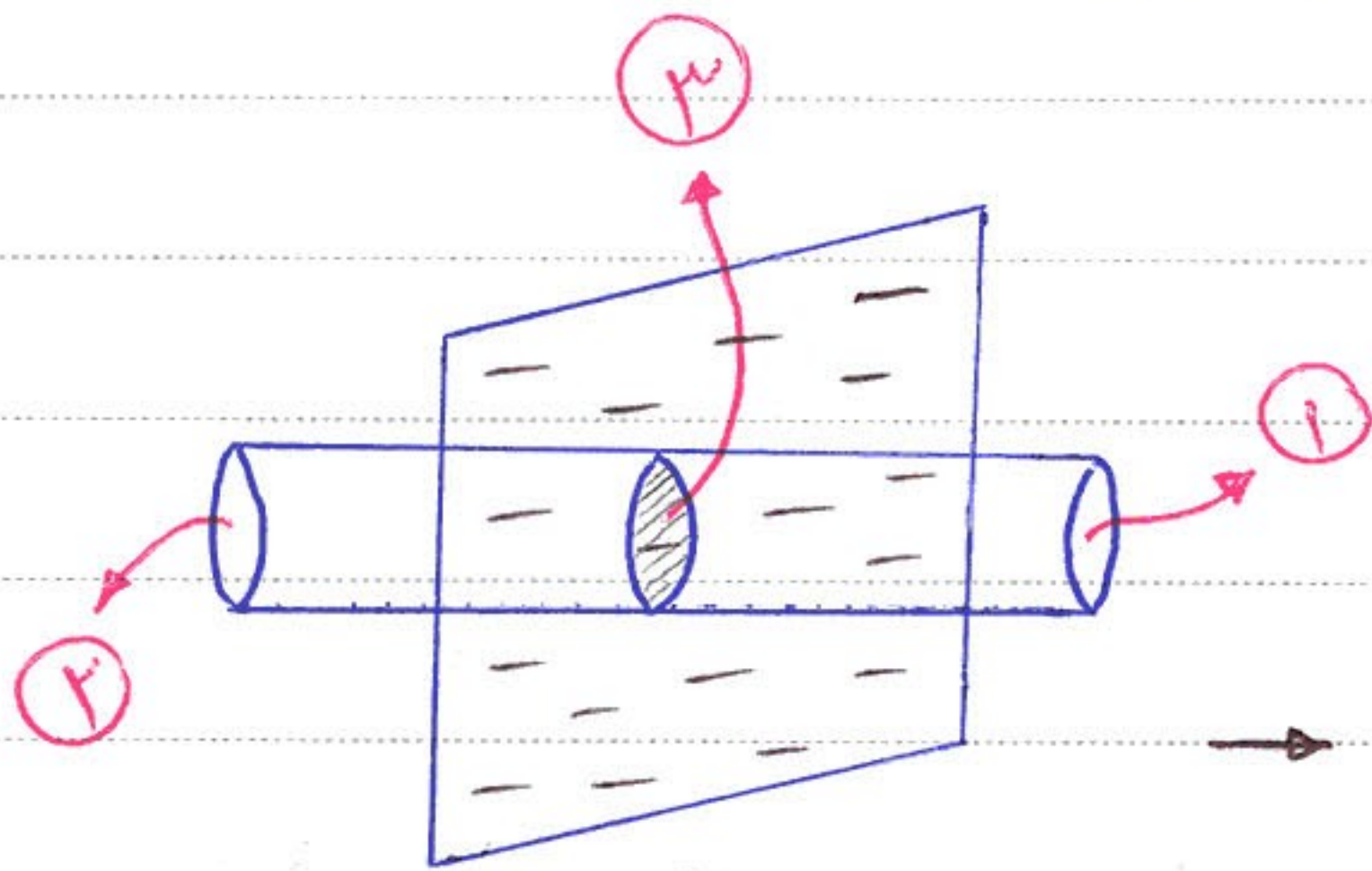
داخل رسانا میدان صفر است.

$$\Rightarrow \epsilon_0 \left[E \cos(0) \int_{A_1} da + 0 + \int_{A_3} E da \cos(180) \right] = q$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E A = q = \nabla A \quad \xrightarrow{q = \nabla A} E = \frac{\nabla}{\epsilon_0}$$

میدان الکتریکی از طریق قانون گاوس نزدیک سطح رسانا

مثال: یک صفحه نامتناهی نازک با چگالی سطحی بار σ :



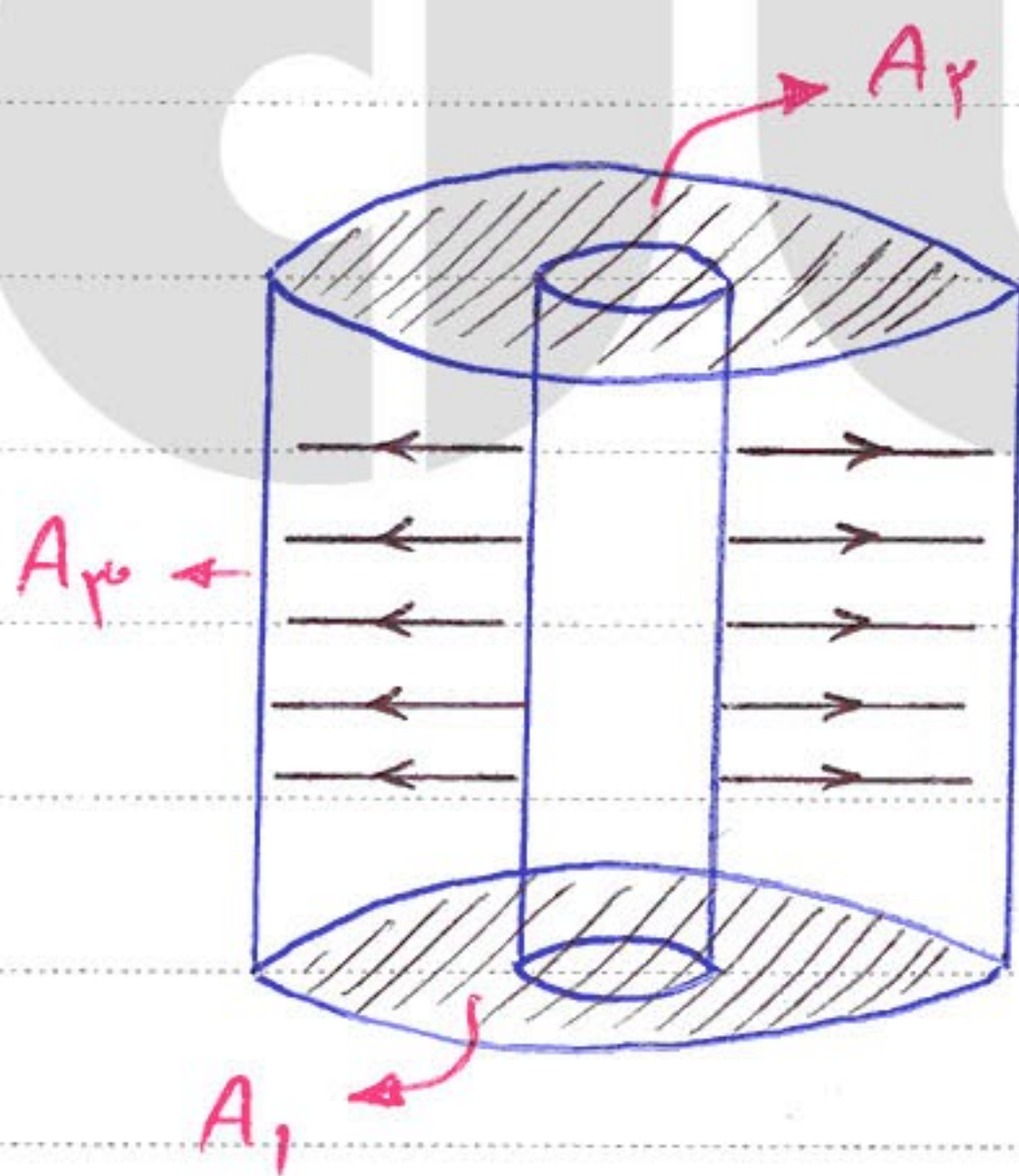
$$\epsilon_0 \oint E \cdot da = q_{enc}$$

$$\rightarrow \epsilon_0 \left[\int_{A_1} E da + \int_{A_2} E da + \int_{A_3} E da \right] = q$$

- چون سطح نازک است داخل سطح هم میدان دارد و میدان درون آن صفر نیست.

$$\Rightarrow \epsilon_0 [-2EA] = -\nabla A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

مثال: میدان خط بار نامتناهی با چگالی خطی λ :



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc}$$

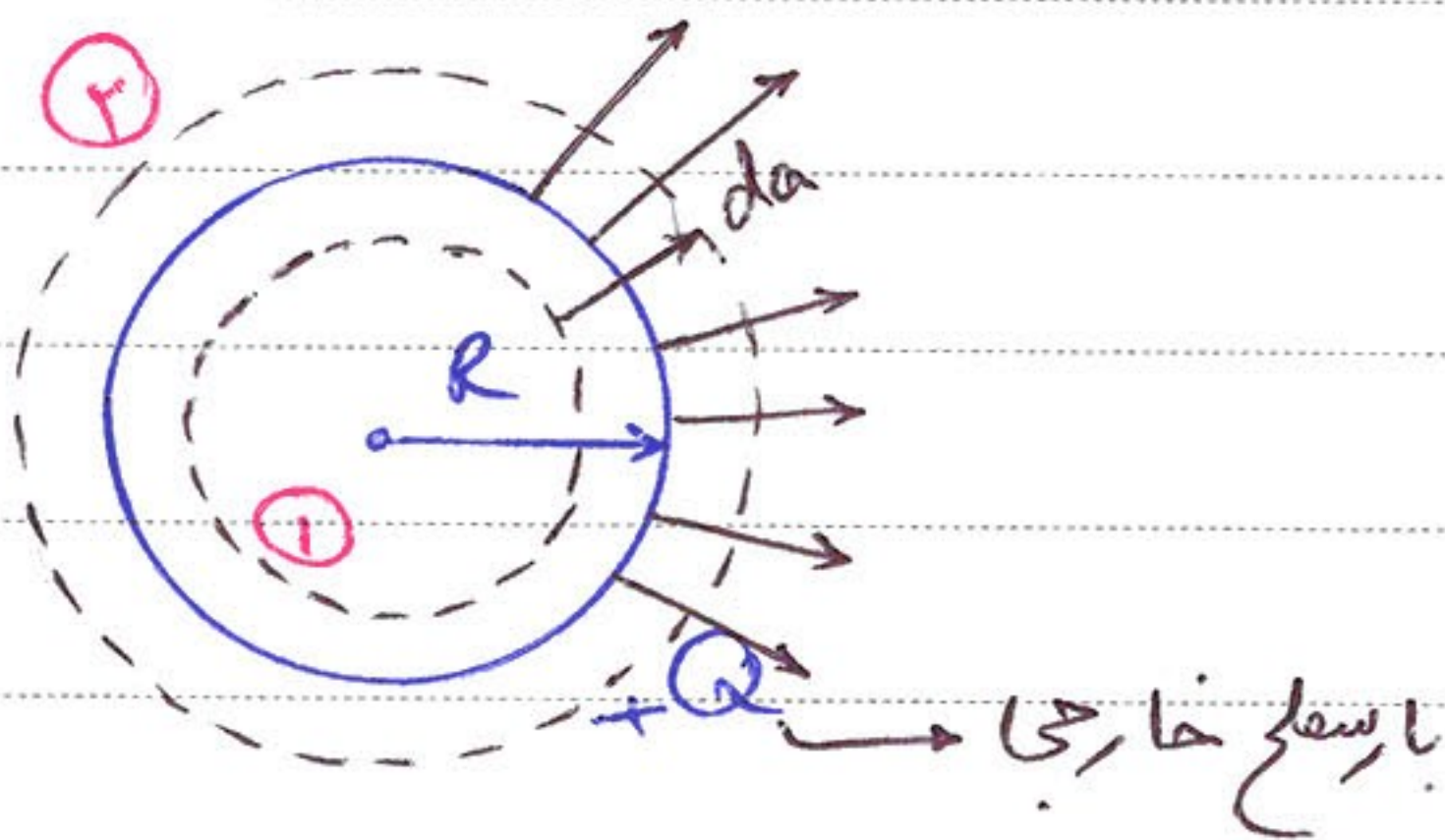
$$\epsilon_0 \left[\int_{A_1} E da + \int_{A_2} E da + \int_{A_3} E da \right] = q$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \int E da \cos(0) = q_{enc}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E \int da = q_{enc}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E 2\pi r L = q \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

مثال: میدان یونیفرم برای ایدیت آورده.



$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & r < R \end{cases}$$

بار در داخل رسانا صفر است.

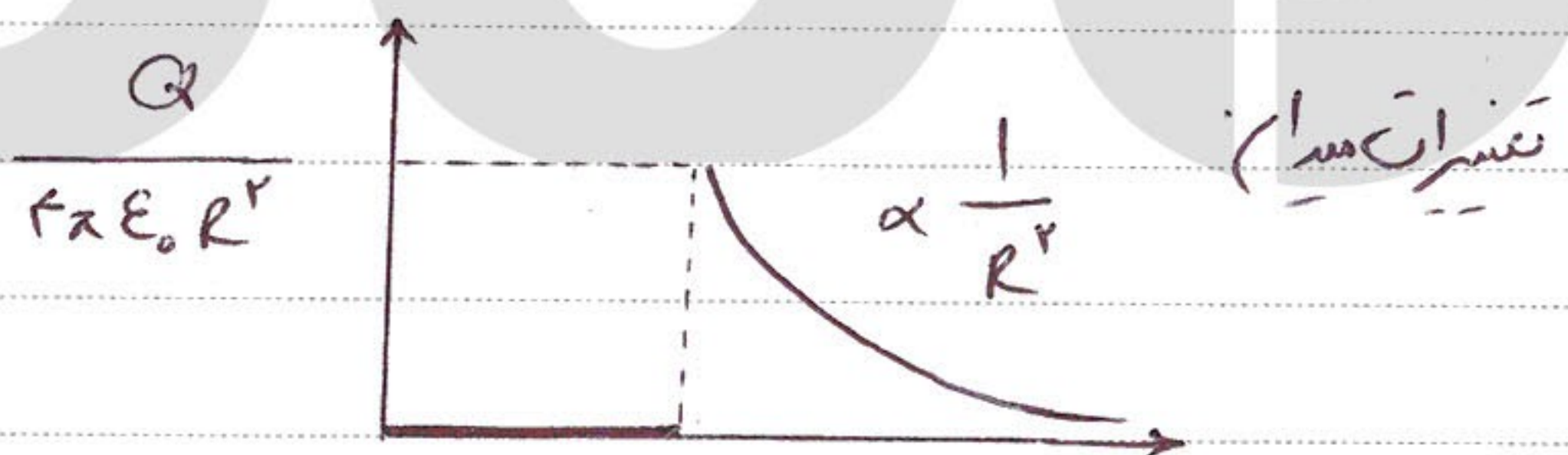
① $\rightarrow q = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 \rightarrow E = 0 \rightarrow r < R$

② $\rightarrow q = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon_0 \int E da \cos(0) = \epsilon_0 E \int da = Q$

$r > R$

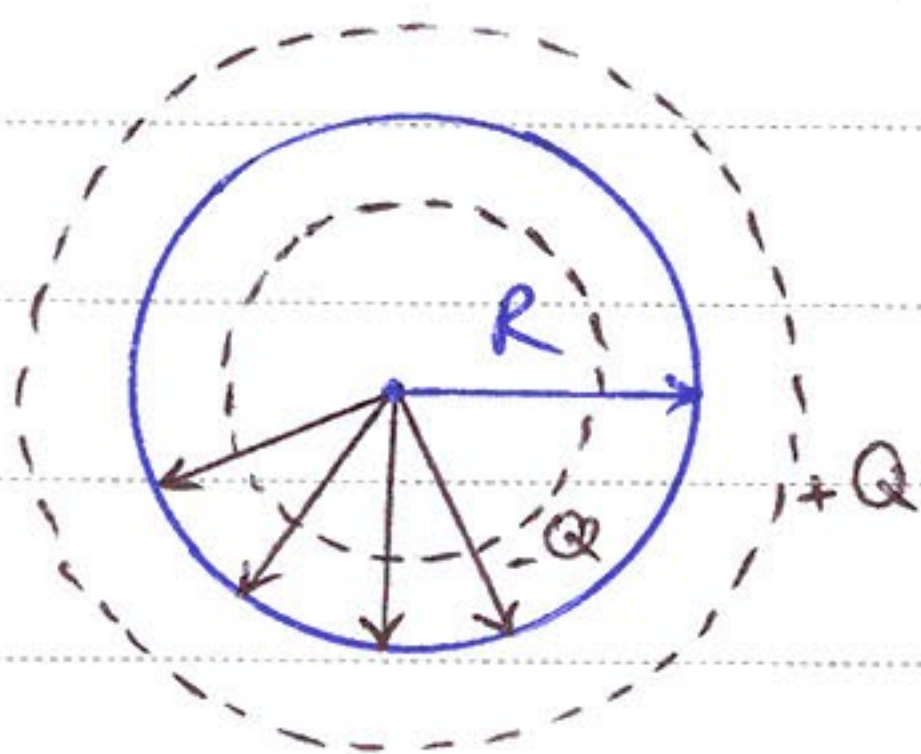
مساحت کره $4\pi r^2$

$\Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 \times 4\pi r^2}$



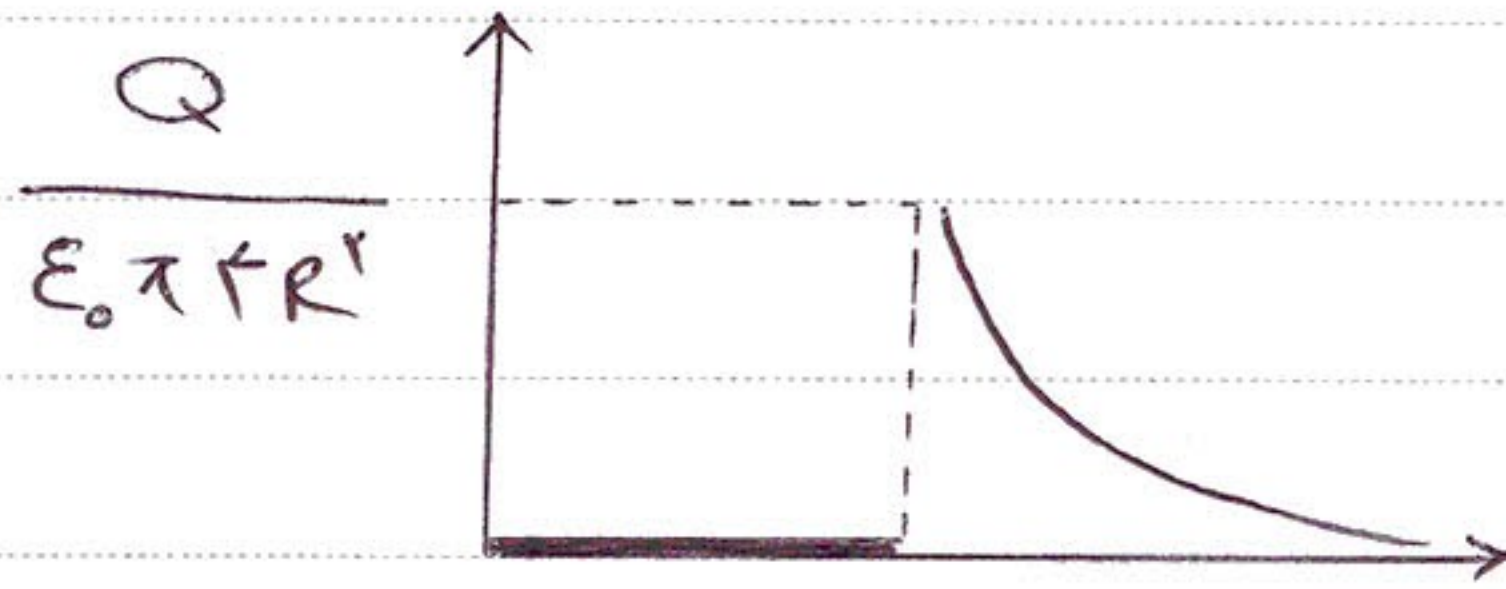
مثال: میدان یونیفرم برای بار +Q ایدیت آورده.

در داخل رسانا میدان صفر است چون در داخل رسانا است.



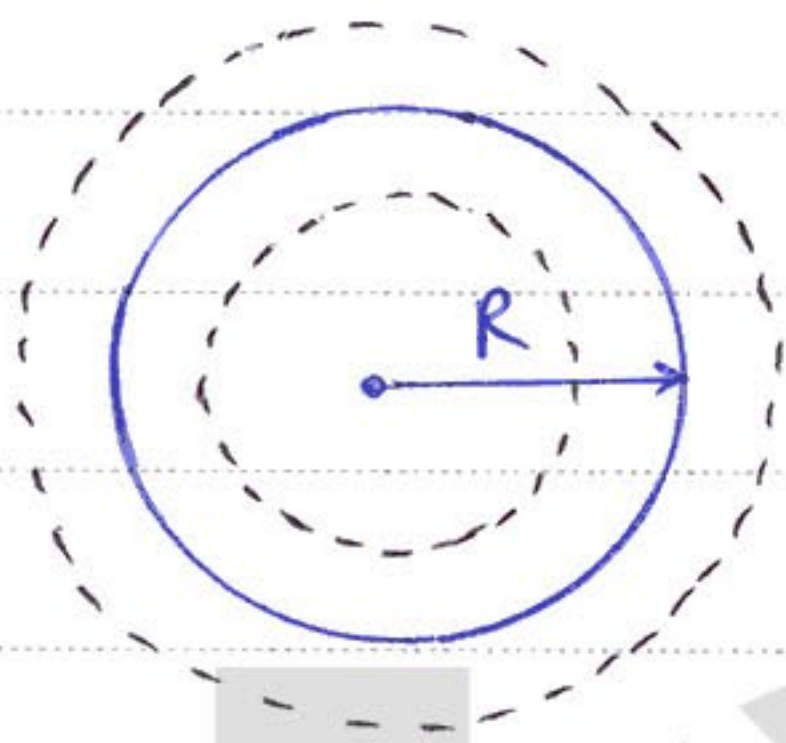
$q = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{a} \rightarrow Q = \epsilon_0 \int E da \cos(0)$

$= \epsilon_0 E \int_A da \rightarrow Q = \epsilon_0 E A \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$



تغییرات میدان

مثال: میدان برهه نارسا را توپر با بار Q و نسبت ϵ_0 آورید.



$$r < R \rightarrow q_{enc} = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

$$\rightarrow q_{enc} = \epsilon_0 \int E \cdot da \cos(0)$$

$$dq = \rho dr \rightarrow \int dq = Q = \int \rho dr$$

$$Q = \int \rho dr = \int_0^R \rho \pi r^2 dr = \rho \frac{\pi}{3} r^3 \Big|_0^R = \rho \frac{\pi}{3} R^3$$

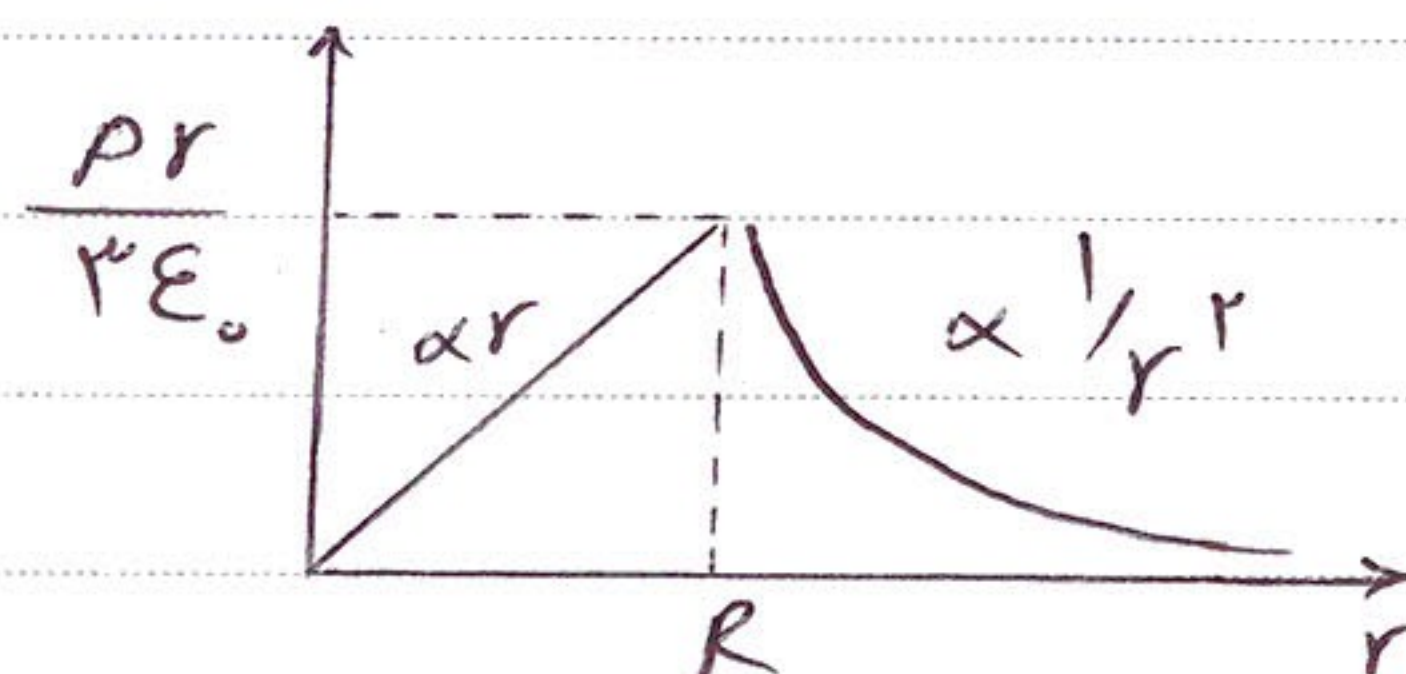
$$dr = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = \pi r^2 dr$$

$$\rightarrow \int \sin\theta d\theta \int d\phi = 4\pi$$

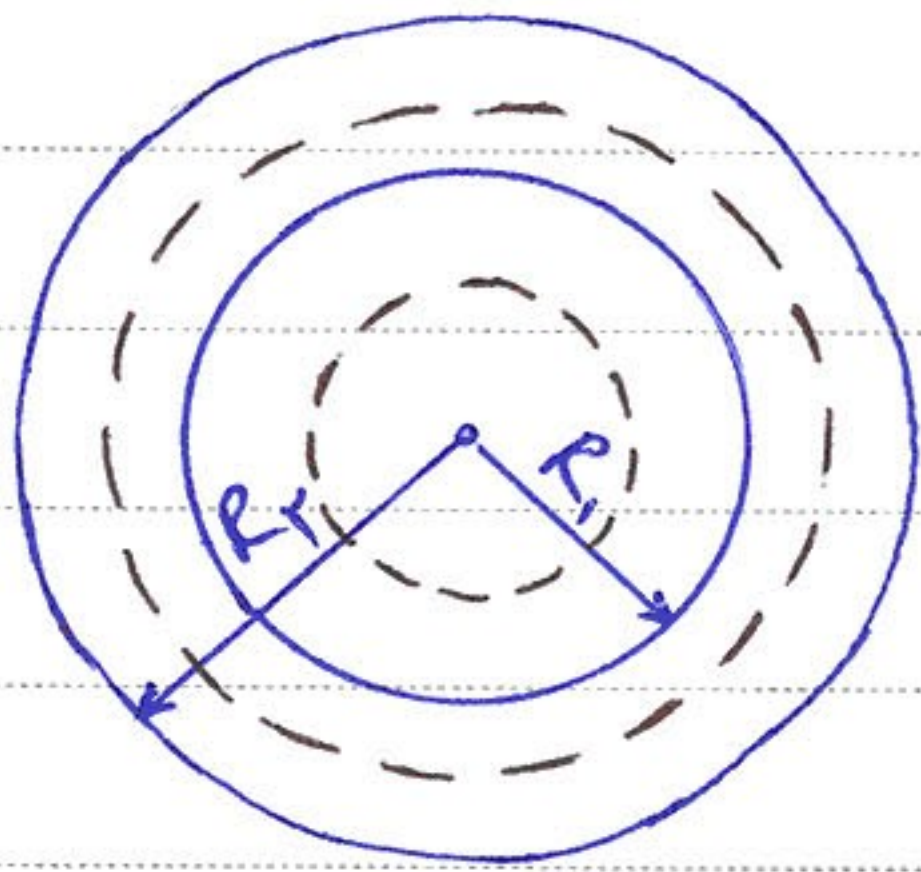
$$\rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$\rightarrow r > R \rightarrow q = \epsilon_0 \int E da = \rho \frac{\pi}{3} R^3$$

$$\rightarrow \epsilon_0 E \int da = \epsilon_0 E \pi R^2 = \rho \frac{\pi}{3} R^3 \rightarrow E = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 r^2}$$



مثال: میدان پوتنسیال برای یک جگای حجمی ρ را بدست آورید.



$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r - R_1) & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_2^3 - R_1^3) & r > R_2 \end{cases}$$

① $E = 0 \rightarrow q = 0$

② $q_{enc} = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon_0 \int E da \cos(0) = \epsilon_0 E \int da$
 $\xrightarrow{A \rightarrow \text{مساحت سطح کروی}}$

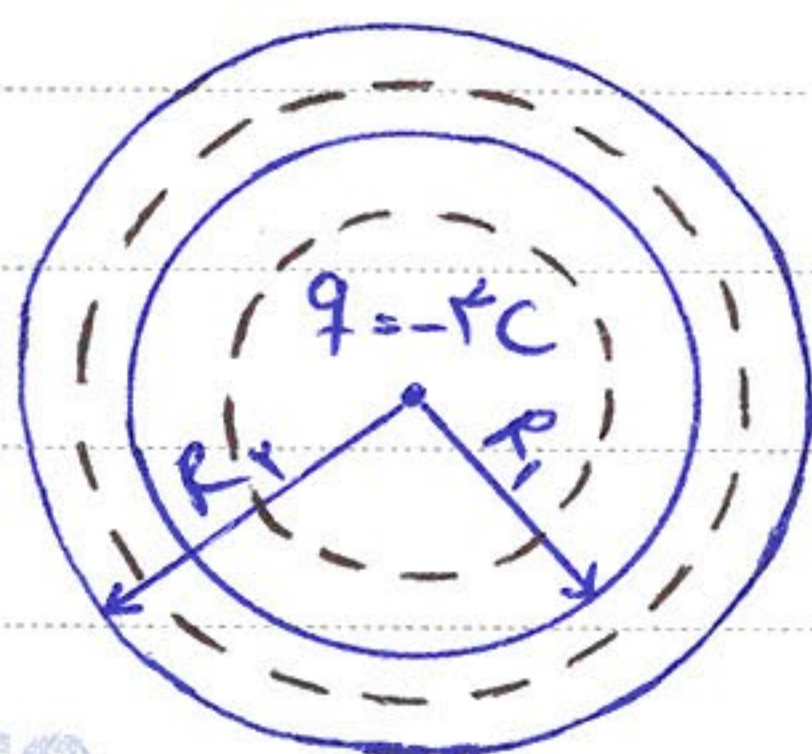
$$\rightarrow \epsilon_0 E (4\pi r^2) = \rho \frac{4}{3}\pi (r - R_1^3)$$

$$\rightarrow \epsilon_0 E (4\pi r^2) = \rho \frac{4}{3}\pi r^2 (r - \frac{R_1^3}{r^2}) \rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r - \frac{R_1^3}{r^2})$$

③ $q_{enc} = \epsilon_0 \int E \cdot da \rightarrow \epsilon_0 \int E da \cos(0) = \rho \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)$

$$\rightarrow \epsilon_0 E (4\pi r^2) = \rho \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3) \rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3)$$

مثال: میدان پوتنسیال برای یک بار $+Q$ است را بدست آورید.



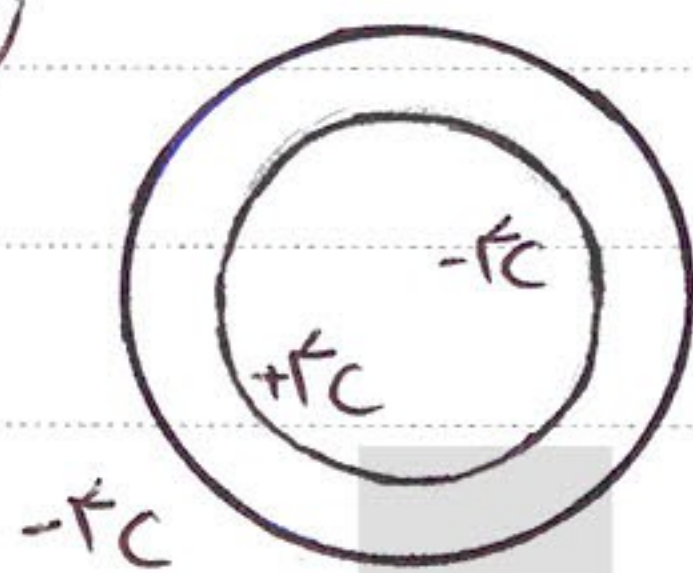
$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} q_{\text{enc}} = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} \Rightarrow -q_c = \epsilon_0 \int E da \cos(180^\circ)$$

$$\rightarrow -q = -\epsilon_0 E \int da \Rightarrow +q = \epsilon_0 E \pi r^2 \rightarrow E = \frac{1}{\epsilon_0 \pi r^2}$$

چون بار $-q_c$ یک بار $+q_c$ روی سطح داخلی القای کند پس باران منفرد میانی منفی است $\rightarrow E = 0$

۳



$$\text{بار القای شده} \rightarrow -q + q - q + q = -q_c$$

پس بار کل برابر $-q_c$ است.

$$-q = \epsilon_0 \int E da \rightarrow \epsilon_0 \int E da \cos(180^\circ) = -q \rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 \pi r^2}$$

مثال: میان خط باری ثابت و در فاصله محوری r است λ (با $\lambda = q/\ell$)



$$\oint E da = \frac{+q}{\epsilon_0} \rightarrow \oint E da \cos(0)$$

$$= E \oint da = \frac{+q}{\epsilon_0} \rightarrow E 2\pi r L = \frac{+q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{+q}{2\pi \epsilon_0 r L} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

فصل چهارم

پتانسیل الکتریکی

انرژی پتانسیل الکتریکی: انرژی لازم برای جابه‌جایی بار واحد از یک نقطه به نقطه دیگر در یک میدان الکتریکی. وجود دارد. و انرژی الکتریکی پتانسیل است. انرژی پتانسیل الکتریکی تعریف می‌شود.

کار میدان الکتریکی $\rightarrow W = U_f - U_i = -\Delta U$ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \vec{F}_E \cdot \vec{d} = F_E d \cos(180^\circ) = -F_E d$$

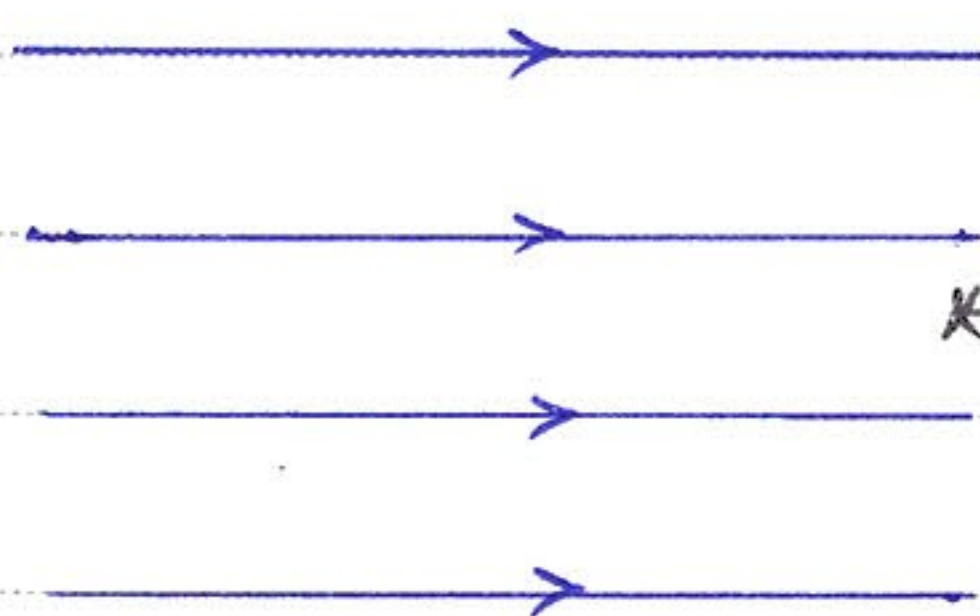


$$W < 0, \Delta U > 0$$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \vec{F}_E \cdot \vec{d} = F_E d \cos(0^\circ) = F_E d$$

$$W > 0, \Delta U < 0$$



$$q \cdot \infty$$

تعریف پتانسیل

$$\Delta U = -W \rightarrow U - U_\infty = -W \rightarrow U = -W = -F_E \cdot d = -q \vec{E} \cdot \vec{d}$$

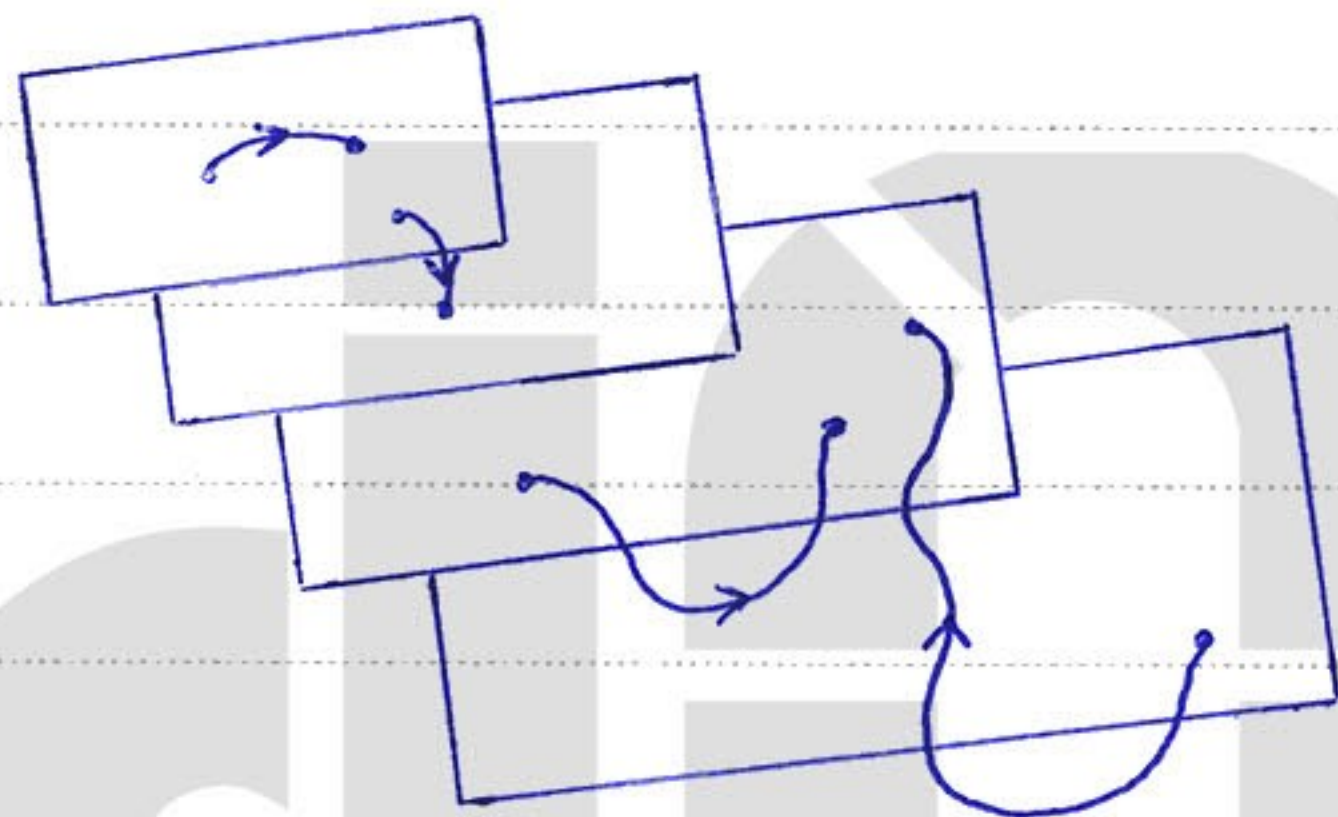
$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} \rightarrow V_f - V_i = \frac{1}{q_0} (U_f - U_i) = -\frac{W}{q_0}$$

نیای پتانسیل $\rightarrow$ دلت $V = \sigma/C$

$$\Delta V = -\frac{\omega}{q_0} \rightarrow V_f - V_i = -\frac{\omega}{q_0} \rightarrow V - V_\infty = -\frac{\omega_\infty}{q}$$

مسئله هم پتانسیل: تقاطعی که در حسابی هم قرار گرفته اند دارای یک پتانسیل هستند.

مثال: کار مسیرهای زیر را بدست آورید.

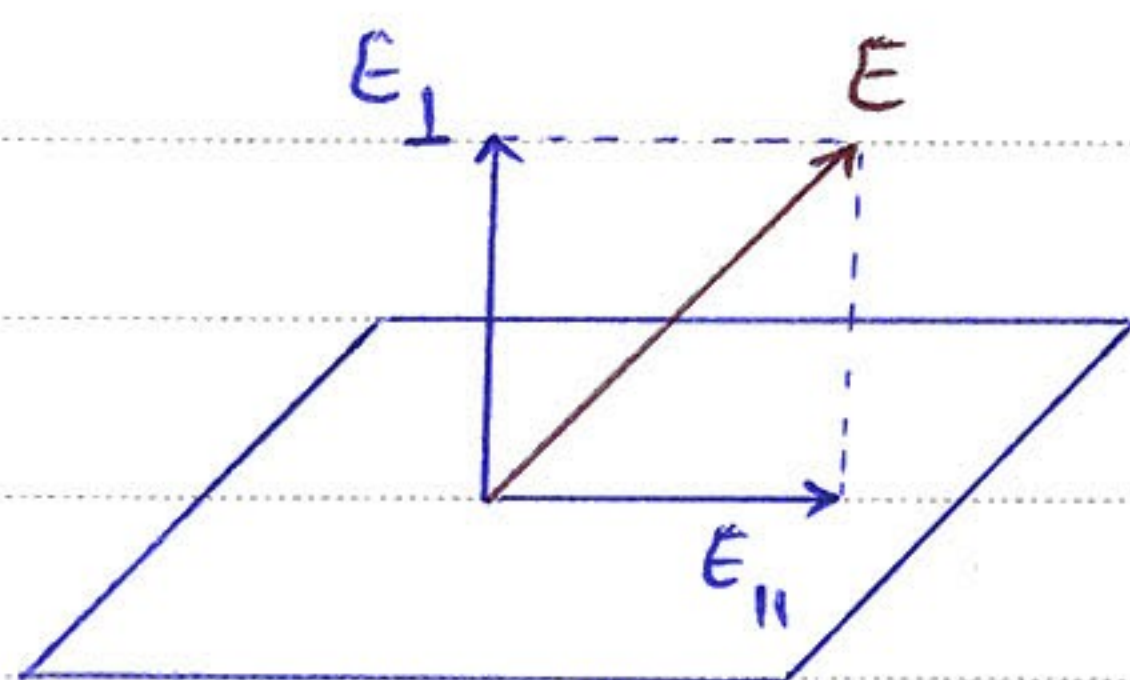


$$\textcircled{1} \rightarrow \Delta V = 0 \rightarrow \omega = 0$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \omega = -(V_2 - V_1) q_0$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \Delta V = 0 \rightarrow \omega = 0$$

$$\textcircled{4} \rightarrow \omega = -(V_3 - V_4) q_0$$

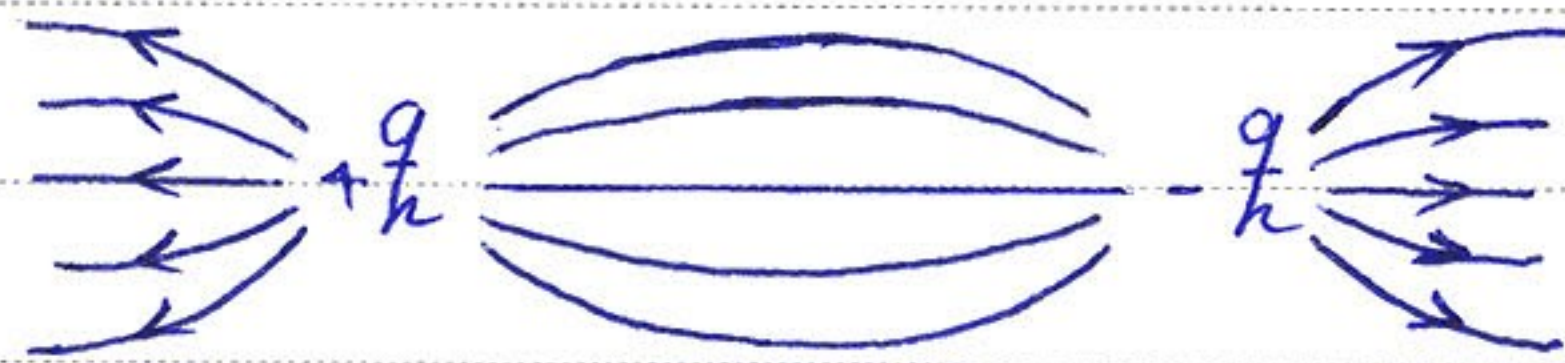
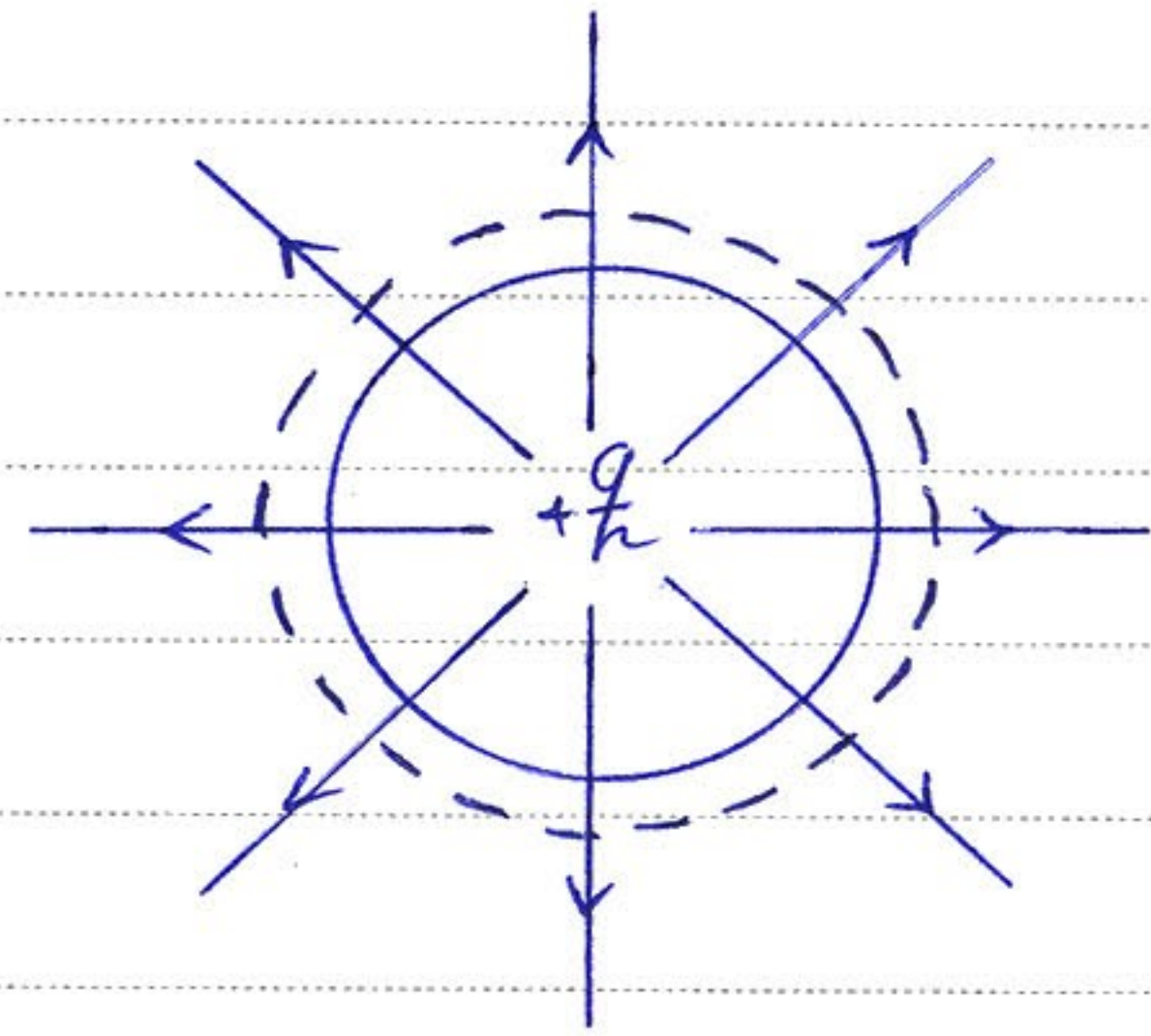
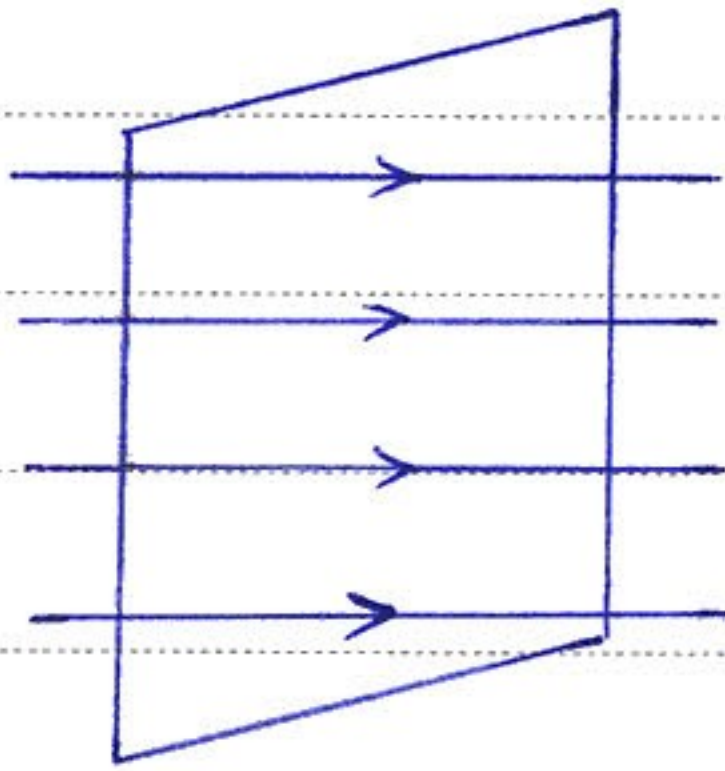


$$\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{E}_{||} = 0$$

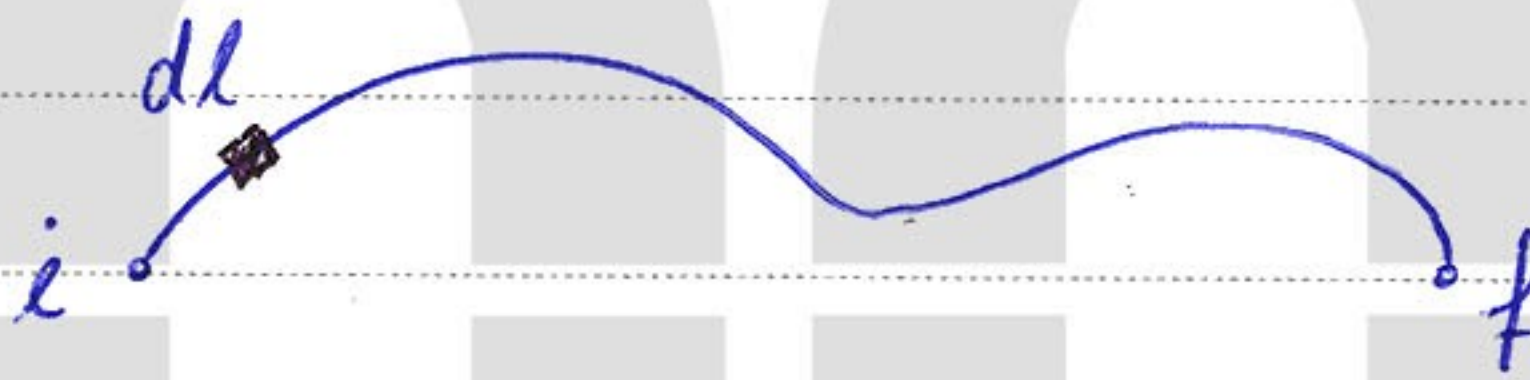
کار میدان در صفا صفر است.

میدان الکتریکی بر سطح هم پتانسیل صفر است.

میدان الکتریکی همواره بر سطح هم پتانسیل عمود است.



محاسبه پتانسیل الکتریکی با استفاده از میدان



$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q_0}, \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{q_0}{q_0} \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow W = \int_i^f q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

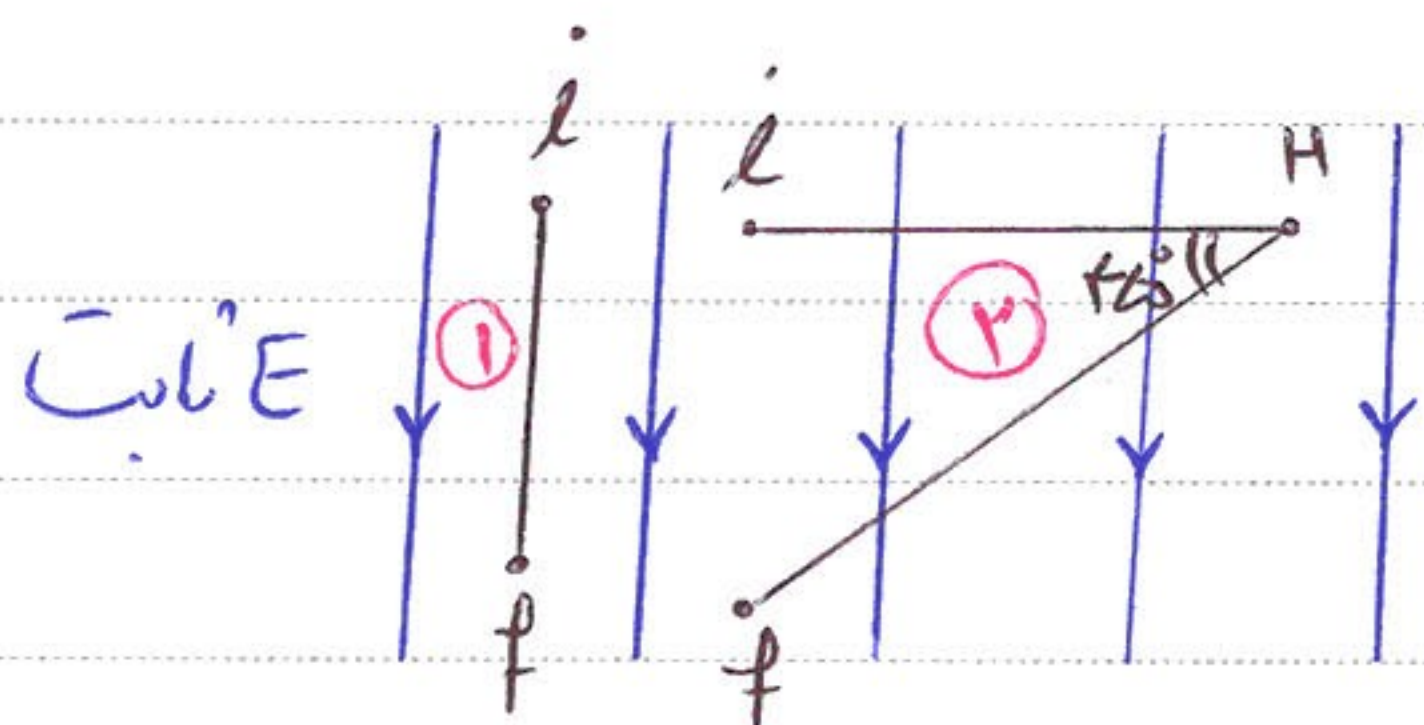
$$\Rightarrow \Delta V = V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

تغییرات پتانسیل بین دو نقطه مشخص برابر با انتگرال خطی میدان بین این دو نقطه است.

$$\Delta V = V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_f = V_f - V_\infty = - \int_\infty^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

مثال: تغییرات پتانسیل را بدست آورید.



$$\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

① $\rightarrow \Delta V = - \int_i^f E \cdot dl \cos(0) = -E \int_i^f dl = -Ed$

② $\rightarrow \Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow \Delta V = - \int_i^H \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_H^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\Rightarrow - \int_i^H E dl (\cos(90)) - \int_H^f E dl (\cos 45)$$

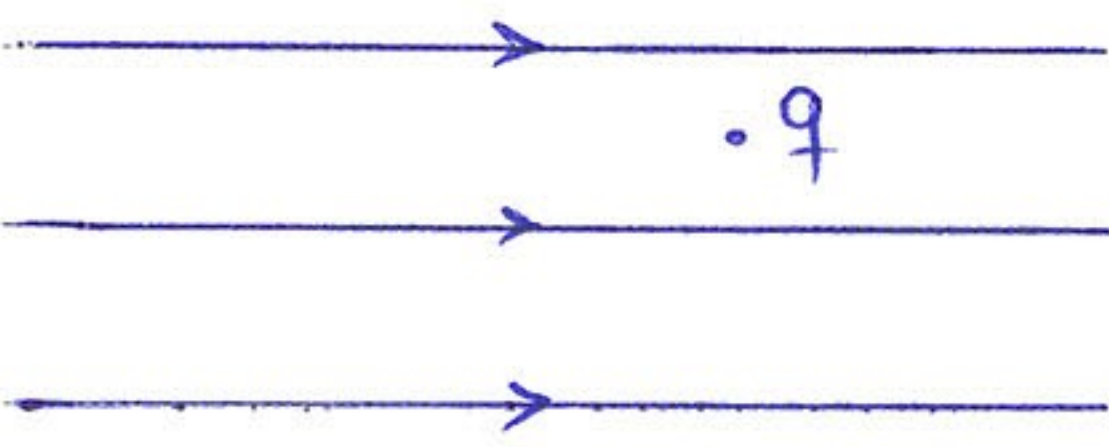
$$\Rightarrow \Delta V = -E \times \frac{r}{r} \int_H^f dl = -\frac{r}{r} E \times \frac{rd}{r} = -Ed$$

نتیجه: تغییرات انرژی پتانسیل به مسیر وابسته نیست بلکه وابسته به مبدأ و مقصد است.

$$\Delta U = -W \rightarrow U = -W_{\infty}$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \frac{W}{q_0}$$

$$\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_f = - \int_{\infty}^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



۰۹

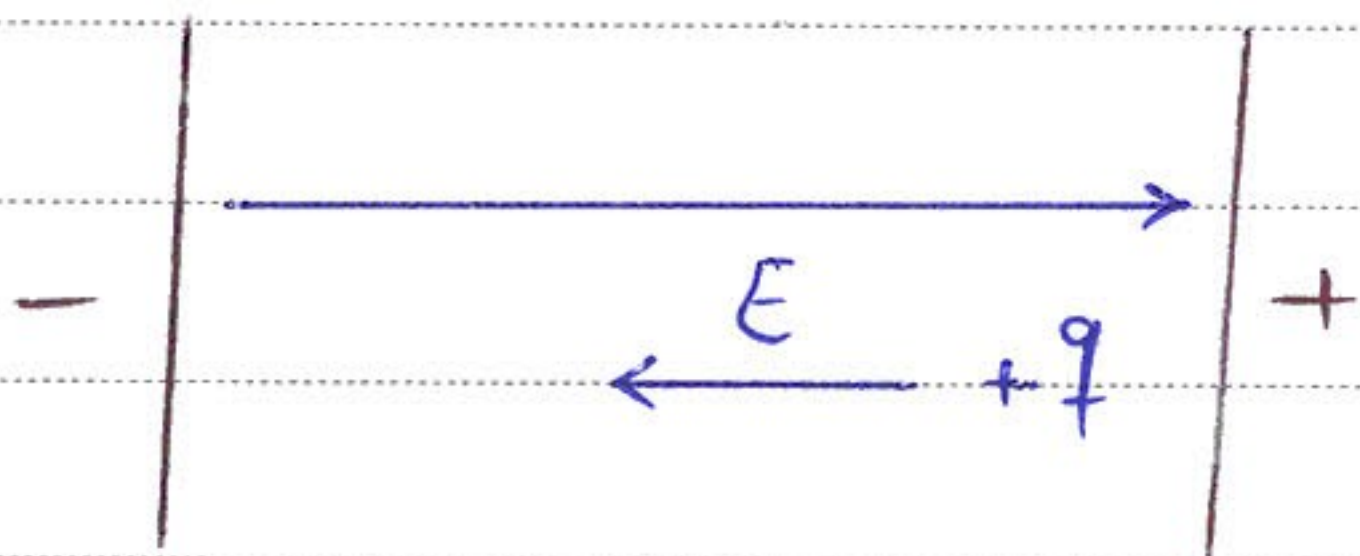
علاوه بر نیروی الکتریکی، عامل خارجی هم کار انجام می دهد.

کار انجام شده روی جسم $\rightarrow \Delta k = W$ قسیمی کار انرژی

$$\Delta k = W_E + W_{app} \quad \text{اگر در ابتدا و انتهای مسیر سالن باشد} \quad \Delta k = k_2 - k_1 = 0$$

$$\rightarrow W_E + W_{app} = 0 \rightarrow W_E = -W_{app}$$

$$U = -W_\infty = -(-W_{app}) = W_{app\infty}$$

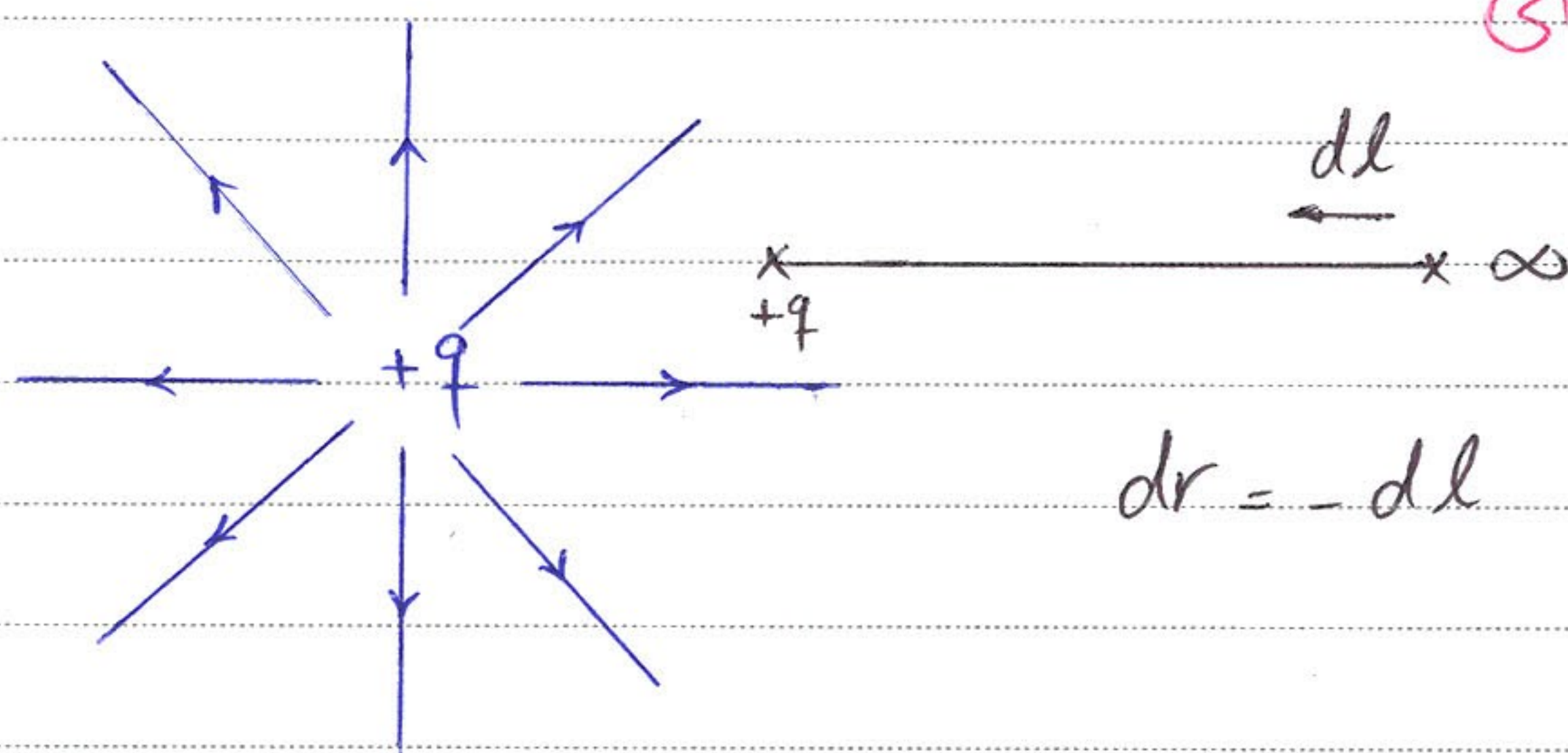
مثال: تغییرات انرژی پتانسیل بار $+q$ در شکل زیر بررسی کنید.

$$W_{app} > 0, W_E < 0, \Delta U > 0$$

در جهت میدان به ذره $+q$ نیرو وارد می شود و اگر در جهت میدان حرکت کند انرژی

پتانسیل آن کاهش می یابد.

محاسبه پتانسیل با نقطه ای



$$dr = -dl$$

$$\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_r = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r E dl \cos(180^\circ)$$

$$= \int_{\infty}^r E dl = \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (-dr) \rightarrow V_r = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

میان الکتریکی با نقطه ای

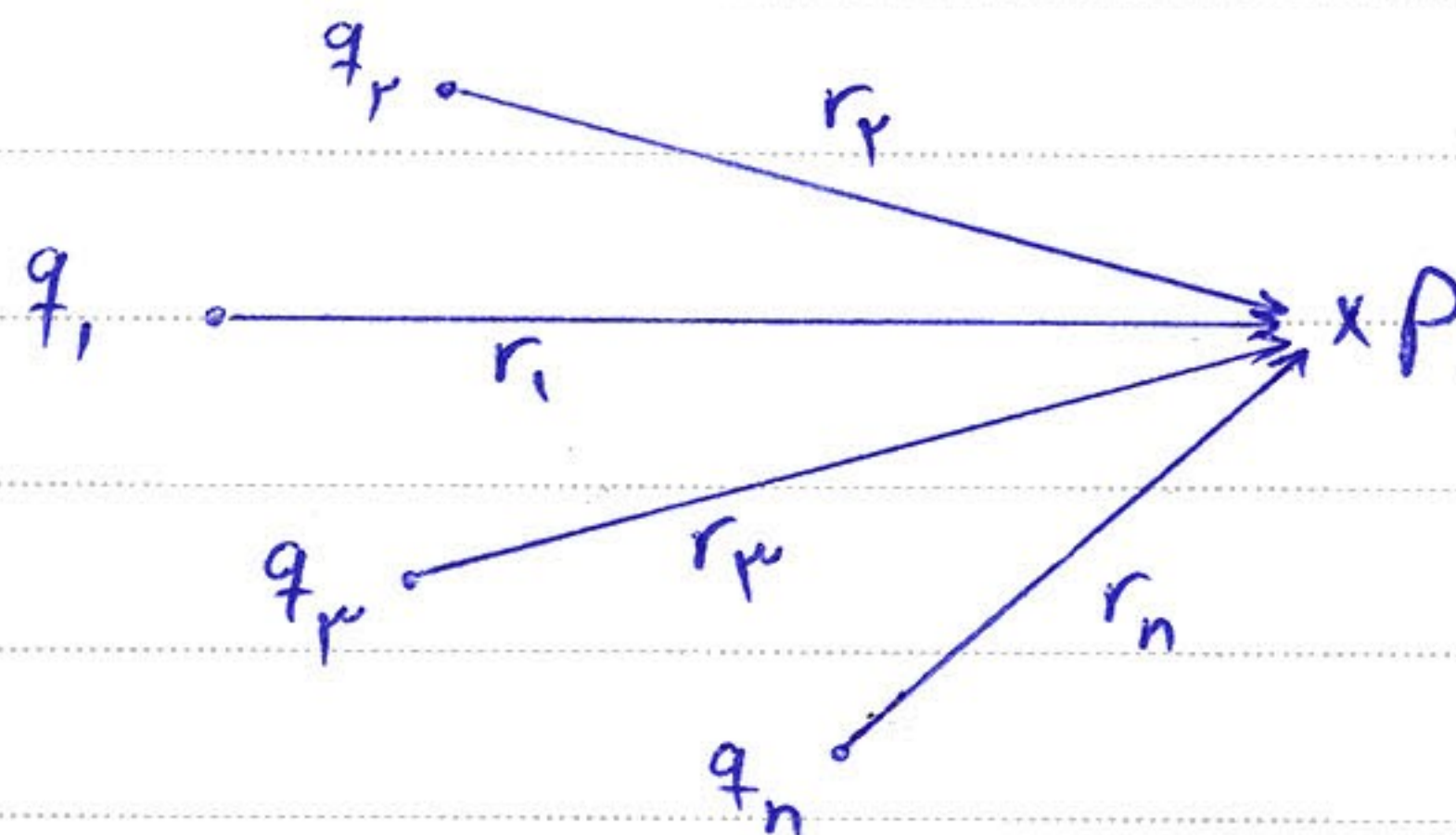
$$\rightarrow V_r = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \times \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{\infty}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \rightarrow +q$$

$$\rightarrow V_r = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \rightarrow -q$$

نکته: پتانسیل یک بار نقطه ای در فاصله r از این بار با رابطه $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ بدست می آید.

می آید. اگر بار مثبت باشد مقدار پتانسیل مثبت و اگر بار منفی باشد مقدار پتانسیل منفی است.

پتانسیل مجموعه ای از بارهای نقطه ای



$$V = \sum_{i=1}^n V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

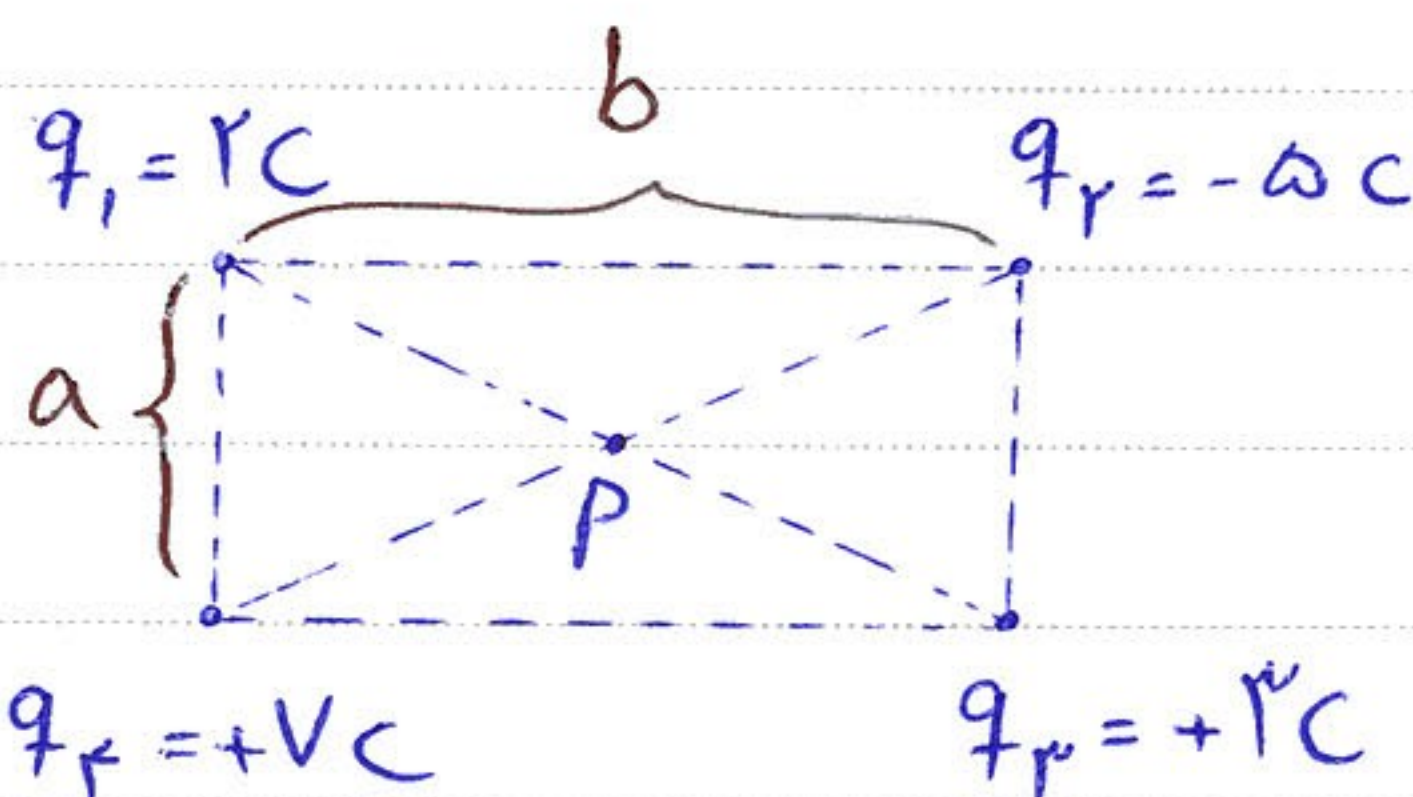
$$= \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_r}{r_r} + \dots + \frac{kq_n}{r_n} \rightarrow V = \sum_{i=1}^n \frac{kq_i}{r_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

پتانسیل مجموعه ای از بارها در یک نقطه می باشد برابر با جمع جبری پتانسیل های آن ها از

تک تک بارها در آن نقطه است.

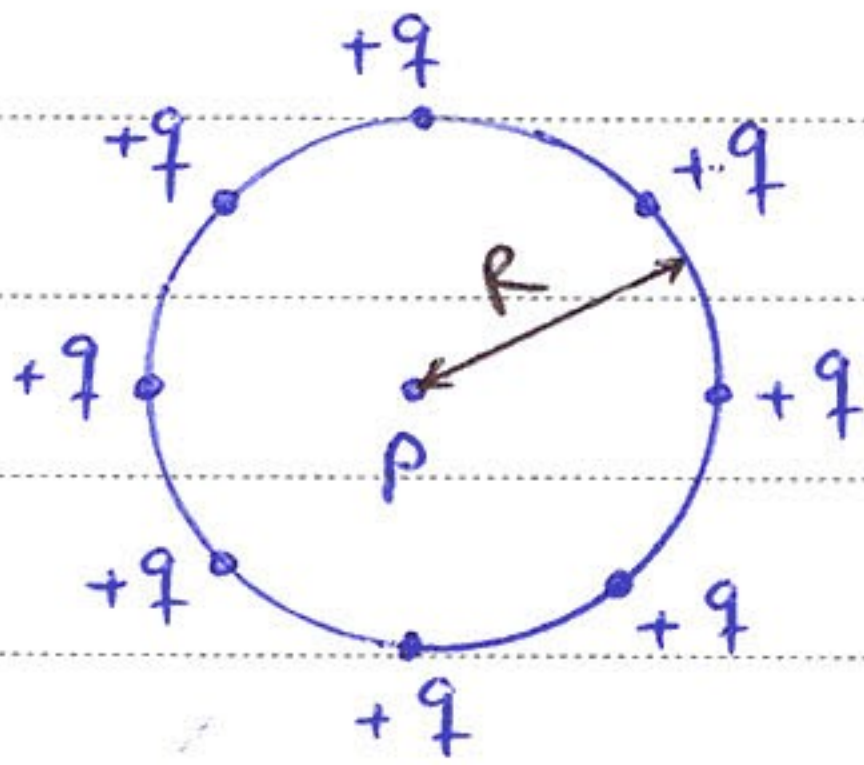
مثال: پتانسیل را در نقطه P بدست آورید.



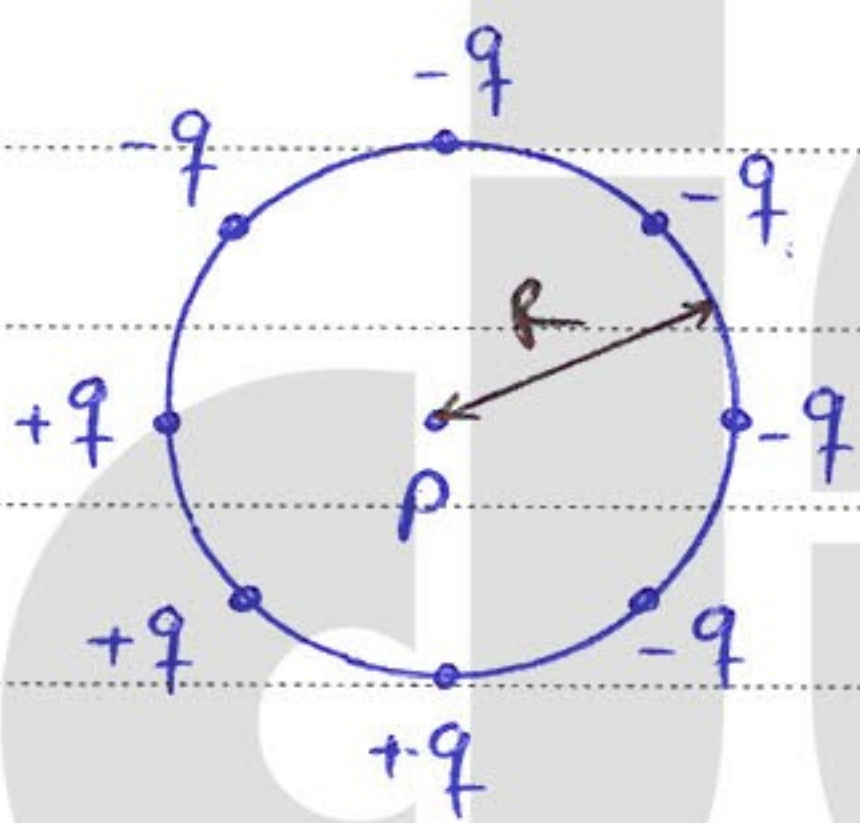
$$V = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 q_i$$

$$= \frac{V}{k\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2+b^2}} (r+V+r-\omega) = \frac{V}{r} \times \frac{1}{\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: پتانسیل در یک نقطه P در یک دایره

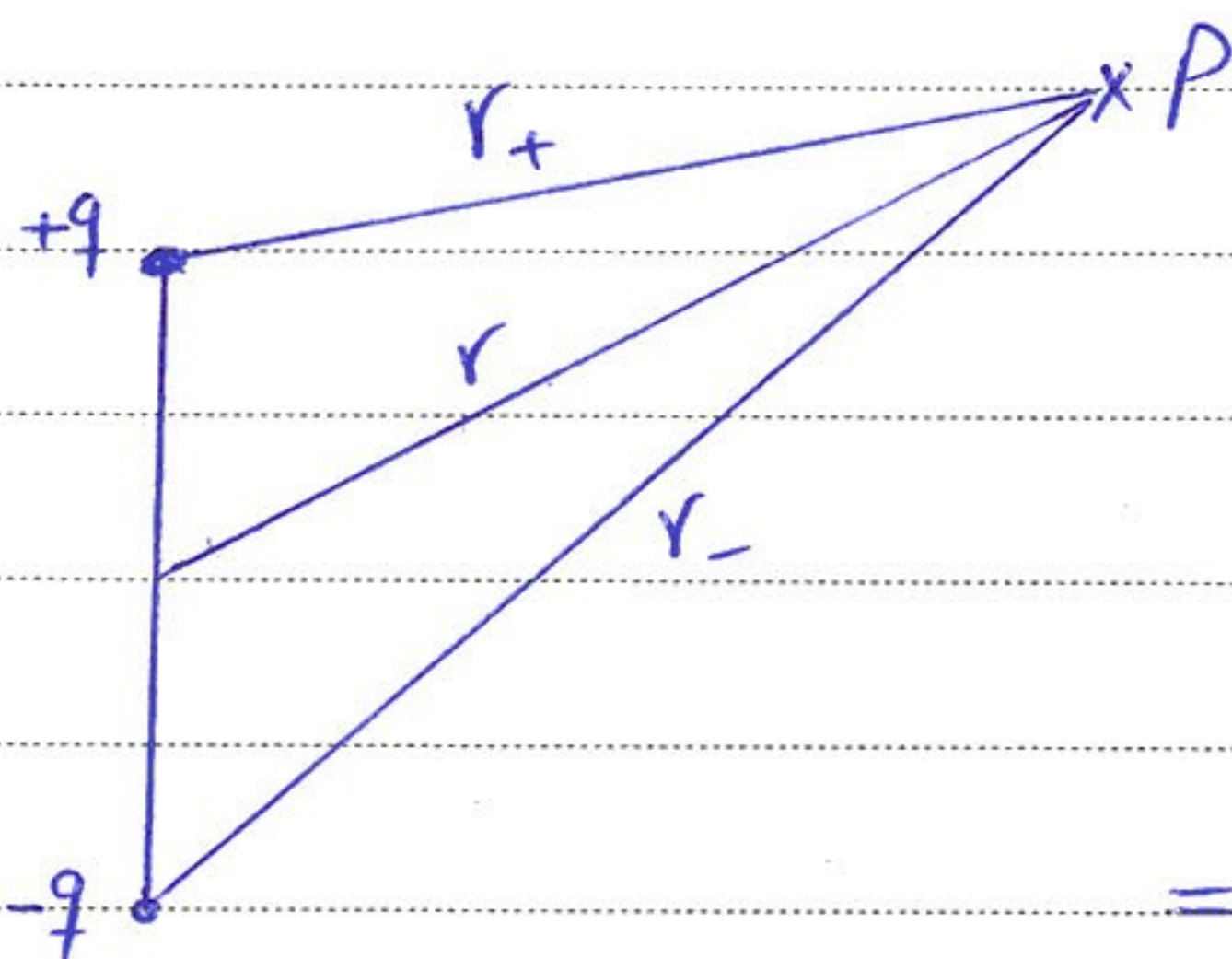


$$V = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{r_i} = \frac{n q}{k\pi\epsilon_0 R} = \frac{2q}{\pi\epsilon_0 R}$$



$$V = \frac{-4q}{k\pi\epsilon_0 R} + \frac{4q}{k\pi\epsilon_0 R} = \frac{-4q}{k\pi\epsilon_0 R}$$

پتانسیل دو قطبی الکتریکی

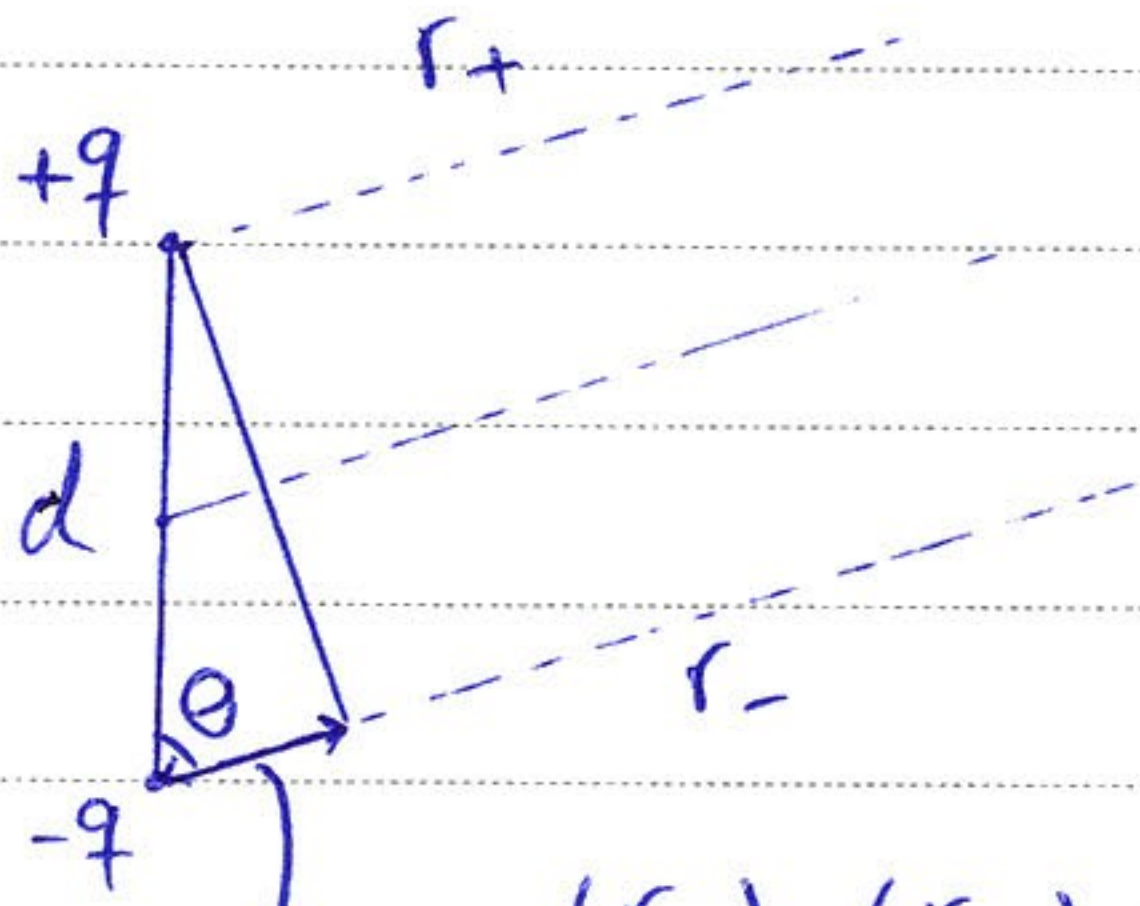


$$V = \frac{q}{k\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{k\pi\epsilon_0 r_-}$$

$$= \frac{q}{k\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$= \frac{q}{k\pi\epsilon_0} \left(\frac{(r_-) + (r_+)}{(r_+)(r_-)} \right)$$

محاسبه ی پتانسیل در فواصل دور



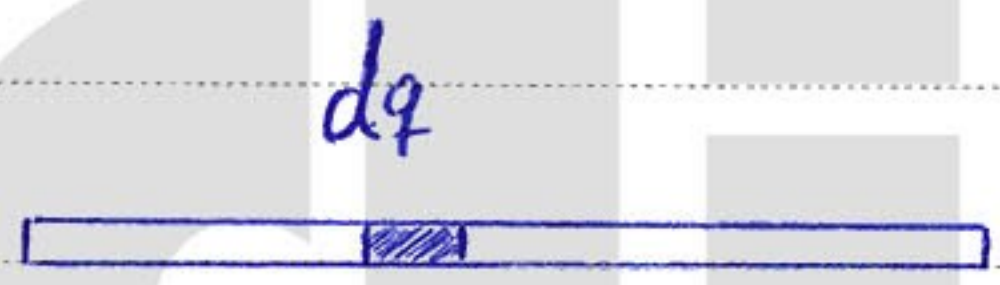
$$(r_+)(r_-) \approx r^2$$

$$(r_-) - (r_+) = d \cos \theta$$

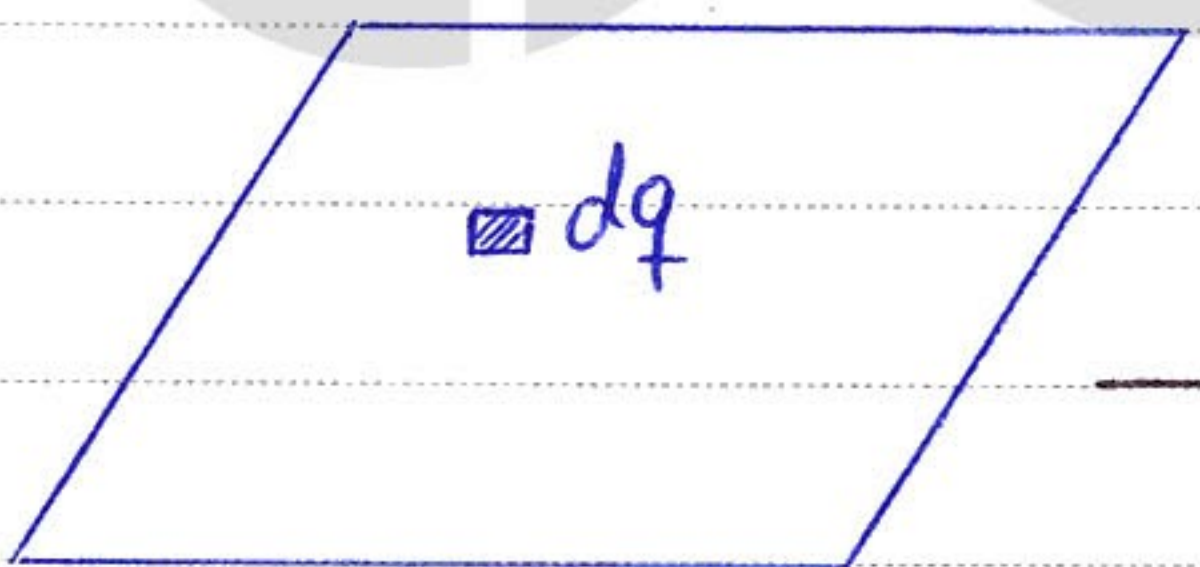
میان بردستی P

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(r_-) - (r_+)}{(r_+)(r_-)} = \frac{q d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

پتانسیل الکتریکی توزیع بار پیوسته



$$dq = \lambda dl$$



$$dq = \sigma ds$$



$$dq = \rho dv$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \xrightarrow{\text{التوزیع بار پیوسته باشد}} V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

مراحل محاسبه توزیع بار یونیفرم

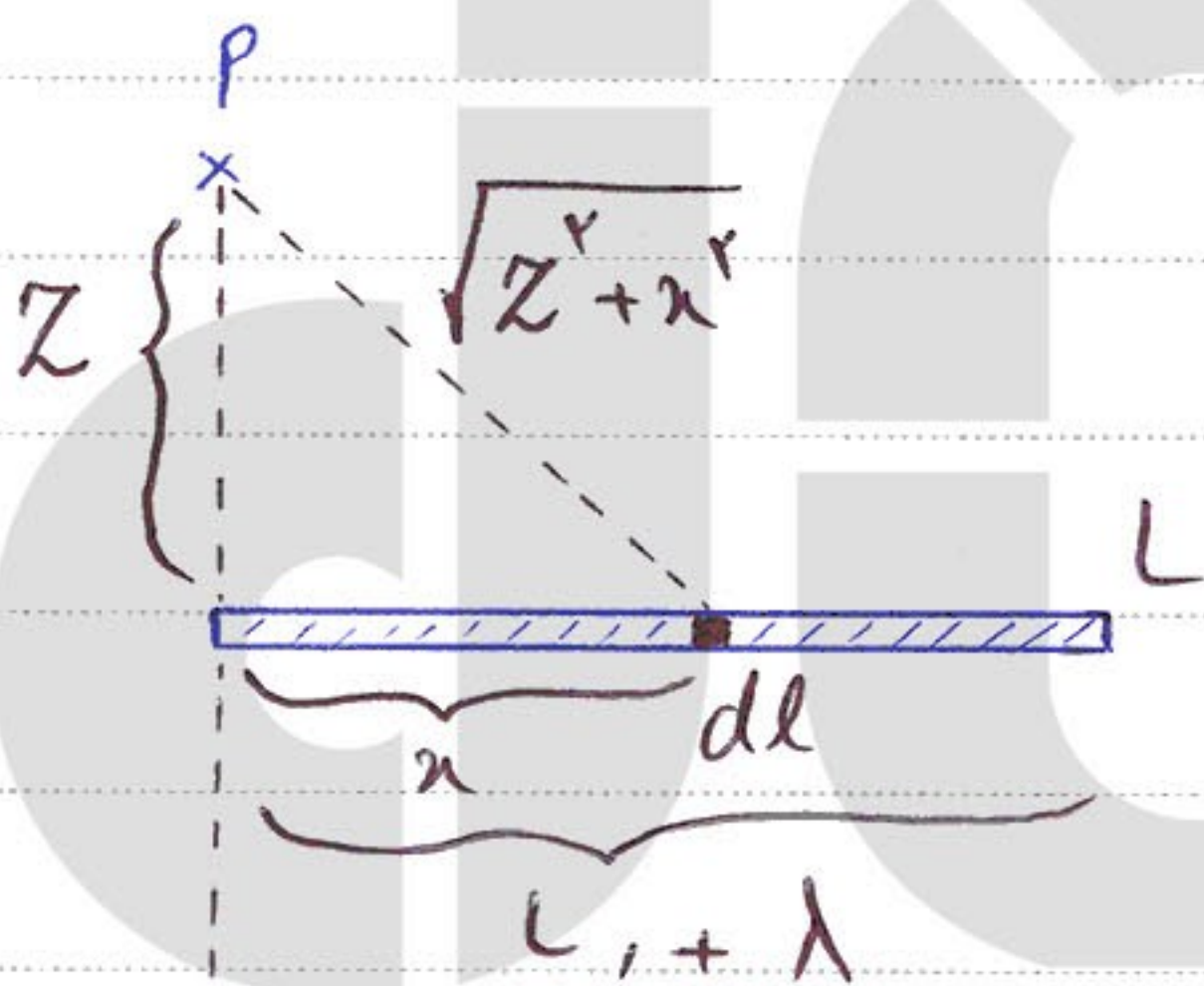
(۱) انتخاب دستگاه مختصات مناسب

(۲) محاسبه dq و نوشتن آن بر حسب مختصات دستگاه انتخابی

(۳) مشخص کردن فاصله dq تا نقطه مورد نظر

(۴) محاسبه انتگرال $V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

بیانسیل الکتریکی توزیع بار یونیفرم



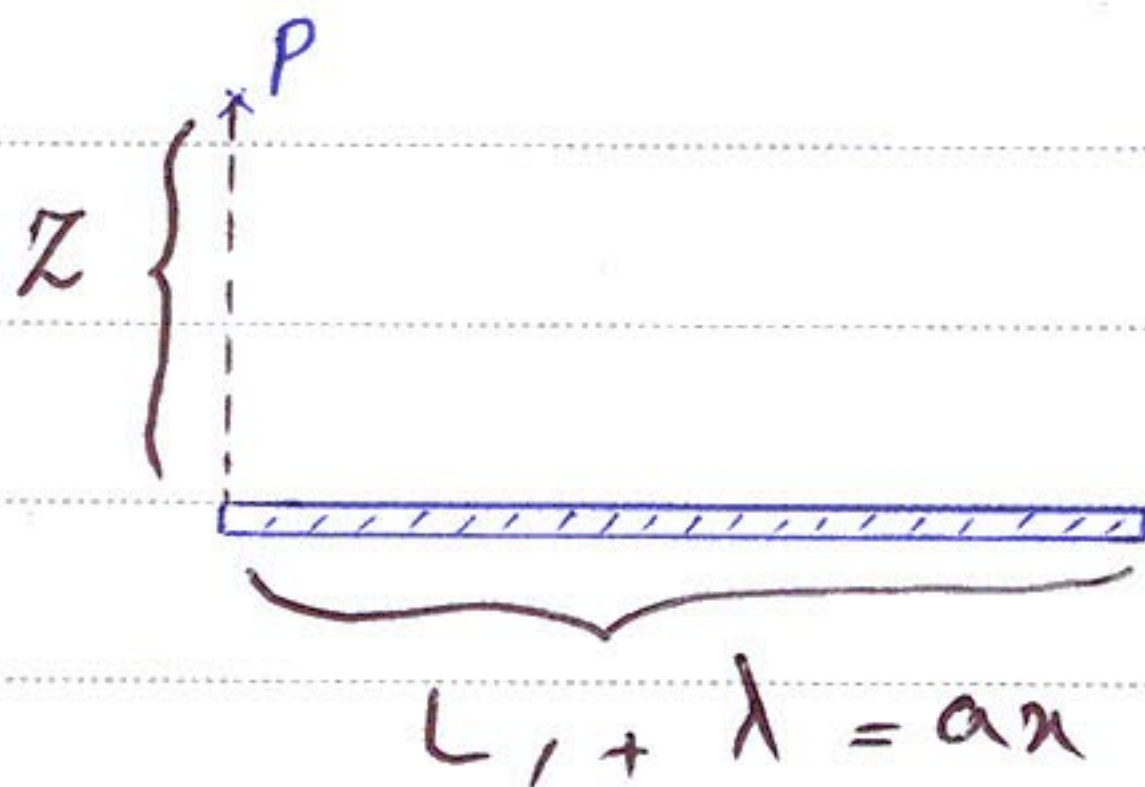
$$dq = \lambda dl \rightarrow dl = dx$$

$$V = \int_l^0 \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{z^2 + x^2})} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_l^0 \frac{dx}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

$$x = z \tan \theta \rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{z(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{\sqrt{z^2 + z^2 \tan^2 \theta}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta}$$

$$\rightarrow l = z \tan \theta \rightarrow \tan \theta = \frac{l}{z} \Rightarrow V = \int_0^{\tan^{-1}(\frac{l}{z})} \sec \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\frac{l}{z})$$



$$\lambda \rightarrow \text{charge density} \quad V = \lambda^r + z^r$$

$$dV = r \lambda$$

$$V = \int_0^L \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{a}{r \times 4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{r \lambda da}{\sqrt{z^r + a^r}} = \int_0^L \frac{dV}{\sqrt{V}}$$

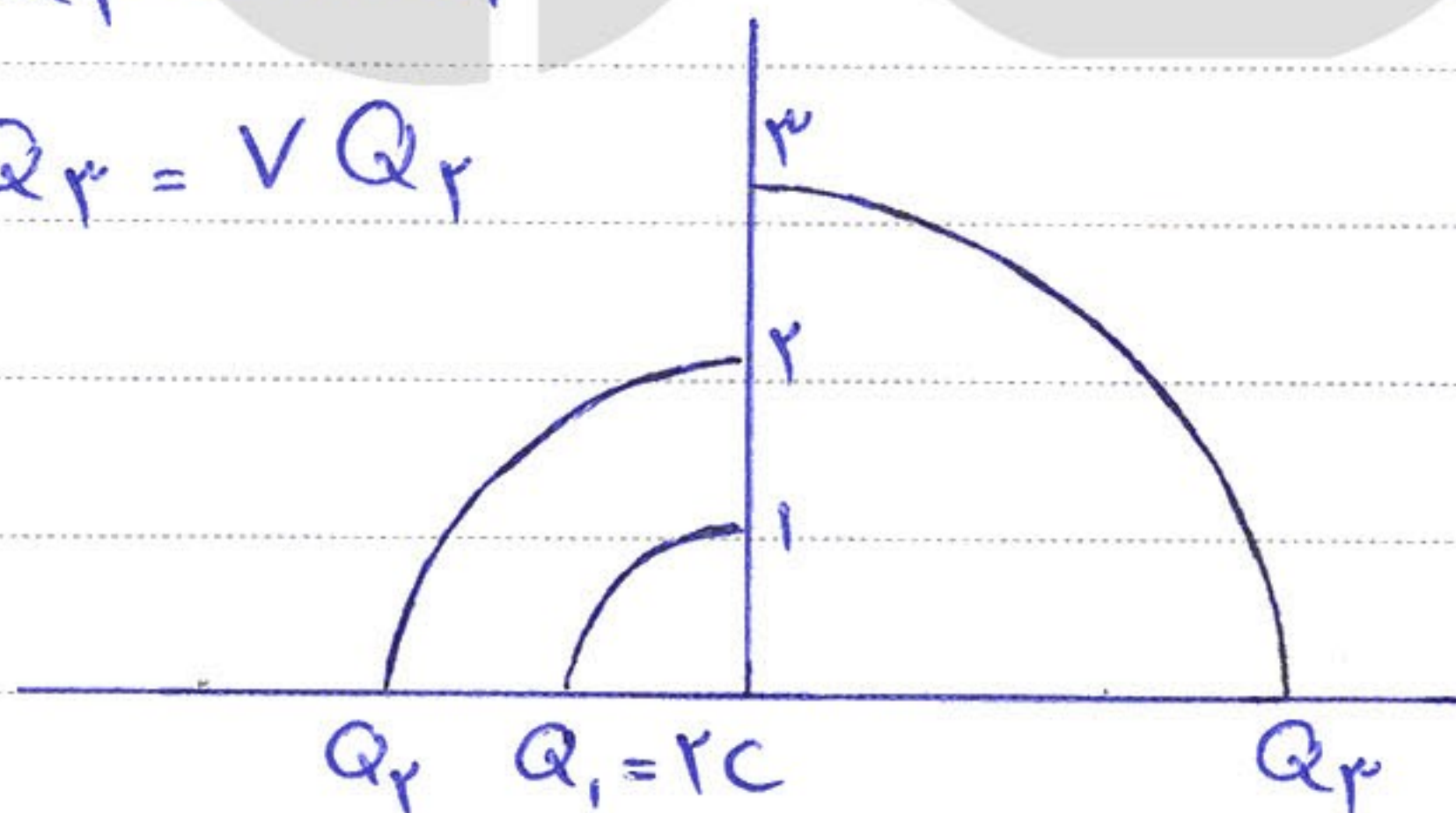
$$= \frac{a}{r \times 4\pi\epsilon_0} \times \frac{V^{1/r}}{1/r} \Big|_0^L = \frac{a}{r \times 4\pi\epsilon_0} \times \frac{(z^r + L^r)^{1/r}}{1/r} \Big|_0^L$$

$$= \frac{a}{4\pi\epsilon_0} (\sqrt{L^r + z^r} - z)$$

مثال: یک سیمای به طول l و چگالی بار λ را در نظر بگیرید.

$$Q_r = -\Delta Q_i$$

$$Q_r = V Q_r$$



$$\lambda = \frac{q}{l} \rightarrow \lambda_1 = \frac{Q_1}{\frac{r \pi r_1}{r}} = \frac{r Q_1}{\pi}$$

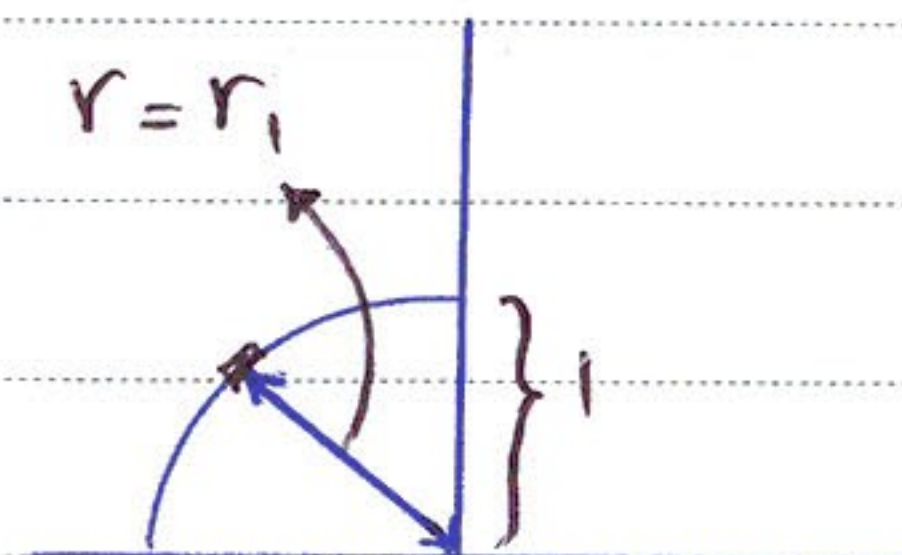
$$dq_1 = \lambda r_1 d\theta \quad r_1 \text{ (مساحت دایره) - 1}$$

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow V = \int \frac{\lambda r_1 d\theta}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/r}^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 r} \times \pi/r$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{r} = \frac{rQ}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{r} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{r}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$dq_1 = \lambda_1 dl = \lambda_1 r_1 d\theta$$



$$r = r_r \rightarrow dq_r = \lambda_r dl = \lambda_r r_r d\theta$$

$$V_r = \int \frac{\lambda_r r_r d\theta}{4\pi\epsilon_0 r_r} = \frac{\lambda_r}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/4}^{\pi} d\theta = \frac{\lambda_r}{4\pi\epsilon_0} \theta \Big|_{\pi/4}^{\pi} = \frac{\lambda_r}{4\pi\epsilon_0} (\pi - \pi/4)$$

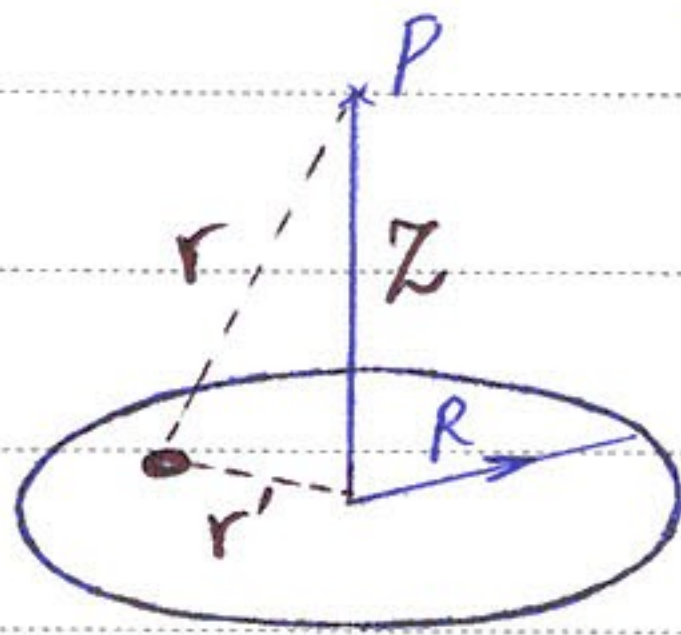
$$\lambda_r = \frac{1.0 \text{ C}}{4\pi r_r} = \frac{r_0}{4\pi r_r} = \frac{r_0}{4\pi \times r} = \frac{1.0}{\pi}$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{\lambda_r}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{r} = \frac{-1.0}{\pi} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{r} = \frac{-\omega}{4\pi\epsilon_0}$$

$$V_r = \frac{\lambda_r}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{r} \Rightarrow \lambda_r = \frac{V_0 C}{\frac{4\pi r_r}{r}} = \frac{1 r_0}{4\pi} \Rightarrow V_r = \frac{-1 r_0}{4\pi} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{-V_0}{16\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow V_T = V_1 + V_r + V_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} - \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0} - \frac{V_0}{16\pi\epsilon_0} = \frac{-V_0}{16\pi\epsilon_0}$$

مثال: پتانسیل در نقطه P، ایدست آورید. (دسیب با جغالی سطحی ∇)



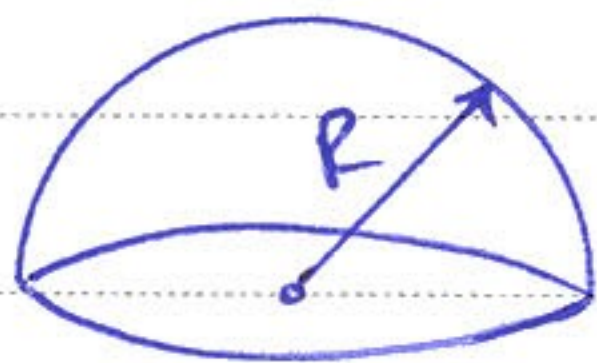
$$dq = \nabla ds$$

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int \frac{\nabla ds}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\nabla}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{ds}{r} = \frac{\nabla}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{r' dr' d\theta}{r}$$

$$= \frac{\nabla}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{r' dr' d\theta}{\sqrt{z^2 + r'^2}} = \frac{\nabla}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$= \frac{\nabla}{4\pi\epsilon_0} \times 2\pi \times (\sqrt{z^2 + R^2} - z) = \frac{\nabla}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$$

تمرین: پتانسیل در مرکز دایره سطحی با ∇ ایدست آورید.



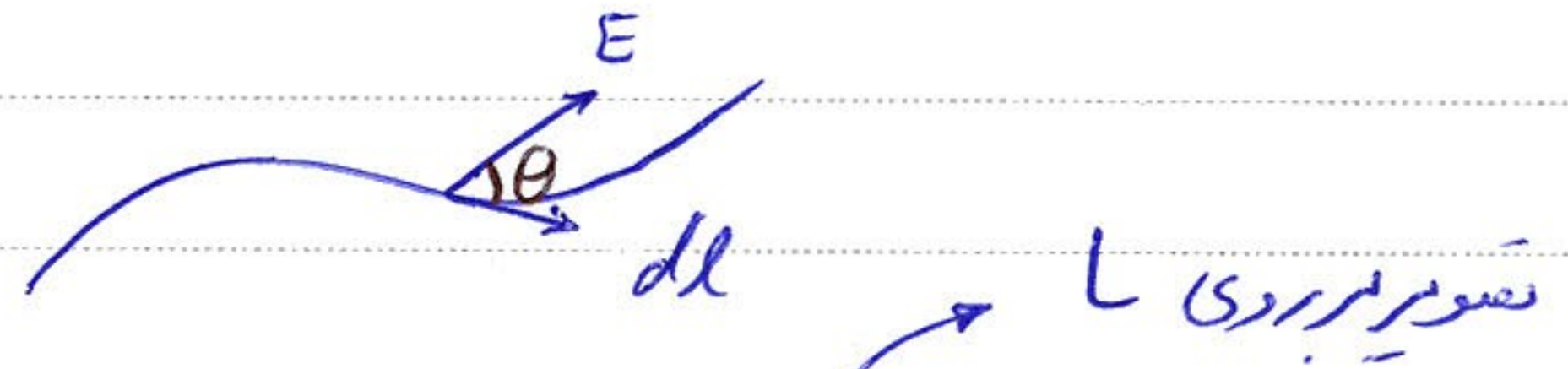
تمرین: پتانسیل در مرکز نیم کره با جغالی حجمی ρ ایدست آورید.



محاسبه میدان پتانسیل با استفاده از پتانسیل

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} \rightarrow dW = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow dV = \frac{-dW}{q} = \frac{-q \cdot E \cdot dl}{q}$$

$$\rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$\rightarrow dV = -E dl \cos\theta \rightarrow E \cos\theta = \frac{-dV}{dl} \rightarrow E_L = -\frac{dV}{dl}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$$

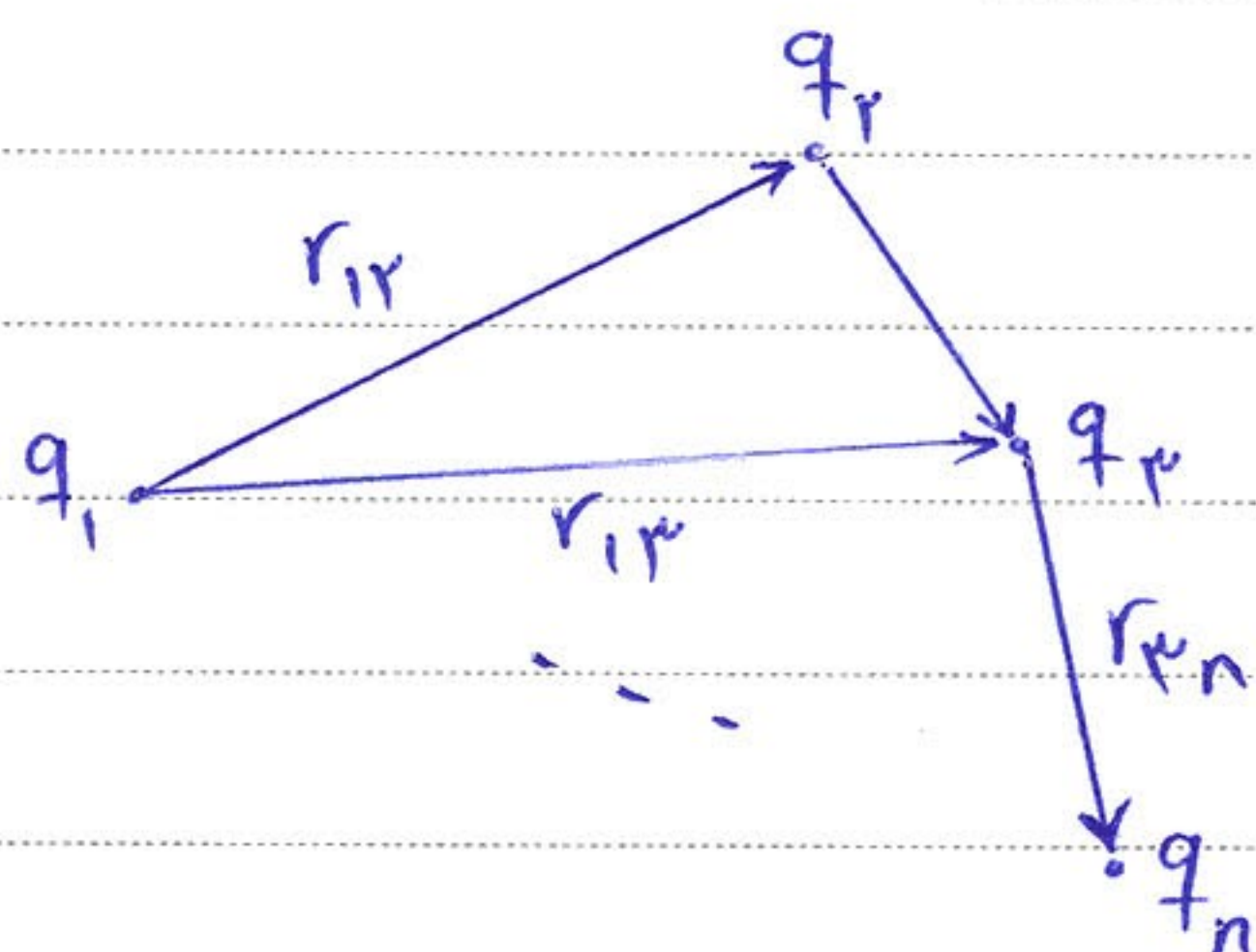
سوال: با استفاده از رابطه پتانسیل مربوط به دسک باردار در ناحیه عمودی Z

مؤلفه های میدان را بدست آورید.

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = -\frac{\partial (\sqrt{R^2 + Z^2} - Z)}{\partial Z}$$

$$\rightarrow E_z = \frac{-\partial}{\partial Z} \left(\frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} - 1 \right)$$

انرژی پتانسیل مجموعه بار

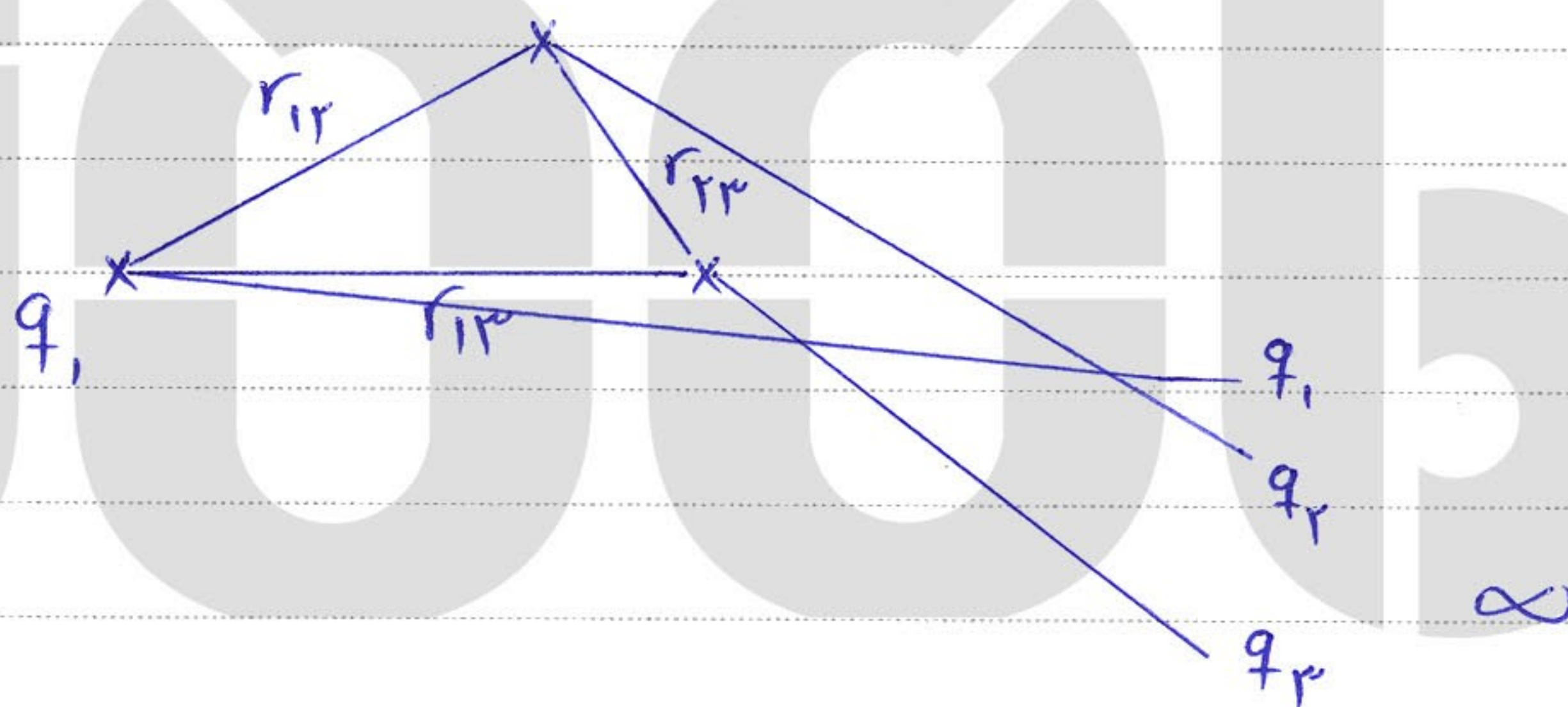


$$\Delta U = U_f - U_i = -W$$

$$\Delta U = +W_{app}$$

$$U = -W_{\infty} = +W_{app, \infty}$$

$$\rightarrow V = -\frac{W_{\infty}}{q} = \frac{+W_{app, \infty}}{q} \Rightarrow W_{app, \infty} = qV$$



$$W_1 = 0, W_2 = q_2 V_1, W_3 = q_3 V_1 + q_3 V_2$$

$$W_4 = q_4 V_1 + q_4 V_2 + q_4 V_3$$

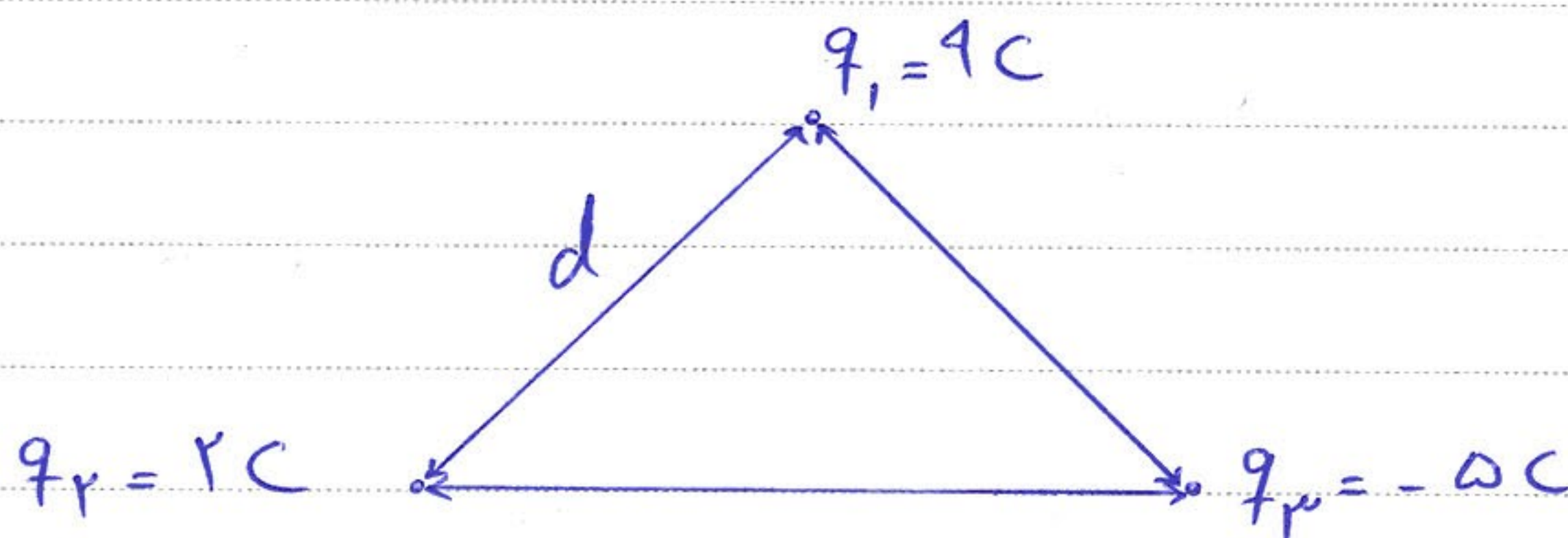
$$\text{انرژی پتانسیل مجموعه بار} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0 + q_2 V_1 + q_3 V_1 +$$

$$q_3 V_2 + q_4 V_1 + q_4 V_2 + q_4 V_3$$

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{4\pi \epsilon_0 r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi \epsilon_0 r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{4\pi \epsilon_0 r_{34}}$$

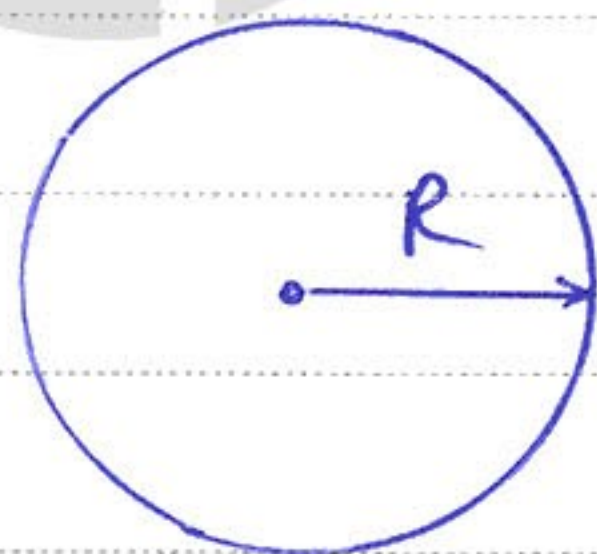
$$\Rightarrow U = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

مثال: انرژی پتانسیل این مجموعه بار را محاسبه کنید.



$$U = \frac{q \times q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q \times -5}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-5 \times 2}{4\pi\epsilon_0 d} = \left(\frac{-3q}{d} \right) \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

مثال: پتانسیل را در پوسته نوری رسانای زیر را بدست آورید.



$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R \end{cases}$$

$$r < R \rightarrow E = 0 \rightarrow \Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow V_i = V_f$$

$$r \geq R \rightarrow \Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_f - V_i = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{در نقطه بی نهایت} \rightarrow V_{r>R} = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

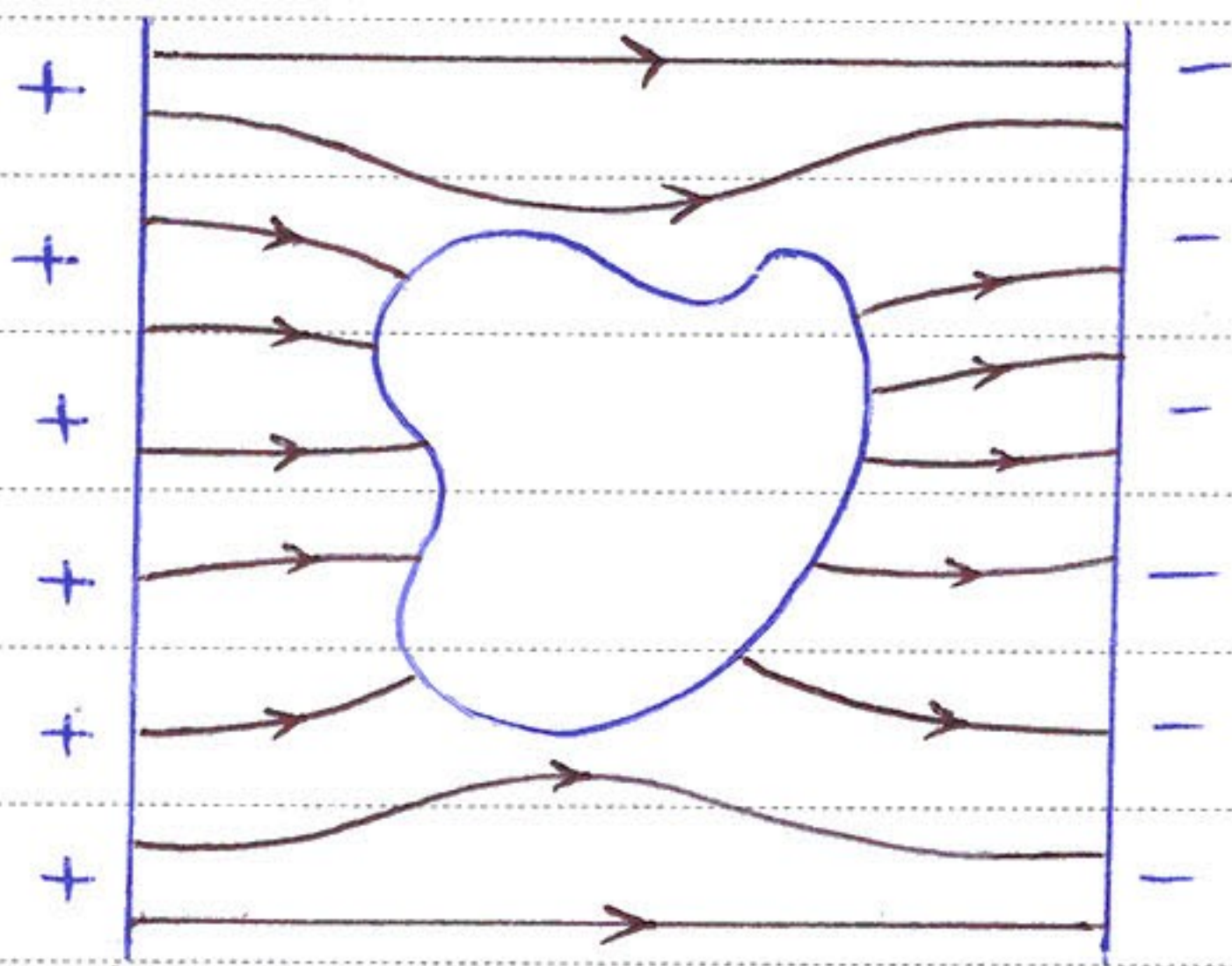
$$\rightarrow V_{r>R} = - \int_{\infty}^r E dl \cos(180^\circ) = \int_{\infty}^r E dl \rightarrow dl = -dr$$

$$\rightarrow V_{r>R} = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

یک جسم رسانا یک سطح هم پتانسیل است زیرا پتانسیل در همه جا (روی سطح و داخل رسانا) با هم برابر است.

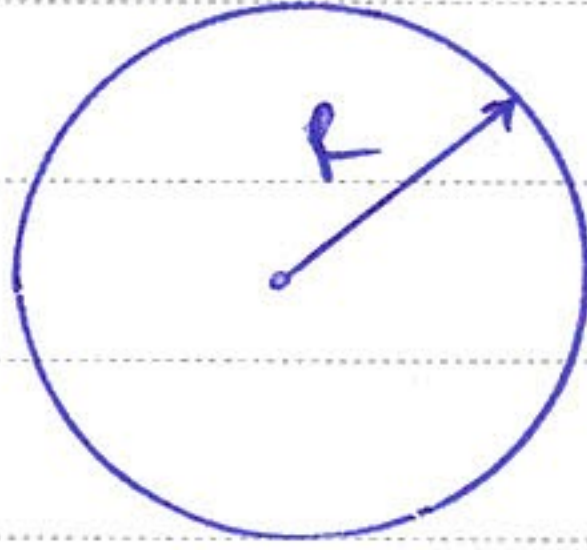
خطوط میدان الکتریکی بر سطح جسم رسانا عمودند.

جسم رسانا به عنوان یک سطح هم پتانسیل شکل خطوط میدان را تغییر می دهد.



$$\Delta V = \frac{w}{q} \rightarrow w = q \Delta V = 0$$

تمرین: پتانسیل الکتریکی در لایه با شعاع R و چگالی حجمی ρ را بدست آورید.



$$V(R) = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2} & r < R \\ \frac{\rho R^2}{2} & r > R \end{cases}$$

d88b

فصل پنجم

خازن ها

خازن: هر دو صفت فلزی اینزوله به دارای فاصله مشخص از یکدیگرند خازن نامیده

می شود. خازن برای ذخیره انرژی الکتریکی به کار می رود.

نماد خازن ← $\begin{array}{c} +q \\ | \\ -q \end{array}$ در مدار

* وقتی خازن شارژی شود، دارای بار q است.

* بین صفحات خازن باردار اختلاف پتانسیل (ΔV) وجود دارد.

V ولتاژ خازن

$$\rightarrow V \uparrow \rightarrow q \uparrow \rightarrow q \propto V \rightarrow q = CV$$

q بار خازن

که ظرفیت خازن

ظرفیت خازن: خاصیتی است که در خازن به ازای یک ولتاژ مشخص است.

$$q = CV \rightarrow C = \frac{q}{V}$$

$$\text{فاراد} \quad \frac{C}{V} = F$$

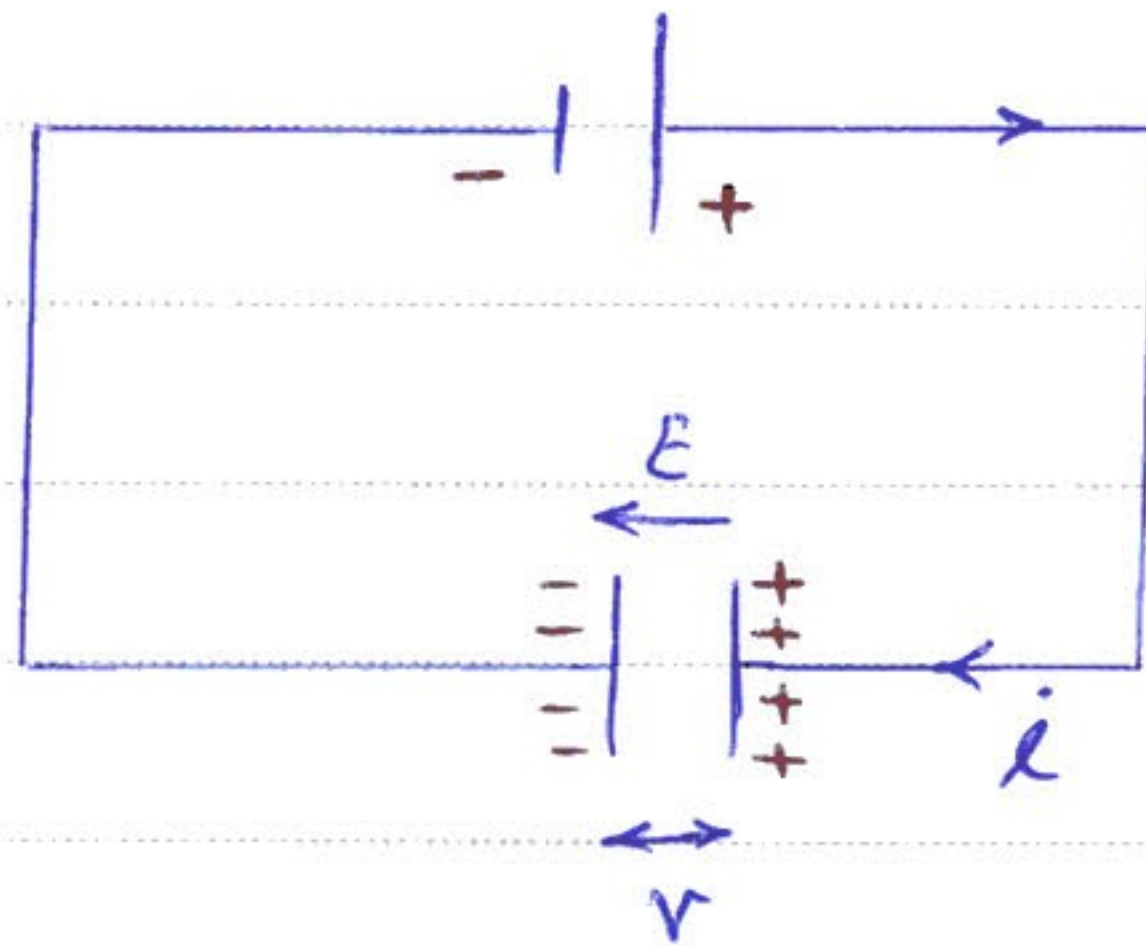
$$\mu F \rightarrow \text{میکرو فاراد}$$

$$\mu = 1 \times 10^{-6}$$

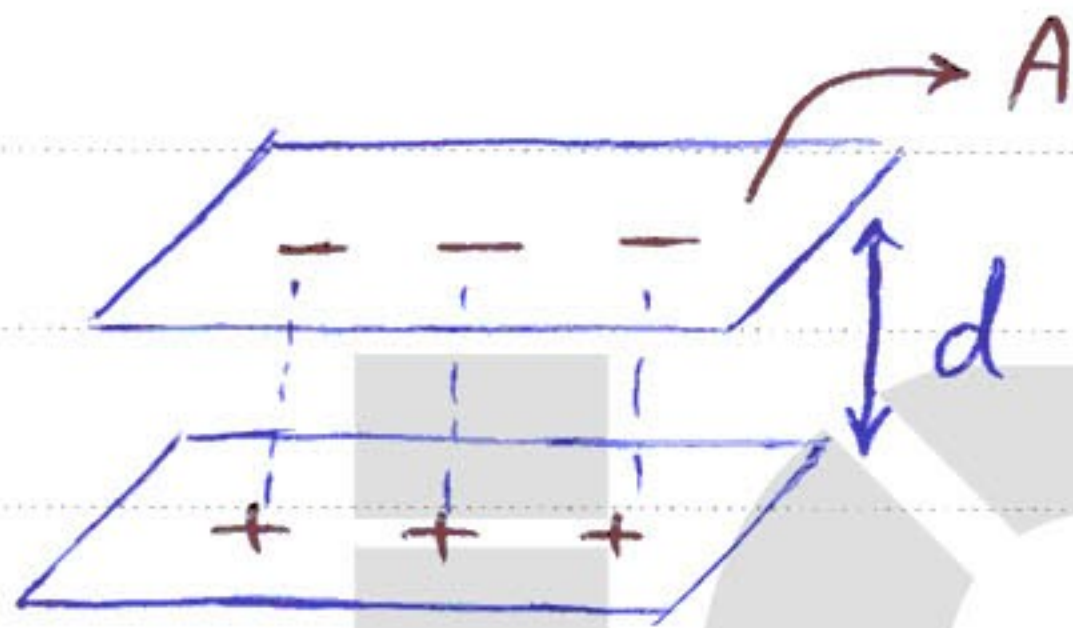
$$pF \rightarrow \text{پیکو فاراد}$$

$$p = 1 \times 10^{-12}$$

* خازن زمانی شارژی شود به اختلاف پتانسیل در صفحه این برابر اختلاف پتانسیل باطری شود.



محاسبه ظرفیت یک خازن



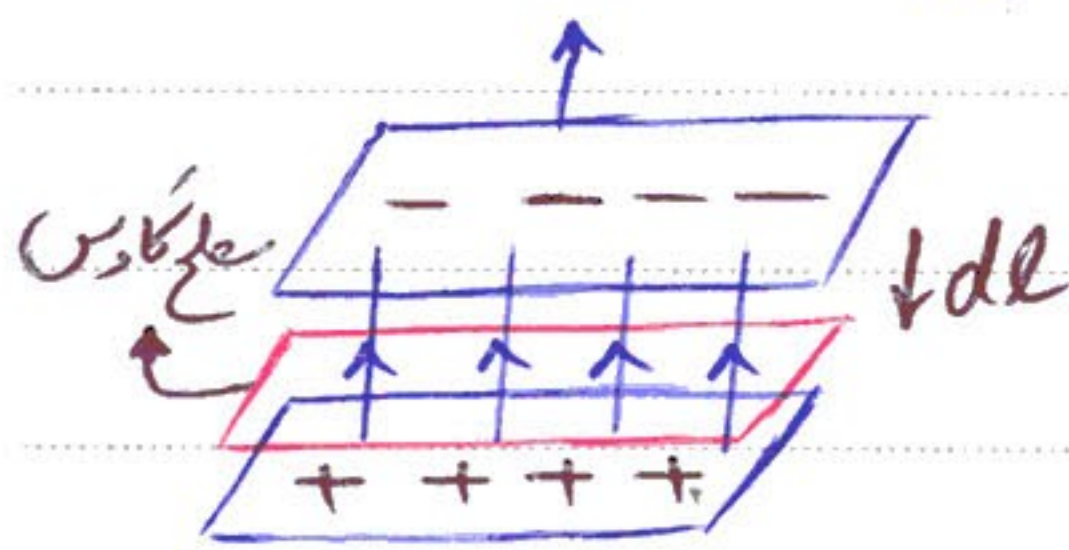
(۱) فرض می کنیم روی صفحه بار q است.

(۲) بین دو صفحه میدان الکتریکی وجود دارد.

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad (۳)$$

$$\Delta V = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (۴)$$

- با استفاده از قانون گاوس میدان را بین دو صفحه محاسبه می کنیم.



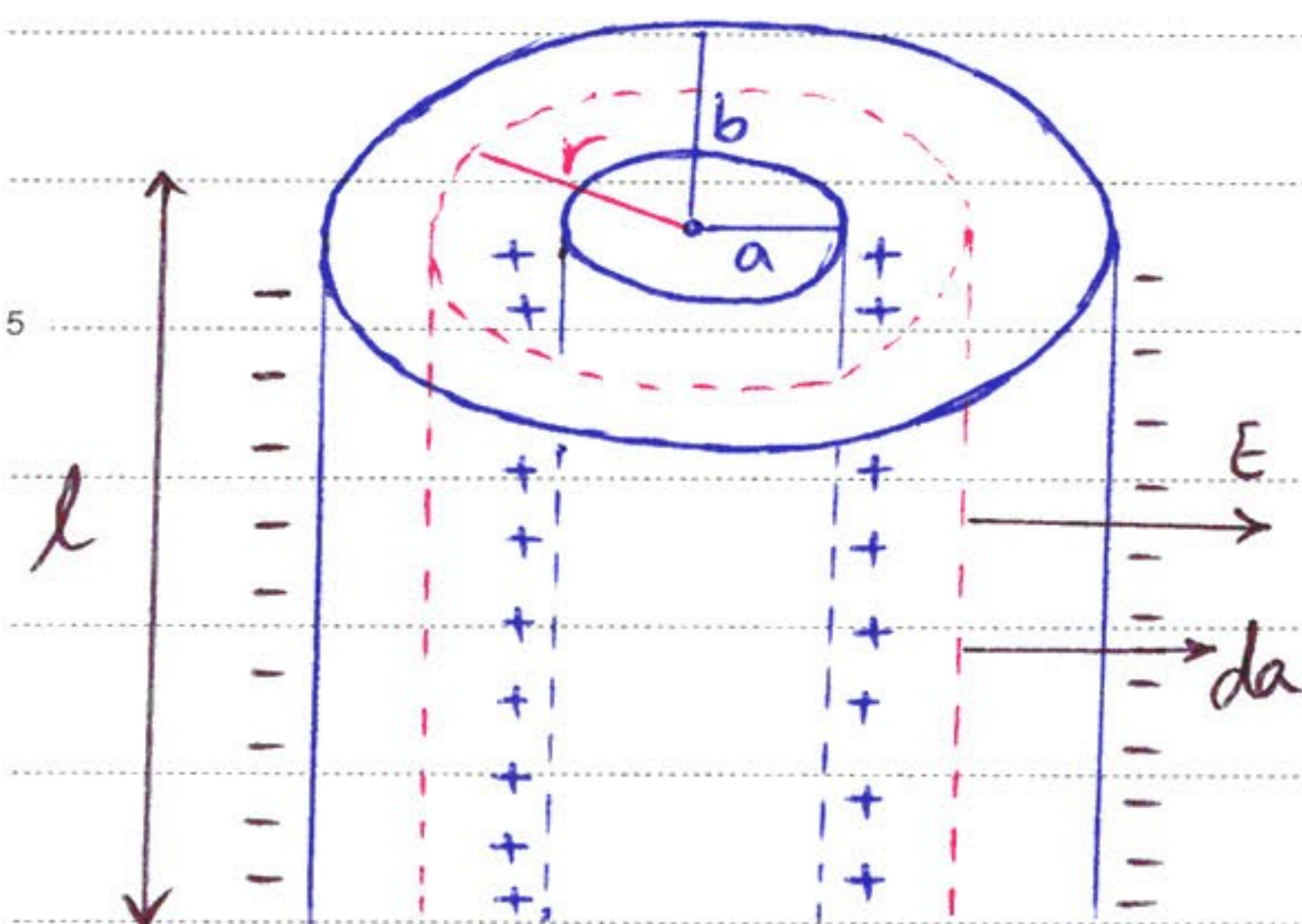
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc} \rightarrow \epsilon_0 \int E da \cos(0) = q$$

$$\rightarrow \epsilon_0 E \int da = q \rightarrow \epsilon_0 E A = q \rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$\Delta V = V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{q}{\epsilon_0 A} dl \cos(180^\circ)$$

$$= - \frac{q}{\epsilon_0 A} \int dl = - \frac{q}{\epsilon_0 A} d \rightarrow C = \frac{q}{\frac{q d}{\epsilon_0 A}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

مثال: ظرف خازن استوانه‌ای را بدست آورید.



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc} \rightarrow \epsilon_0 \int E da = q$$

$$\rightarrow \epsilon_0 \int E da \cos(0) = q$$

$$\rightarrow \epsilon_0 E \int da = q \rightarrow \epsilon_0 E (2\pi r l) = q$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r l}$$

میانگین ثابت نسبت به تابع شعاع بوده و با نزدیک شدن E قویتر و با دور شدن E ضعیف‌تر می‌شود.

$$\rightarrow \Delta V = V_r - V_i = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_r - V_i = - \int_i^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_i^r E (-dr) \cos(180^\circ)$$

$$\rightarrow - \int_b^a \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r l} dr = \frac{-q}{2\pi \epsilon_0 l} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{-q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln r \Big|_b^a$$

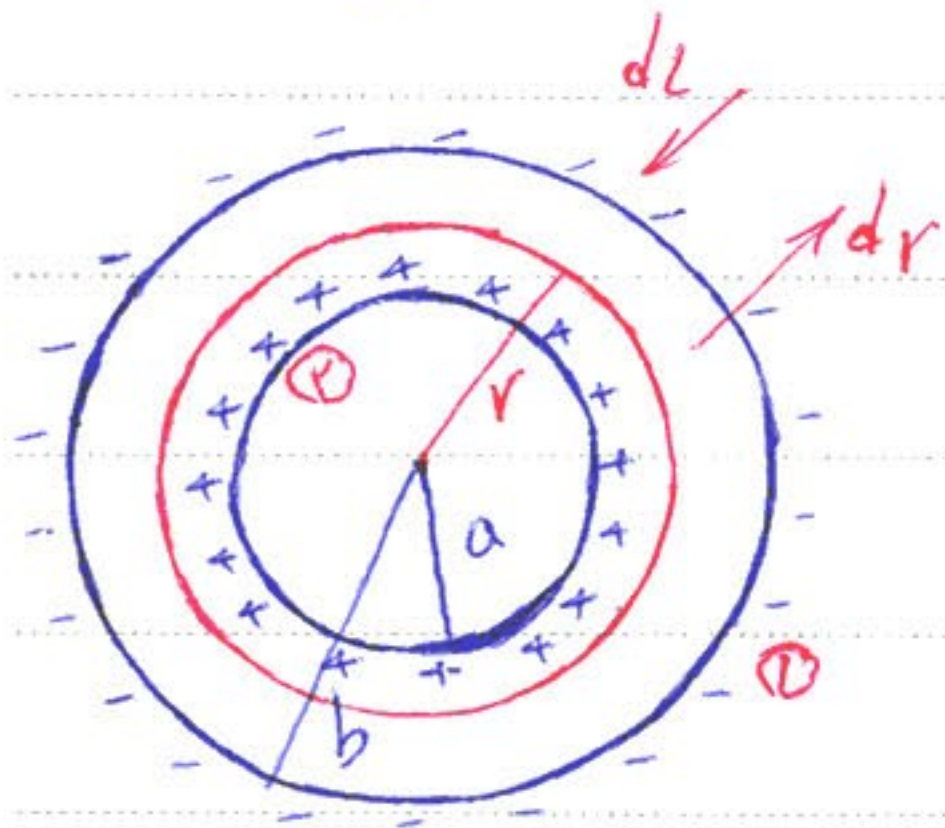
$$= \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} (\ln b - \ln a) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{|\Delta V|} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln(b/a)} = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln(b/a)}$$

قد مطلق چون یک مقدار نسبت است

نکته: ظرفیت به مختصات هندسی بستگی دارد و مستقل از پتانسیل و بار است.

مثال: ظرفیت نیروی دارای بار Q است. ظرفیت این خازن را بدست آورید.



$$\epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc} \rightarrow \epsilon_0 \int E \cdot da = q$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E 4\pi r^2 = q \rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = - \int \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} dr = - \int \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} \times (-dr \cos(\pi))$$

$$= - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \int_b^a \frac{1}{r^2} dr = - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_b^a \right) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi \epsilon_0 ab}{b - a}$$

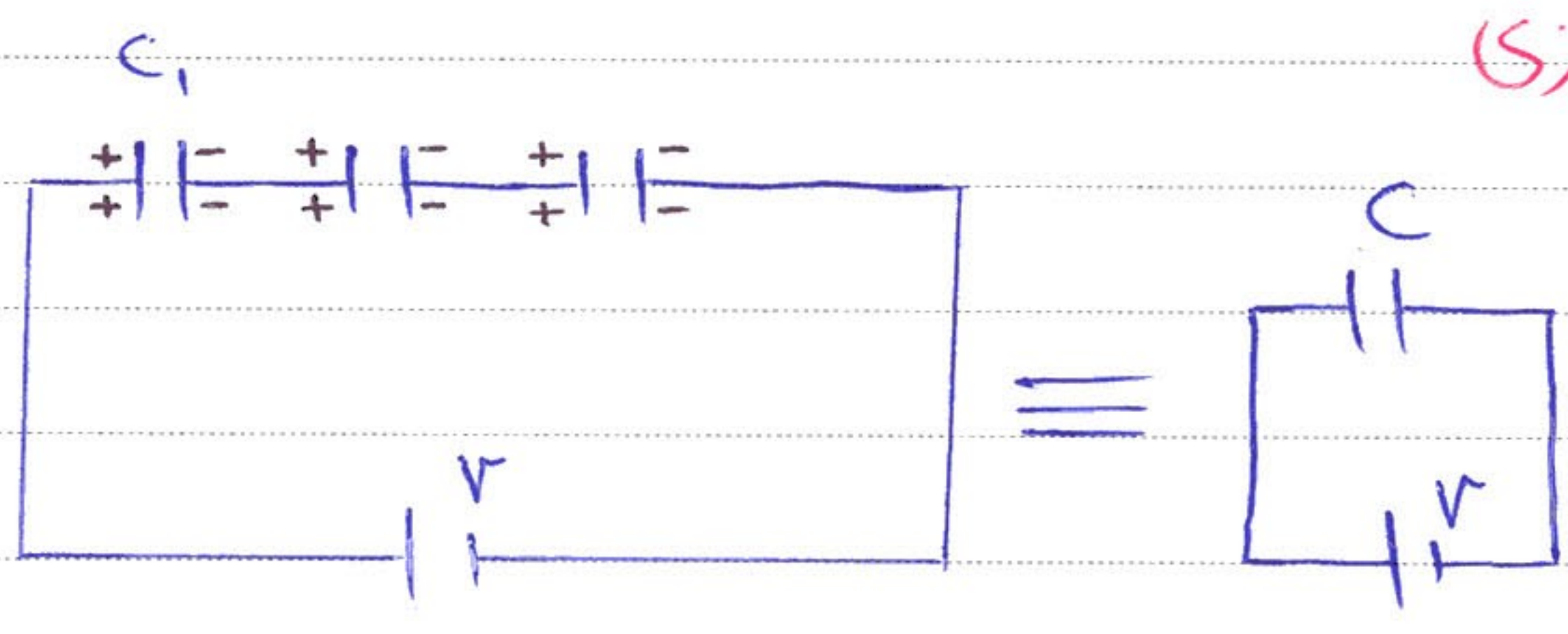
مثال: با استفاده از ظرفیت خازن نیروی، ظرفیت یک لوله انزوله را بدست آورید.

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 ab}{b - a} \rightarrow \text{if } b \rightarrow \infty \Rightarrow C = \frac{4\pi \epsilon_0 ab}{b(1 - a/b)}$$

$$\xrightarrow{b \rightarrow \infty} C = 4\pi \epsilon_0 a \rightarrow \text{یک لوله انزوله}$$

خازن های سری و موازی

(۱) سری

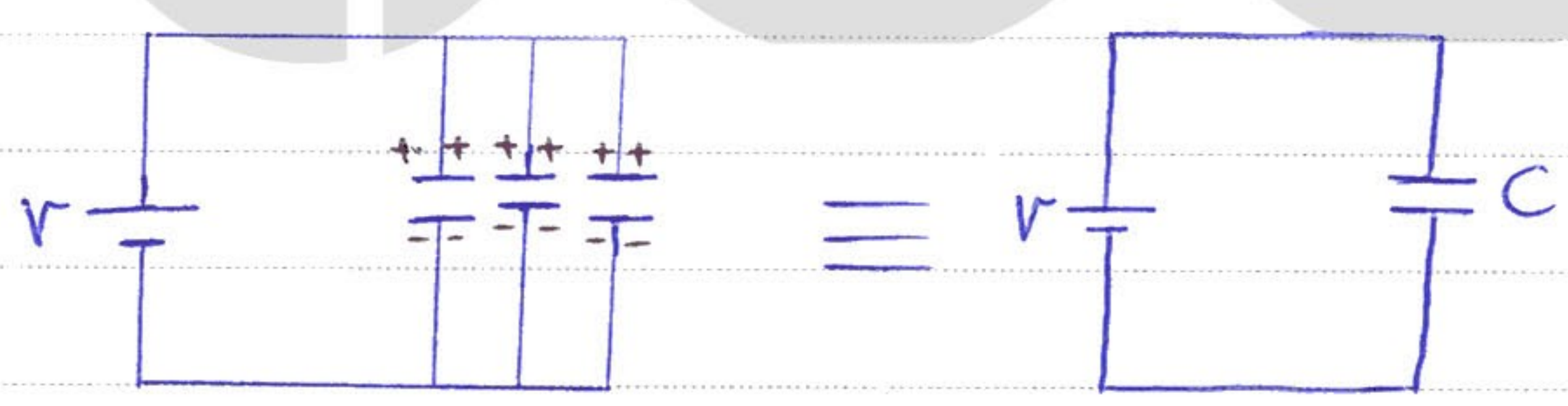


→ $V_T = V_1 + V_2 + V_3$

→ $q_T = q_1 = q_2 = q_3$

→ $\frac{q}{C} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} \rightarrow \frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

$\Rightarrow C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$



(۲) موازی

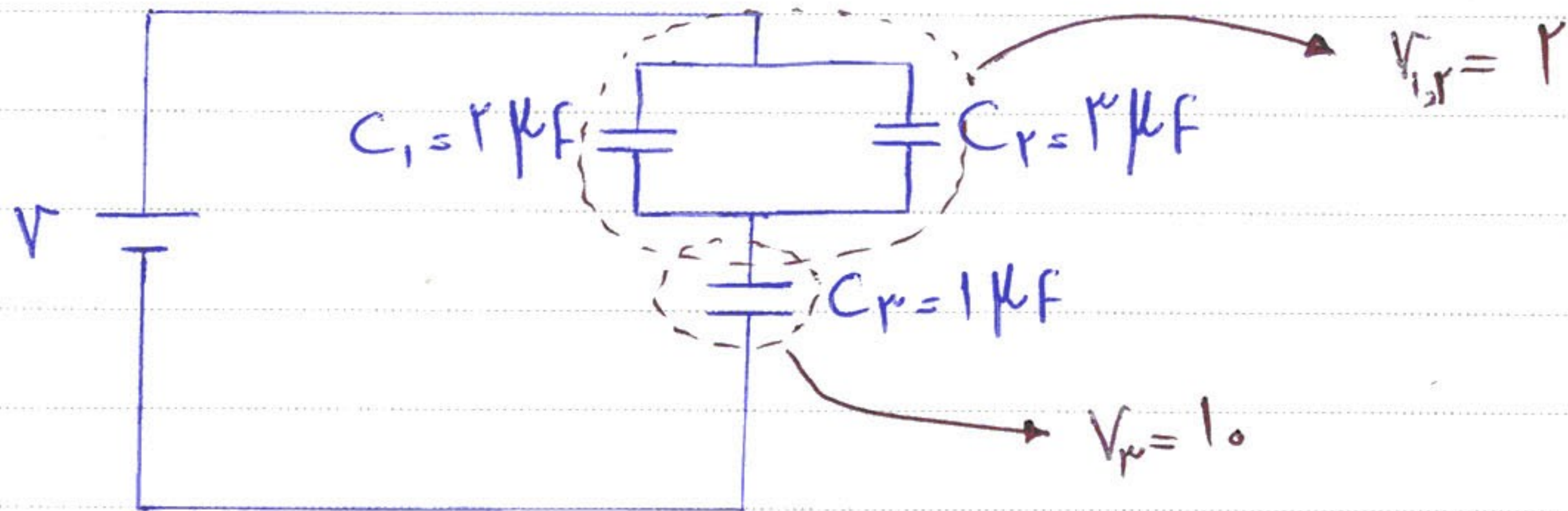
→ $V_T = V_1 = V_2 = V_3$

$\Rightarrow C = \sum_{i=1}^n C_i$

→ $q_T = q_1 + q_2 + q_3$

→ $CV = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 \rightarrow C_T = C_1 + C_2 + C_3$

سؤال: الف) $C_T = ?$ ب) اگر $V = 12V$ و $q = 9$ ؟



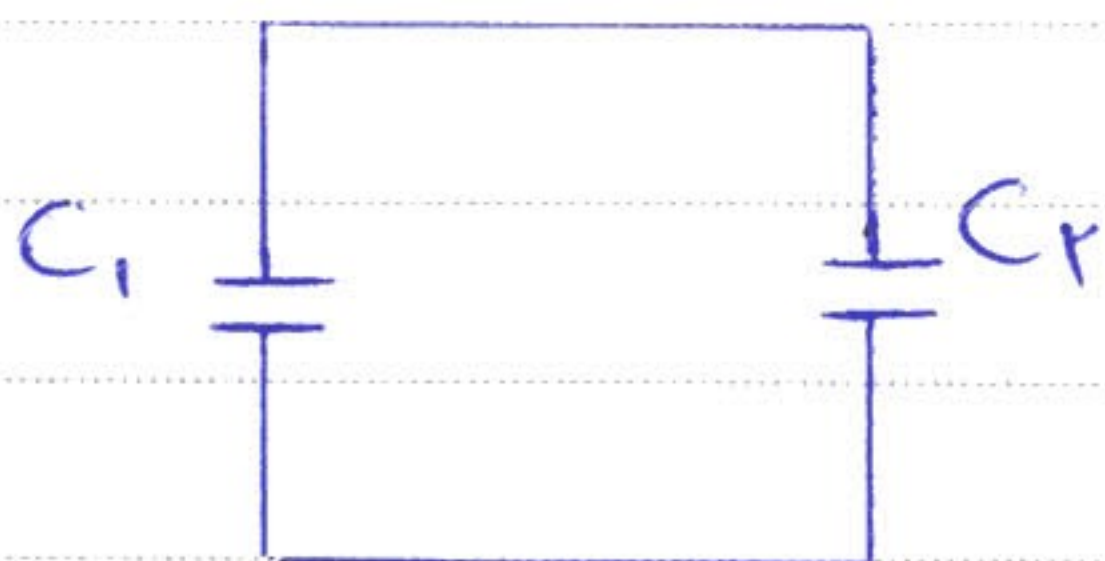
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{\omega} = \frac{4}{\omega} \rightarrow C = \frac{\omega}{4}$$

$$V_1 + V_r = 12 \rightarrow \frac{q_r}{1} + \frac{q_{1,r}}{\omega} = 12 \rightarrow q \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) = 12 \rightarrow q = 10$$

$$\Rightarrow q_1 = C_1 V_1 \Rightarrow q_1 = 2 \times 2 = 4$$

سؤال: خازن C_1 با ظرفیت $2 \mu F$ باید با بطری با ولتاژ $5V$ شارژ شده و خازن C_r با

ظرفیت $4 \mu F$ به صورت موازی می بینیم حال بار هر دو خازن را بدست آورید.



$$q = CV \rightarrow q_1 = 2 \times 5 = 10$$

$$q_T = q_1 + q_r, \quad V_T = V_1 = V_r$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_r}{C_r}, \quad q = q_1 + q_r \Rightarrow \frac{q_1}{2} = \frac{q_r}{4} \rightarrow q_1 = \frac{q_r}{2}$$

$$\rightarrow q_T = q_r + \frac{q_r}{2} \Rightarrow 10 = q_r + \frac{q_r}{2} \rightarrow \frac{3q_r}{2} = 10 \Rightarrow q_r = \frac{20}{3}$$

$$\rightarrow q_1 = \frac{10}{3}$$

انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک خازن

کار انجام شده توسط باتری در حین شارژ شدن خازن به صورت انرژی در میدان الکتریکی

بین صفحات خازن ذخیره می شود.

فرض بر این است که در زمان t ولتاژ دو سر خازن V' و بار روی صفحات آن q' است.

$$V' = \frac{q'}{C} \rightarrow dW = V' dq' \rightarrow W_{\text{کابل}} = \int_0^q V' dq' = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \left. \frac{q'^2}{2C} \right|_0^q = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$\text{انرژی ذخیره شده} \rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$$

مثال: خازنی با ظرفیت C که شارژ شده است بعد از شارژ شدن خازن مساحت صفحات به $\frac{1}{2}$

مساحت اولیه کاهش می یابد. حال تغییر انرژی الکتریکی خازن را بدست آورید.

$$C_r = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{2d} \rightarrow \frac{q^2}{2C_r}, \text{ و } C_r = \frac{C_1}{2} \Rightarrow U_r = \frac{q^2}{C_r}$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2 d}{\epsilon_0 A} \right), U_r > U_1 \rightarrow \frac{U_r}{U_1} = 2$$

$$\rightarrow U_r - U_1 = 2U_1 - U_1 = U_1 = \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow \text{تغییر انرژی}$$

* اگر خازن داخل مدار بود در آن تقییری ایجاد کردیم V آن ثابت و اگر داخل مدار نبود در آن تقییری ایجاد کردیم، q آن ثابت است.

✓ جغالی انرژی الکتریکی در خازن

$$\text{جغالی انرژی الکتریکی} = \text{انرژی الکتریکی بر واحد حجم} = \frac{u}{V} = \frac{\frac{1}{2} C V^2}{A d} \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{V} = \frac{\frac{\epsilon_0 A}{d} V^2}{2 A d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

مثال: برای یک لوله انزوله به شعاع R ، انرژی الکتریکی و جغالی انرژی الکتریکی را بدست آورید.

$$C = 4 \pi \epsilon_0 R \rightarrow u = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \rightarrow u = \frac{q^2}{2 \times 4 \pi \epsilon_0 R} = \frac{q^2}{8 \pi \epsilon_0 R}$$

$$\text{جغالی انرژی} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Rightarrow E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \Rightarrow \text{جغالی} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{1}{16 \pi^2 \epsilon_0^2 R^4}$$

$$= \frac{q^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 R^4}$$

این الکتریکی لوله روی سطح آن

تأثیر دی الکتریک : ظرفیت در حضور دی الکتریک جدید با ضرب k افزایش می یابد.

(۱) خازن در مدار با باتری

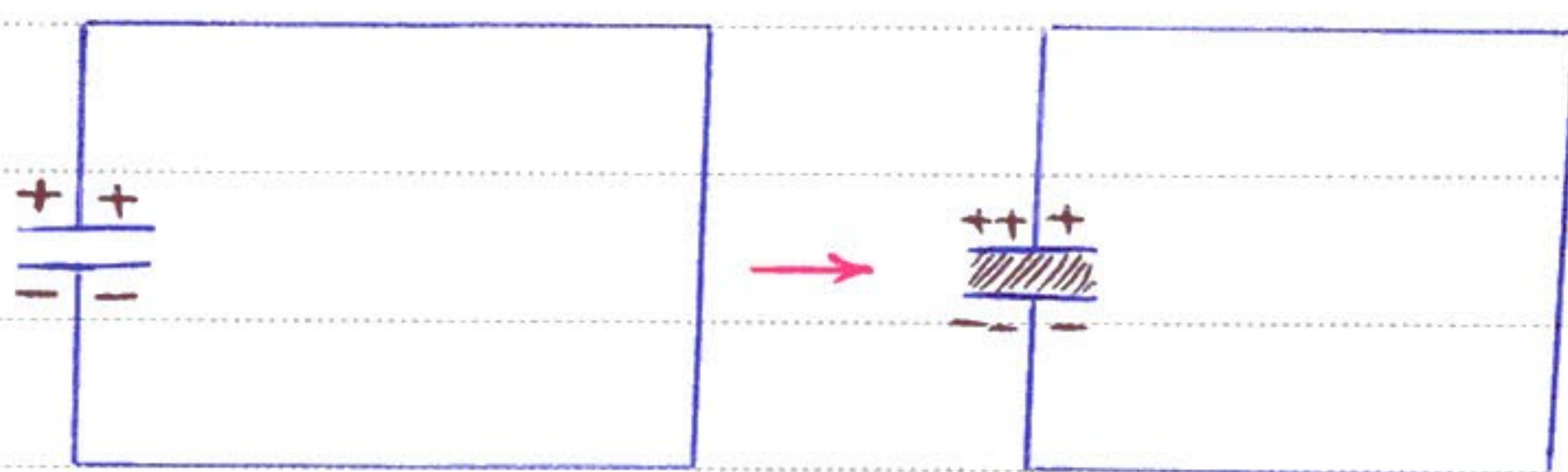


$$C' = kC \Rightarrow \frac{kq}{V} = \frac{q'}{V'} \xrightarrow{V=V'} q' = kq$$

در صورت ثابت ماندن ولتاژ با وارد کردن دی الکتریک جدید بار ورودی صفحات با ضرب

k افزایش می یابد.

(۲) خازن در مدار بدون باتری



$$C' = kC \rightarrow \frac{kq}{V} = \frac{q'}{V'} \xrightarrow{q=q'} V' = \frac{V}{k}$$

اگر بار خازن ثابت باشد با توجه به افزایش ظرفیت در اثر حضور دی الکتریک جدید، ولتاژ

خازن جدید با ضرب k کاهش می یابد.

* اگر دی الکتریک در فضا وجود داشته باشد در همه معادلات به جای ϵ_0 از $\epsilon = k\epsilon_0$ استفاده

می کنیم به در این صورت:

5 میدان در حضور دی الکتریک جدید

$$+q \Rightarrow E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{E_0}{k}$$

کاهش می یابد

$$+q \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi k\epsilon_0 r^2}$$

مثال: ظرفیت خازنی که با ولتاژ ۱۰۷ شارژ شده است و از باتری جدا است برابر $C = 7\mu F$

است. بعد از جدا کردن از باتری دی الکتریک با $k = 1.3$ به خازن وارد شده است. U_i و U_f

رابطه آورید

$$q = CV = V \times 10 = 70 \mu C$$

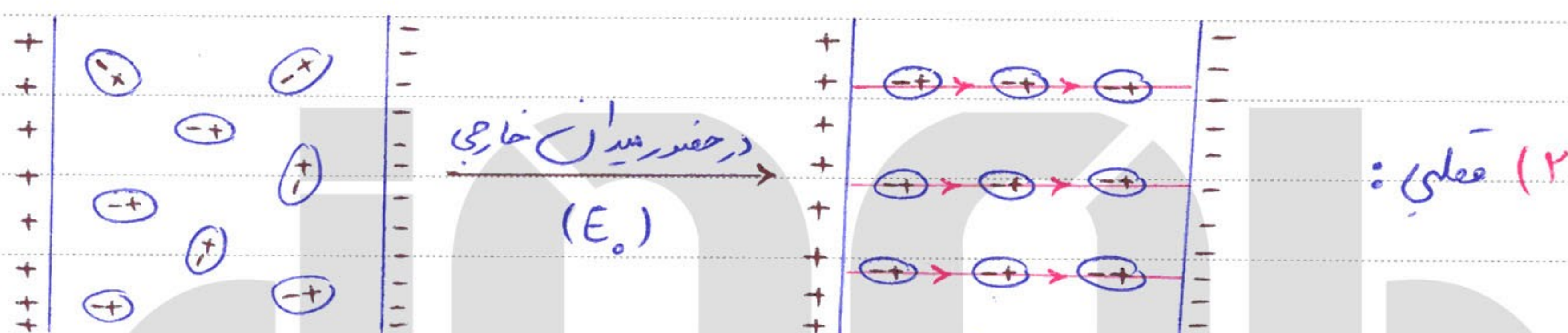
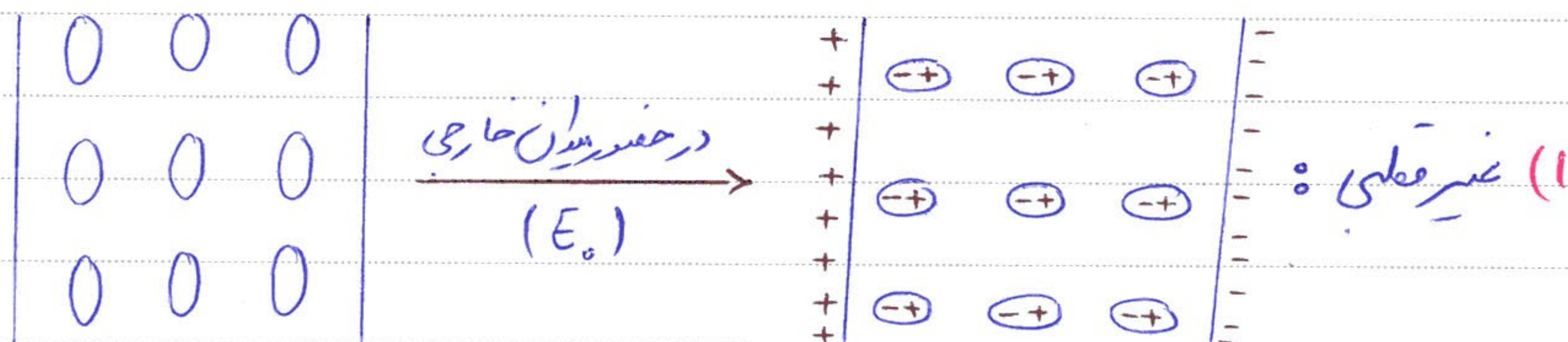
$$C' = \frac{q}{V'} = \frac{kq}{V} \xrightarrow{q=q'} \frac{1}{V'} = \frac{k}{V} \Rightarrow V' = \frac{100}{1.3}$$

$$U_i = \frac{1}{2} q V = \frac{1}{2} \times 70 \times 10^{-6} \times 10$$

$$U_f = \frac{1}{2} q' V' = \frac{1}{2} \times 70 \times 10^{-6} \times \frac{100}{1.3} \Rightarrow U_f = \frac{U_i}{k} = \frac{U_i}{1.3}$$

۲۵ - U در دی الکتریک جدید به $\frac{1}{k}$ کاهش می یابد

دی الکتریک از دید ماکروسکوپی (دی الکتریک قطبی) $\rightarrow +$ قطبی
 (دی الکتریک غیر قطبی) $\rightarrow 0$ غیر قطبی



میدان داخل دی الکتریک $\rightarrow E'$ جهت میدان

- فرق این دو در این است که در قطبی قطبی بودن همیشگی است اما در غیر قطبی فقط در حضور

میدان این گونه است و موقت است.

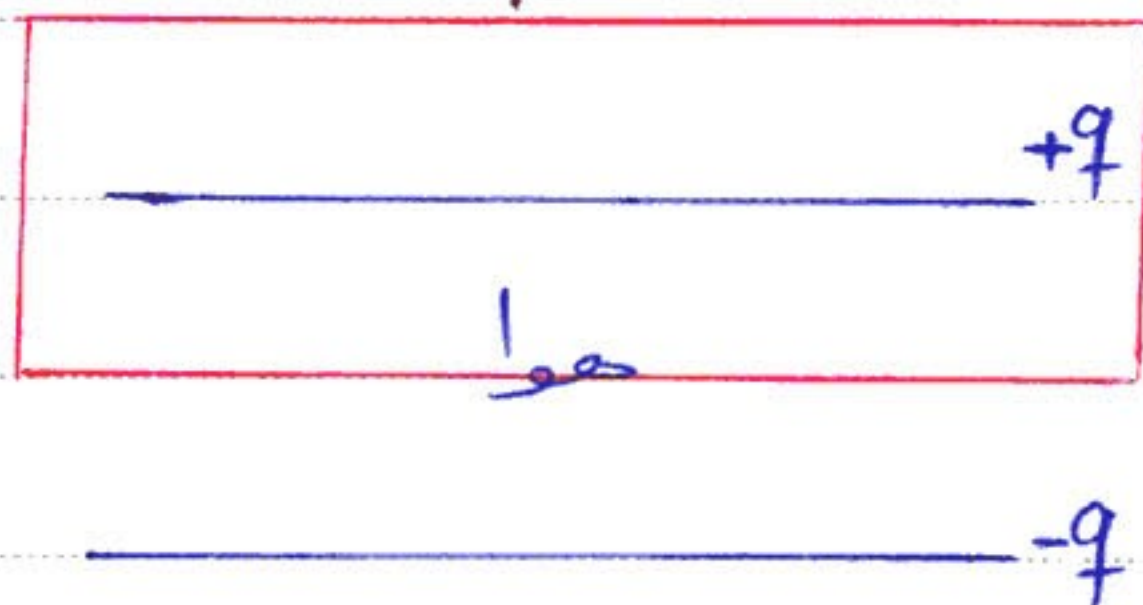
- به همین دلیل است که با تغییر دی الکتریک در حضور میدان، میدان کاهش می یابد زیرا که در

داخل دی الکتریک $E - E_0 = E$ میدان به وجود می آید و اثر اسی این میدان

سبب کاهش میدان اصلی می شود.

قانون گاوس در حضور دی الکتریک

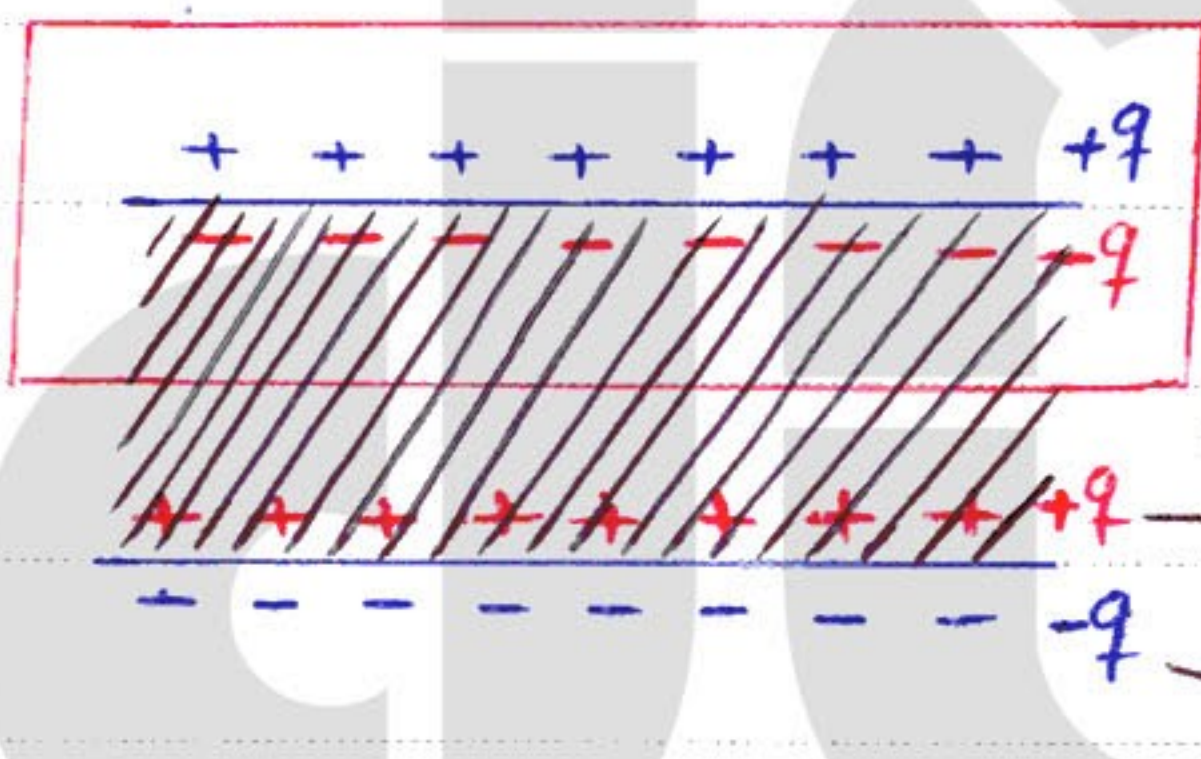
سطح گاوس



$$\epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc} = q$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E \int_A da = q \rightarrow \epsilon_0 E A = q \rightarrow E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

میدان الکتریکی (با استفاده از سطح گاوس) وقتی دی الکتریک وجود ندارد یا از جنس هوا است.



اندازه بار مقبضی > اندازه بار آزاد

$$\epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{enc} = q - q' \Rightarrow \epsilon_0 E \int_A da = q - q'$$

$$\Rightarrow E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

$$E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} = \frac{E_0}{k} = \frac{1}{k} \frac{q}{\epsilon_0 A} \Rightarrow \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{k \epsilon_0 A} \Rightarrow q - q' = \frac{q}{k}$$

قانون گاوس در حضور دی الکتریک: $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = q - q' = \frac{q}{k} \Rightarrow \boxed{\epsilon_0 \int k \vec{E} \cdot d\vec{a} = q}$

$$\epsilon_0 k \vec{E} = \vec{D}$$

بردار جانبی جایی

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{a} = q$$

بار آزاد در داخل سطح گاوس

مسئله: ظرفیت خازن دو دیسک (این خازن، خازن است به بین دو

صفحه خازن سه لایه دی الکتریک وجود دارد. لایه اول هوا، لایه دوم دی الکتریک با ثابت

k و لایه سوم هم هوا است. (سطح گaus اولیه $\rightarrow$ هوا)

سطح گaus ثانویه $\rightarrow$ هوا

$$\text{سطح اولیه: } \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = q \Rightarrow E_{\text{هوا}} = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{سطح ثانویه: } \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{a} \cdot k = q \Rightarrow E_{\text{دی الکتریک}} = \frac{q}{\epsilon_0 k A}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int E dl \cos(180^\circ)$$

$$= \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \frac{q}{\epsilon_0 A} dl + \int \frac{q}{k \epsilon_0 A} dl + \int \frac{q}{\epsilon_0 A} dl$$

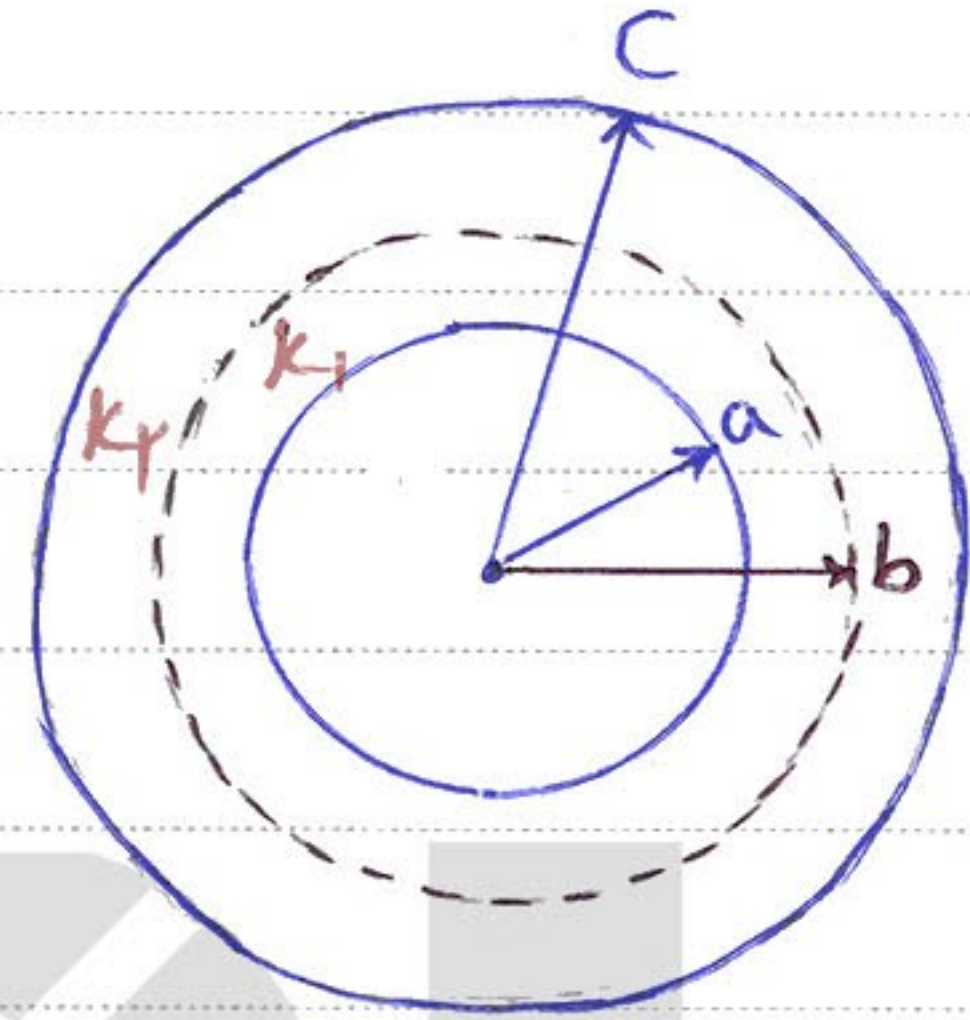
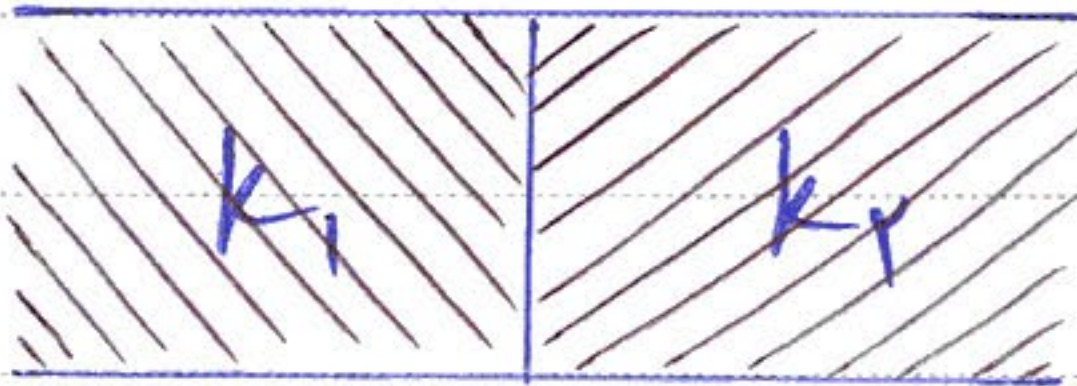
$$= \frac{q}{\epsilon_0 A} \int_{\frac{d-b}{2}}^{\frac{d-b}{2}} dl + \frac{q}{\epsilon_0 A k} \int_b^b dl + \frac{q}{\epsilon_0 A} \int_{\frac{d-b}{2}}^{\frac{d-b}{2}} dl = \frac{q}{\epsilon_0 A} \left(\frac{d-b}{2} \right) + \frac{q}{k \epsilon_0 A} b + \frac{q}{\epsilon_0 A} \left(\frac{d-b}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{q}{\epsilon_0 A} (d-b) + \frac{q}{k \epsilon_0 A} (b) \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 A}{d-b + b/k}$$

* خازن هایی که صفحات متوازی آن ها به هم متصل هستند خازن های سری هستند.

$$\Rightarrow \text{پس } C' : \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_r} + \frac{1}{C_r} \Rightarrow \frac{1}{C} = \left(\frac{\epsilon_0 A}{\frac{d-b}{r}} \right)^{-1} + \left(\frac{k \epsilon_0 A}{b} \right)^{-1} + \left(\frac{\epsilon_0 A}{\frac{d-b}{r}} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{k \epsilon_0 A}{k(d-b) + b} \quad \checkmark$$



d88b

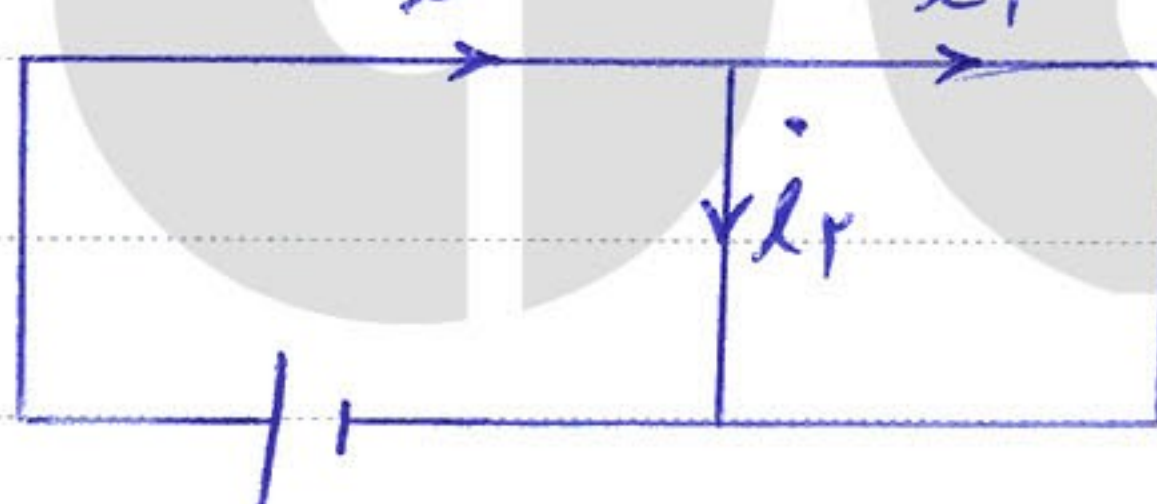
فصل نهم جریان الکتریکی

جریان الکتریکی: میزان بار خالص در واحد زمان از یک نقطه از مدار است.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

یکای جریان الکتریکی: (آمپر) $\frac{C}{s} = A$ (کولن بر ثانیه)

نکته: جهت جریان در جهت حرکت بارهای مثبت است و جریان در جهت بارهای منفی است.



$$i = i_1 + i_2 \rightarrow dq = i dt \Rightarrow q = \int_{t_1}^{t_2} i dt$$

جغای جریان الکتریکی ($\vec{J}$): جریان لایحه از واحد سطح

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{n} \rightarrow \text{بردار یکمورد بر سطح} \quad \vec{J} = \frac{I}{A} \left(\frac{A}{m^2} \right)$$

مقاومت: در یک اختلاف پتانسیل ثابت چه مقدار جریان از مدار می‌گذرد.

$$I = \frac{V}{R} \rightarrow I \propto V \quad R = \rho \frac{l}{A}$$

$$P = IV = \frac{V^2}{R} = RI^2 \quad (\text{وات})$$

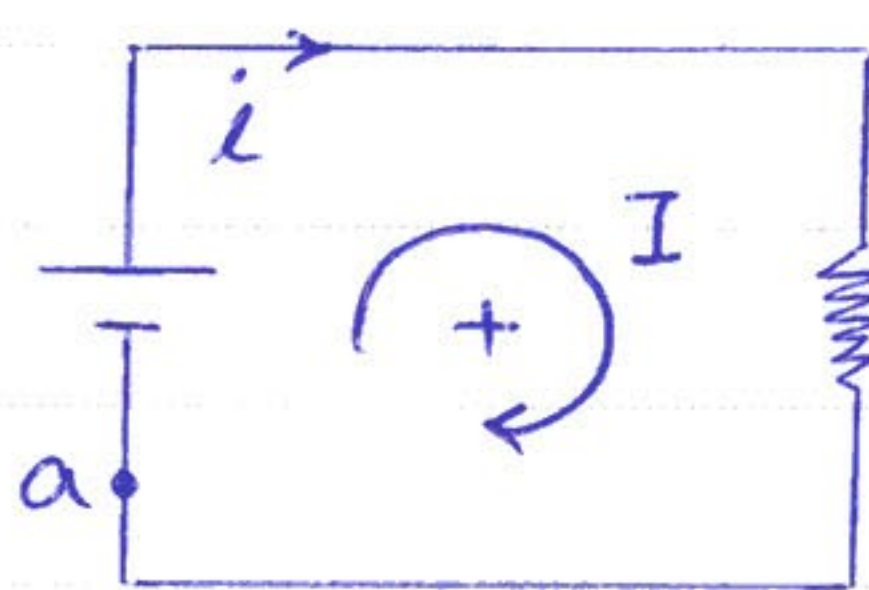
فصل هفتم مدارهای الکتریکی

نبرد محرمه مدار الکتریکی: کاری که بر واحد بار انجام می شود تا بار از پتانسیل کمتر به پتانسیل بیشتر حرکت کند. (باتری: باطری، ژنراتور الکتریکی، سطل خود کشیدی، پیل سوختی)

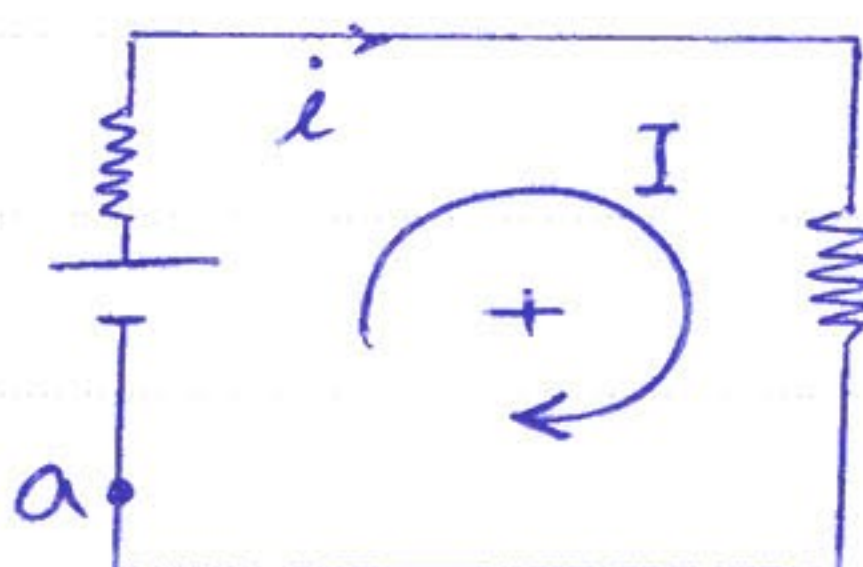
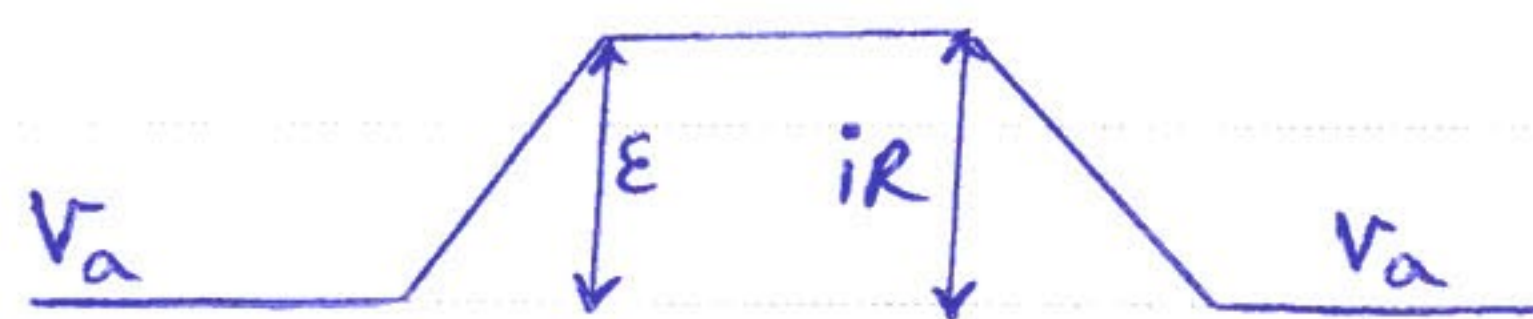
$$\mathcal{E} = \frac{dw}{dq} \quad (\text{دلت } V \text{ و } \frac{J}{C})$$

مولد ایده آل: مولدی که بدون مقاومت داخلی است.

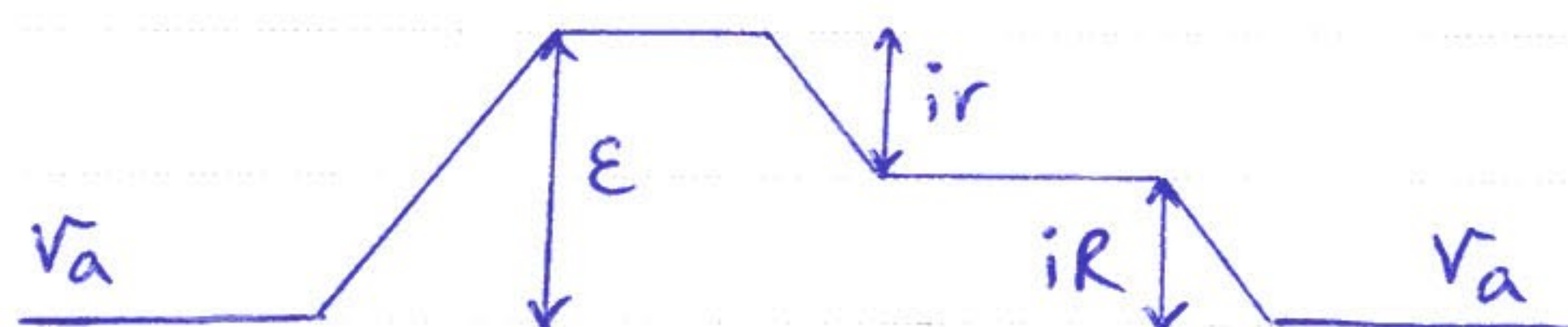
قانون ولتاژ کیرشهف: جمع جبرقی تغییرات پتانسیل در یک مدار بسته صفر است.
 قانون جریان کیرشهف: جمع جبرقی جریان های ورودی و خروجی در یک گره با هم برابر است.

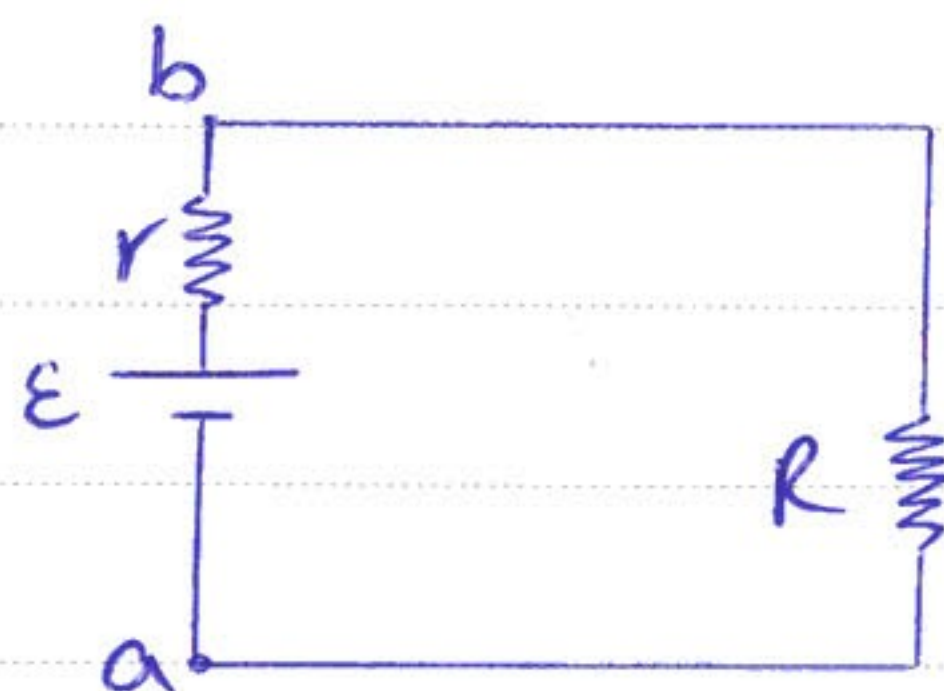


$$V_a + \mathcal{E} - iR = V_a \rightarrow \mathcal{E} - iR = 0 \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$



$$V_a + \mathcal{E} - ir - iR = V_a$$





$$V_b - V_a = ? \quad \text{سؤال:}$$

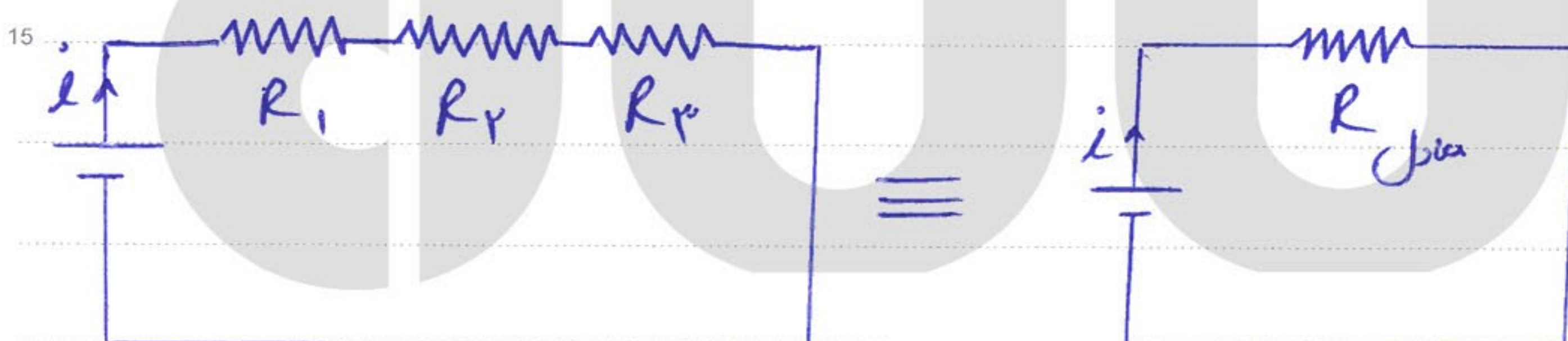
$$V_b - V_a = \varepsilon - ir \rightarrow \varepsilon - ir - iR = 0 \rightarrow i = \frac{\varepsilon}{r+R} \Rightarrow V_b - V_a = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{r+R} r$$

$$* V_a - V_b = -(V_b - V_a)$$

$$p = i\varepsilon \quad \text{مولد ایده‌آل} \quad p = ir = i(\varepsilon - ir) = i\varepsilon - i^2 r$$

توان تلفاتی ← توان تولیدی

مقاومت‌های سری و موازی



(۱) سری

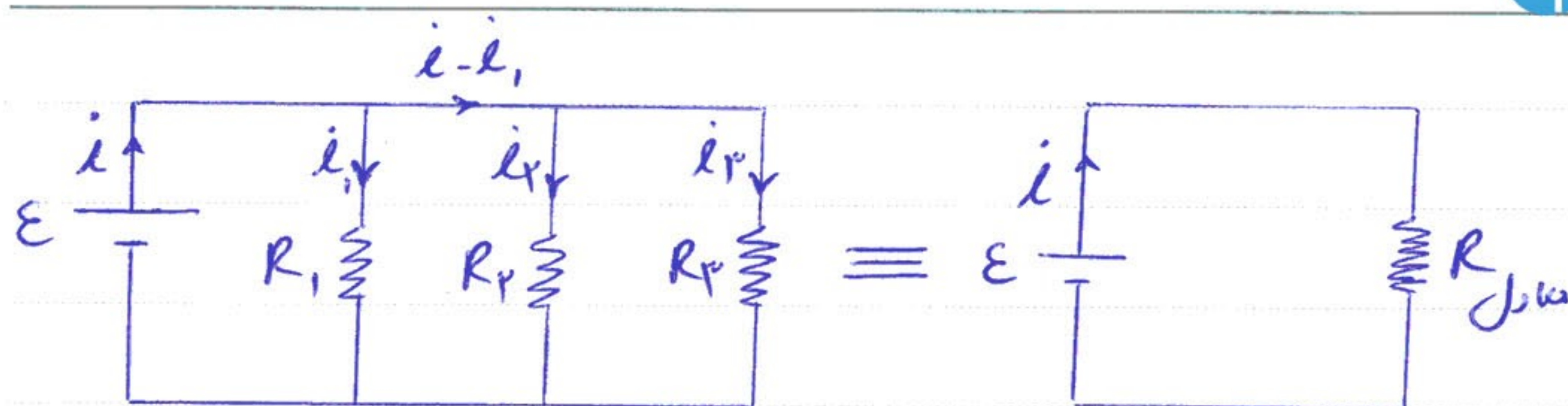
$$\textcircled{\text{I}} \quad \varepsilon - i(R_1 + R_2 + R_3) = 0$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad \varepsilon = i R_{\text{معادل}}$$

$$\textcircled{\text{I}} \textcircled{\text{II}} \rightarrow R_{\text{معادل}} = R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow R_{\text{معادل}} = \sum_{i=1}^n R_i$$

* در مقاومت‌های سری یک جریان عبوری کند.

$$I_T = I_1 = I_2 = I_3 \quad \text{و} \quad V_T = V_1 + V_2 + V_3$$



(۲) موازی

* نکته: در سری‌مقاومت‌های موازی با هم برابر است.

$$V_T = V_1 = V_r = V_r \quad ; \quad I_T = I_1 + I_r + I_r$$

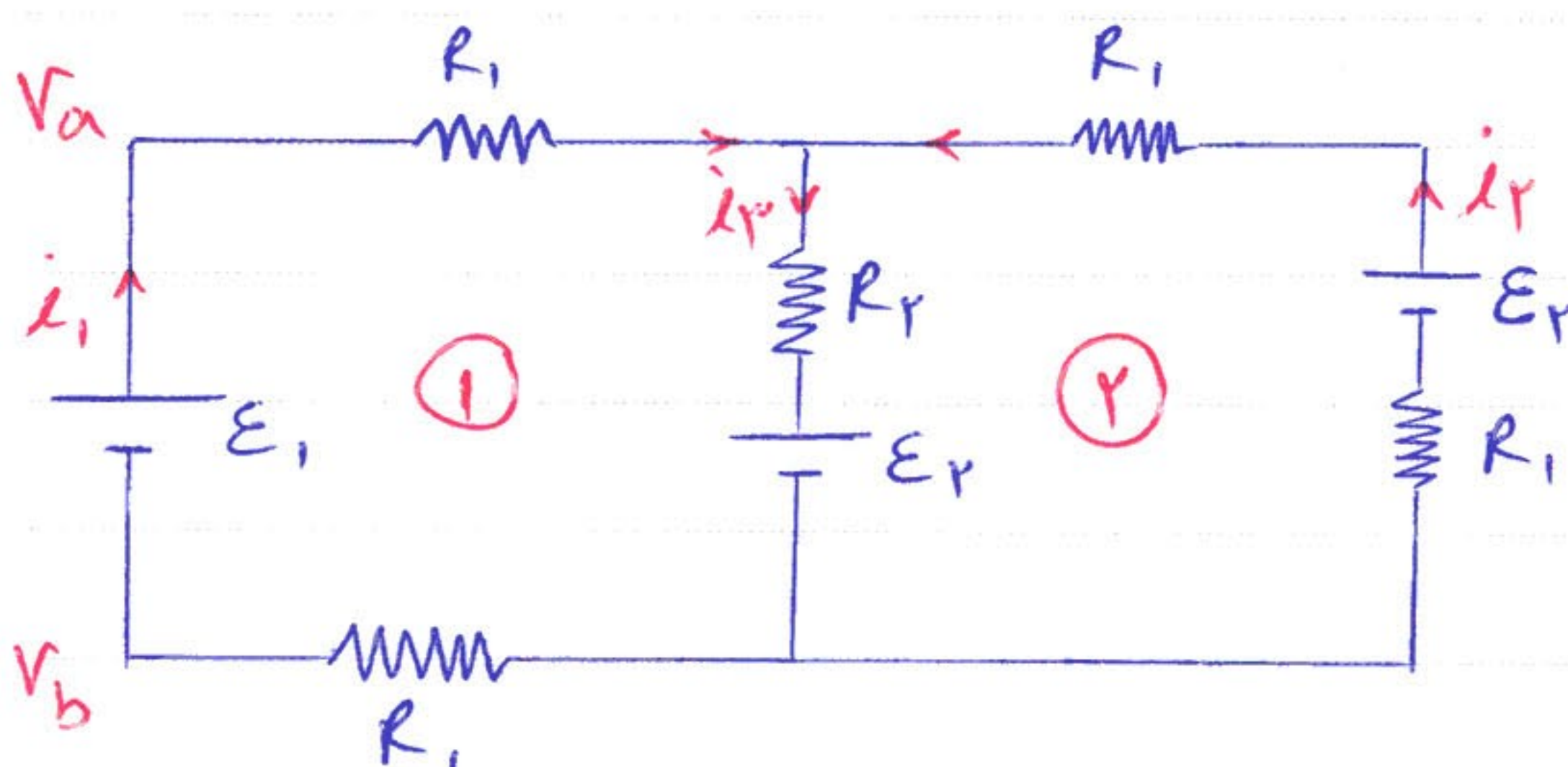
$$\Rightarrow V_1 = I_1 R_1 \rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R_1}, \quad I_r = \frac{V_r}{R_r}, \quad I_r = \frac{V_r}{R_r}$$

$$\rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{متادل}}} \rightarrow I = I_1 + I_r + I_r \rightarrow \frac{\varepsilon}{R_{\text{متادل}}} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_r}{R_r} + \frac{V_r}{R_r}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{R_{\text{متادل}}} = \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_r} \right) \Rightarrow \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{\text{متادل}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

مثال: مقدار جریان در شاخه‌های مختلف را بدست آورید.



$$\varepsilon_1 = 3V, \quad \varepsilon_r = 4V$$

$$R_1 = 2\Omega, \quad R_r = 4\Omega$$

$$\textcircled{1}: V_b - V_a = I_1 R_1 - \mathcal{E}_r - I_1 R_1 = 0$$

$$\rightarrow 3 - 2I_1 - I_3 \times 4 - 4 - I_1 \times 2 = 0 \rightarrow -4I_1 - 4I_3 = 1 \quad \textcircled{I}$$

$$\textcircled{2}: V_a - I_2 R_1 - I_3 R_2 - \mathcal{E}_r - I_2 R_1 + \mathcal{E}_r = 0$$

$$\rightarrow -2I_2 - 4I_3 - 4 - 2I_2 + 4 = 0 \rightarrow -4I_2 - 4I_3 = 0 \rightarrow I_3 = -I_2 \quad \textcircled{II}$$

$$\rightarrow I_3 = I_2 + I_1 \quad \textcircled{III} \Rightarrow \textcircled{I}, \textcircled{II}, \textcircled{III} \Rightarrow I_1 = -I_2$$

$$\textcircled{I} \rightarrow -4(-2I_2) - 4I_3 = 1$$

$$\textcircled{II} \rightarrow -8I_3 - 4I_3 = 1 \Rightarrow -12I_3 = 1 \Rightarrow I_3 = -1/12, I_2 = 1/12, I_1 = 1/12$$

مدارهای الکتریکی

اسیر متحرک: اندازه سیر جریان، به صورت سری در مدار، مقاومت باینج، در صورت حذف از مدار، مدار ناقص

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \xrightarrow[\text{سود}]{\text{حال اگر } R \text{ اسیر متحرک باشد}} \frac{\mathcal{E}}{R+R_A} \rightarrow \text{است. باعث تغییر در جریان می شود.}$$

ولت متر: اندازه سیر ولتاژ عناصر مدار، به صورت موازی در مدار، مقاومت زیاد، در صورت

حذف از مدار، مدار کامل است.

فصل هشتم

میدان مغناطیسی

میدان مغناطیسی { ثابت (آهن یا) }
 { دایم (فرد مغناطیس) }
 { موقت (الکترومگنت) (بار مغناطیس) }
 سیم حامل جریان

در صورتیکه ذره باردار در میدان با هم هم افتا باشند مقدار نیرو صفر است و اگر عمود بر هم باشند α αB
 αq
 αv
 $\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}$
 نیرو Max است

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow |\vec{F}_B| = q v B \sin \phi$$

* چهارانگشت دست راست جهت v چرخش جهت B انگشت شست F_B را نشان می دهد. (q_+)

* چهارانگشت دست چپ جهت v چرخش جهت B انگشت شست F_B را نشان می دهد. (q_-)

* نیرو وارد شونده از طرف میدان به بار متقی در خلاف جهت نیرو وارد شونده به بار مثبت است.

جهت نیرو
max

جهتی به نیرو بر ذره باردار نمی شود

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_B|}{qv}$$

جهت میدان مغناطیسی

$$\frac{N}{C \cdot m/s} = T \quad \text{تسلا}$$

$$1 T = 10^4 \text{ gauss}$$

خطوط میدان مغناطیسی

(۱) هر جا به خطوط میدان مغناطیسی فشارده تر باشد

میدان در آنجا قوی تر است.

(۲) خط مماس بر خطوط میدان مغناطیسی جهت

میدان را نشان می دهد.

(۳) خطوط میدان مغناطیسی از قطب N به S است.

* قطب های هم نام بلندتر از قطب های غیر هم نام بلندتر را جذب می کنند.

* نیرو حاصل از میدان مغناطیسی عمود بر صفحه ای است که B و I در آن قرار گرفته اند بنابراین

به دلیل عمود بودن مقدار سرعت را تغییر نمی دهند.

* تغییر مغناطیسی جهت سرعت را عوض می کند اما طبق نکته بالا تغییری در اندازه آن ایجاد نمی کند.

سوال: یک نقطه با میدان مغناطیسی در راستای محور این نقطه وجود دارد. یک ذره با بار مثبت

با انرژی جنبشی 3.5 MeV به سرعت عمود بر میدان وارد می شوند مقدار نیرو و ستاب ذره را بدست آورید.

$$(M = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})$$

→
$B = 1.2 \text{ MT}$

* $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19}$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = 3,5 \times 10^{-19} \times 1,4 \times 10^{-17} = \frac{1}{2} (1,4 \times 10^{-17}) v^2 \rightarrow v = 10^{-7} \times 3,2 \frac{m}{s}$$

$$\rightarrow F = q v B \sin \phi = 1,4 \times 10^{-19} \times 10^{-7} \times 3,2 \times 10^{-2} \times 1 = 4,1 \times 10^{-15} N$$

$$\rightarrow F = ma \Rightarrow a = \frac{4,1 \times 10^{-15}}{1,4 \times 10^{-27}} = 3,7 \times 10^{-12} \frac{m}{s^2}$$

انرژی زمان میدان های الکتریکی و مغناطیسی

آزمون نامعلوم ← متغیر نصف الکترون

محل مغناطیس

میدان مغناطیسی

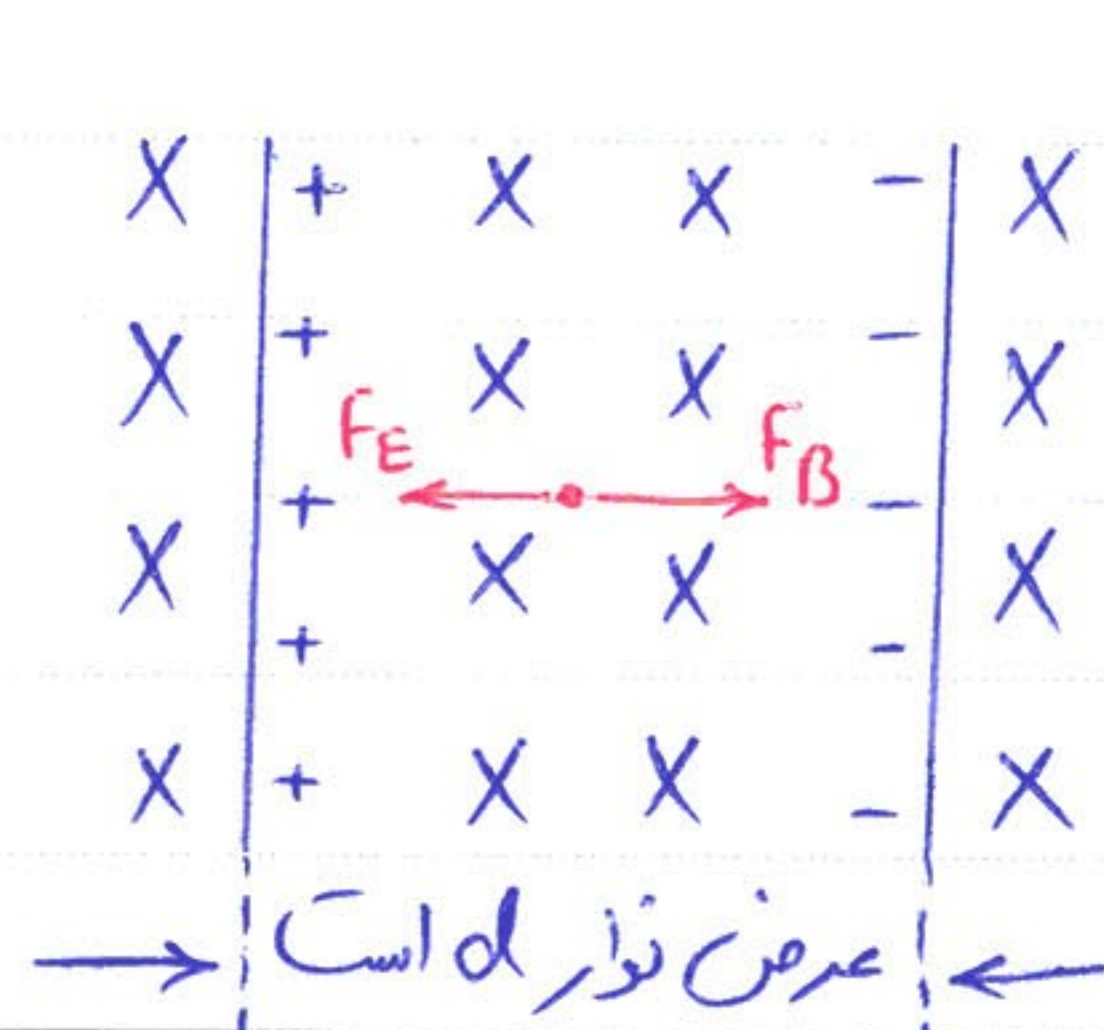
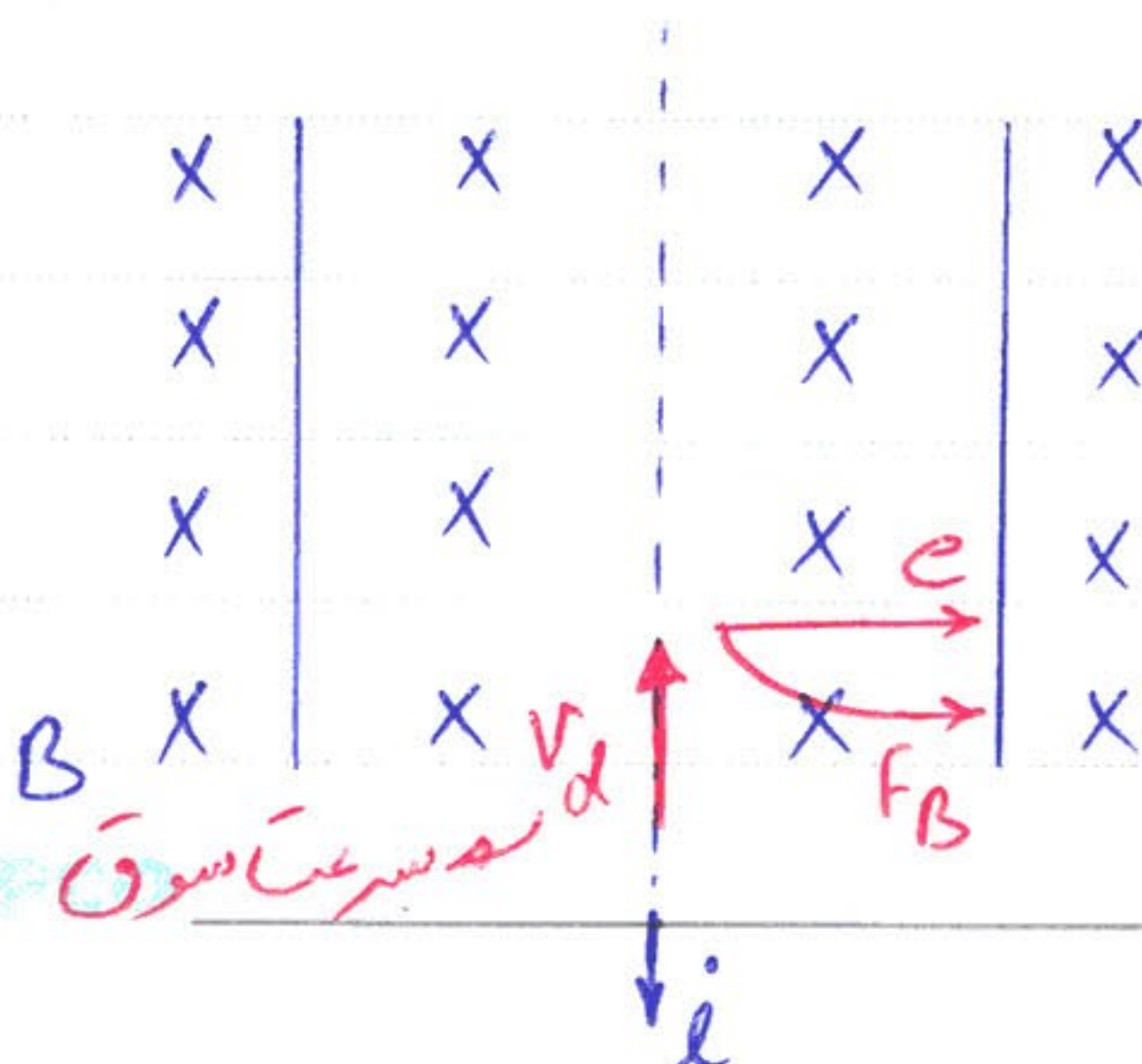
میدان الکتریکی

له میدان انرژی ذرات

$$e \rightarrow \frac{m}{191} = \frac{B L}{r \phi E}$$

$$E \neq 0, B = 0 \quad \textcircled{II} \quad E = B = 0 \quad \textcircled{I}$$

$$E \neq 0, B \neq 0 \quad \textcircled{III} \quad \vec{F}_B = \vec{F}_E$$

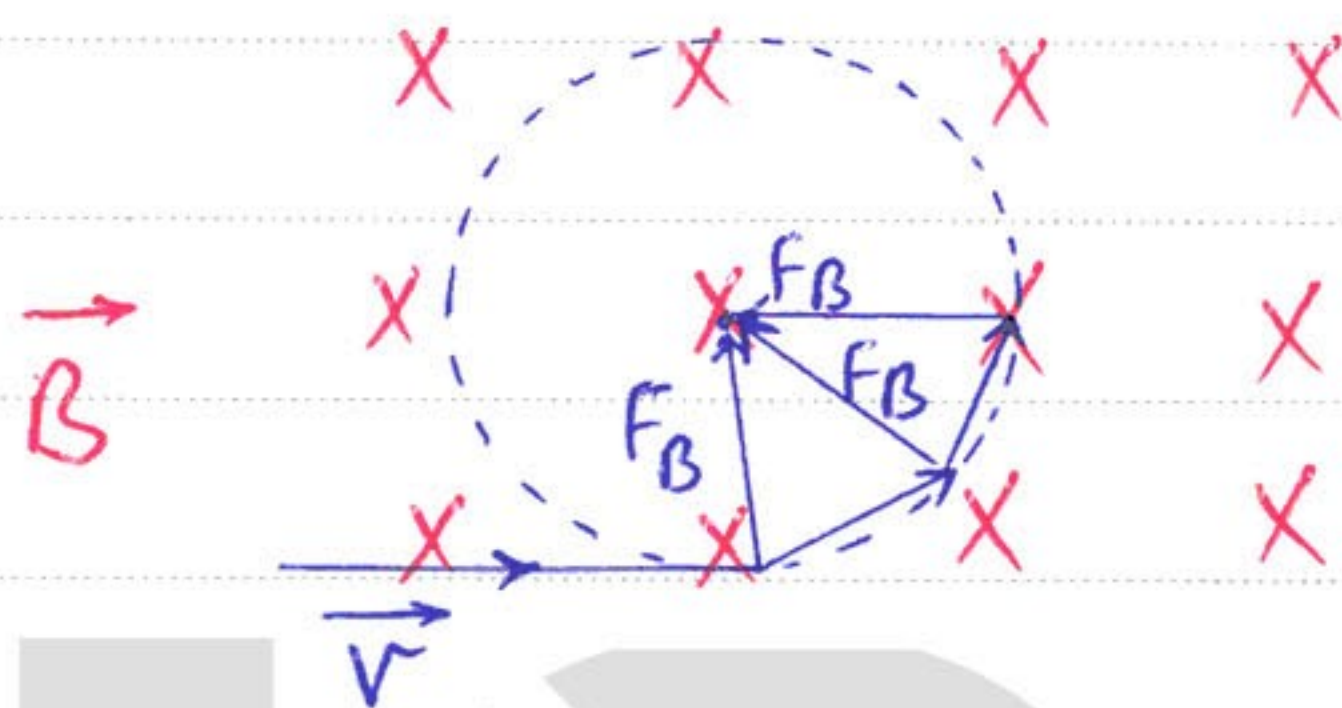


انرژی حال

در حالت تعادل $F_B = F_E \Rightarrow q v_d B = q E \Rightarrow E = B v_d \Rightarrow v_d = \frac{E}{B} = \frac{V_H}{Bd}$

$V_H = E d$ پتانسیل هال $\rightarrow$

ذرات باردار چرخان در میدان مغناطیسی



* اگر ذره به سرعت عمود بر میدان مغناطیسی وارد شود در اثر نیروی ناشی از میدان بر روی یک مسیر دایره‌ای حرکت خواهد کرد.

- ذره وقتی با سرعت v به سمت میدان مغناطیسی و عمود بر آن حرکت می‌کند نیرویی که به آن

از طرف میدان وارد می‌شود سبب می‌شود کمی انحراف پیدا کند و دوباره در مسیر منحرف شده که

قرار می‌گیرد دوباره میدان مغناطیسی به آن نیرو وارد می‌کند و به این شکل است که ذره در

یک مسیر دایره‌ای به چرخش درمی‌آید در نتیجه جرم F_B در راستای شعاع است، یک

نیروی مرکزگرا به شمار می‌رود:

$\vec{F}_B = m a$

$a = \text{نسبت مرکزگرا} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow |\vec{F}_B| = \frac{m v^2}{r} \quad \textcircled{I}$

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} = q v B \sin \theta = q v B \sin 90^\circ = q v B \quad \textcircled{II}$$

$$\frac{\textcircled{I}}{\textcircled{II}} \rightarrow q v B = \frac{m v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m v}{q B} \rightarrow \text{شعاع مسیر دایره‌ای}$$

چون سرعت ثابت است و باید حرکت دایره‌ای داریم پس این حرکت یک حرکت دایره‌ای
 یکنواخت است:

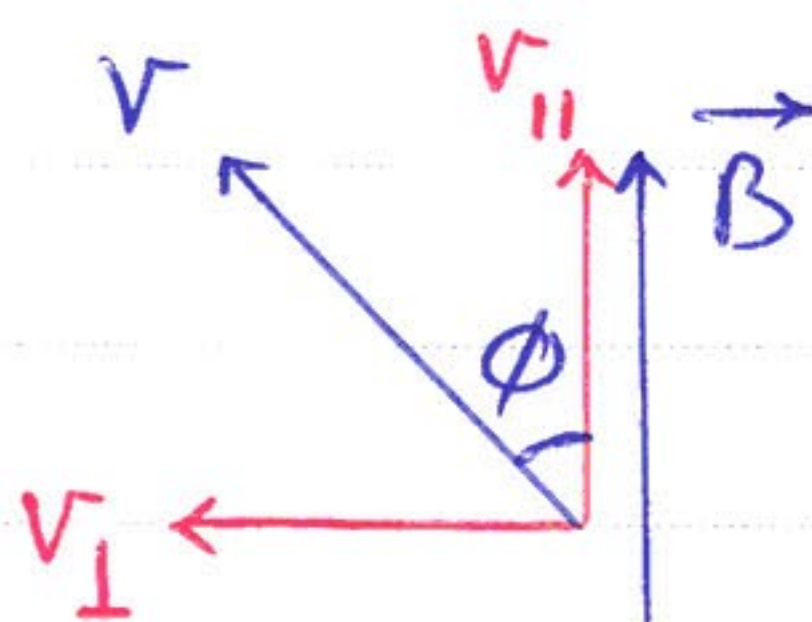
$$x = v t \rightarrow v = \frac{x}{t} \rightarrow t = \frac{x}{v}$$

$$T = \frac{2\pi x}{v} \quad \begin{matrix} x \text{ در این جا} \\ \text{برابر } r \text{ است} \end{matrix} = \frac{2\pi m r}{q v B} = \frac{2\pi m}{q B}$$

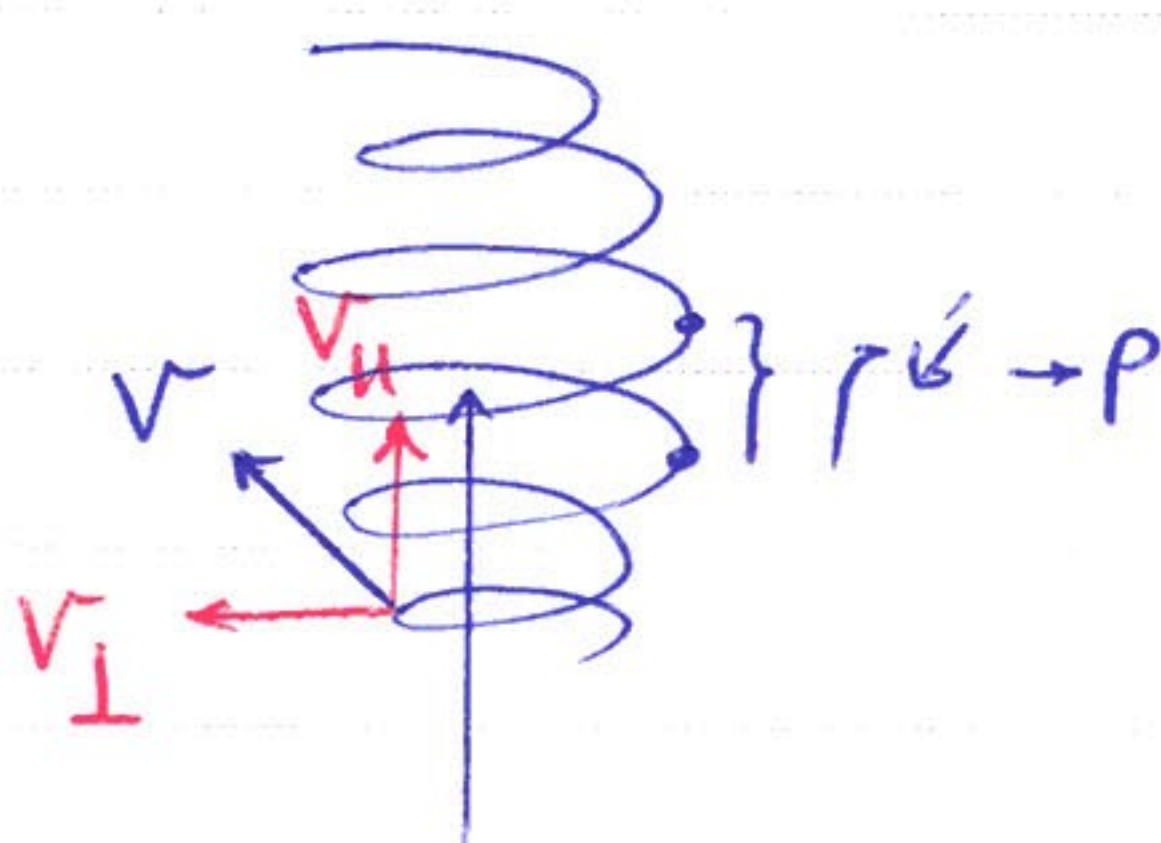
$$f = \frac{1}{T} = \frac{q B}{2\pi m} \quad \text{(فرکانس)}$$

* اگر ذره در مدت زمان T یک دور کامل نرزد (در حرکت دایره‌ای یکنواخت) در همین

زمان به اندازه p به سمت بالا حرکت می‌کند.



$$p = v_{\parallel} T = v \cos \phi T$$



* در محاسبات مربوط به حرکت ذره در پارتیکل، چنانچه طول مسیر دایره‌ای

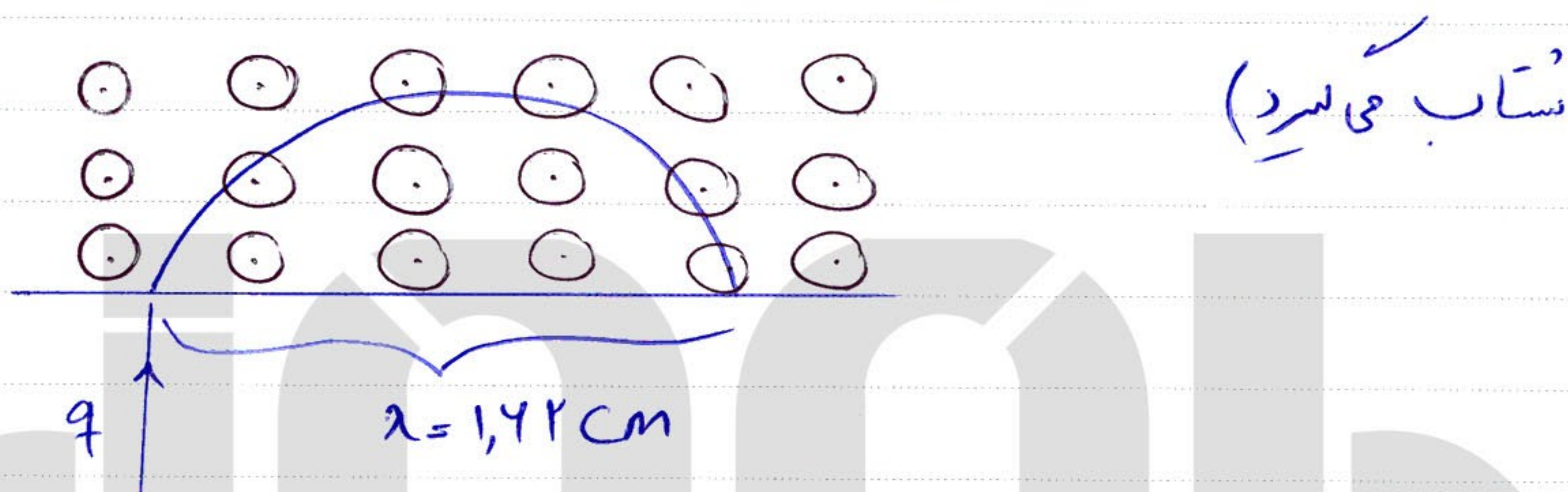
خواسته شده بود (حرکت افقی) باید از $v_{\perp}$ و چنانچه گام خواسته

شده بود (حرکت قائم) باید از $v_{\parallel}$ استفاده کنیم.

* الی ذره با زاویه 90° وارد میدان مغناطیسی شود یک حرکت دایره ای خواهد داشت و اگر با زاویه ϕ وارد شود یک حرکت مارپیچی پدید می آید.

مثال: $B = 1.0 \text{ mT}$ ، $C = 1.4 \times 10^{-19}$ ، $\lambda = 1.42 \text{ cm}$ ، q و m را بیابید!

(ذره ای به سمت میدان مغناطیسی در حال حرکت است و تحت تأثیر اختلاف پتانسیل 100 V)



کار برابر qV که در این جا کار برابر انرژی جنبشی است در نتیجه داریم:

$$qV = W = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.4 \times 10^{-19} \times 100}{m}}$$

$$\rightarrow r = \frac{\lambda}{2} = \frac{mv}{qB} = \frac{1.42 \times 10^{-2}}{2} = \frac{m}{qB} \times \sqrt{\frac{2 \times 1.4 \times 10^{-19} \times 100}{m}}$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\quad}$$

مثال: الکترون وارد میدان مغناطیسی به اندازه $T = 4.55 \times 10^{-4}$ می شود. زاویه بین B و سرعت

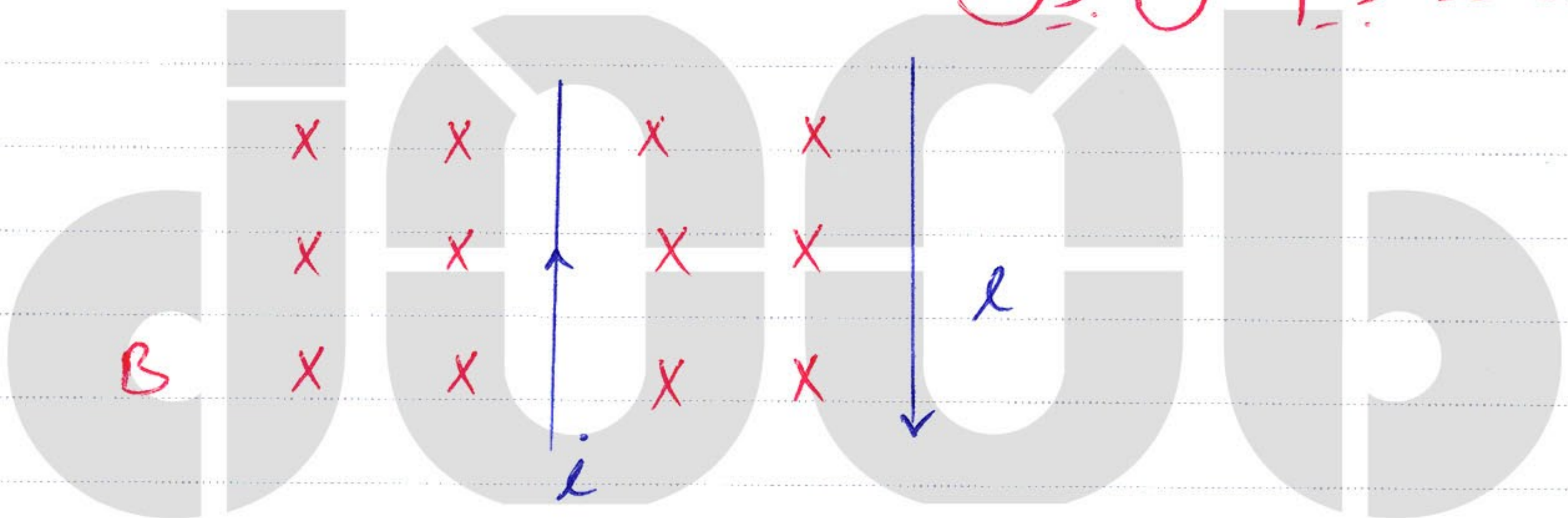
الکترون 45.5° است. طول گام و طول مسیر دایره ای را بیابید! $(v = 3 \times 10^8 \text{ m/s})$
 $(m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})$

$$P = V \cos \phi T \rightarrow T = \frac{I \pi m}{q B} \rightarrow I \times \cos(45, 5) \times \frac{I \pi \times 9,11 \times 10^{-31}}{1,4 \times 10^{-19} \times 4,55 \times 10^{-4}}$$

$$\text{طول مسیر دایره‌ای: } I \pi r = I \pi \frac{m v_{\perp}}{q B} = \frac{I \pi m r \sin(\phi)}{q B}$$

$$= \frac{I \pi \times 9,11 \times 10^{-31} \times r \sin(45, 5)}{1,4 \times 10^{-19} \times 4,55 \times 10^{-4}}$$

نیروی وارد بر سیم حامل جریان



$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = i t \rightarrow t = \frac{l}{v_d} \Rightarrow q = i \times \frac{l}{v_d} \quad (*)$$

سرعت حرکت الکترون‌ها

$$\rightarrow \vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (*) \rightarrow i \frac{l}{v_d} v_d B \sin 90^\circ = i l B$$

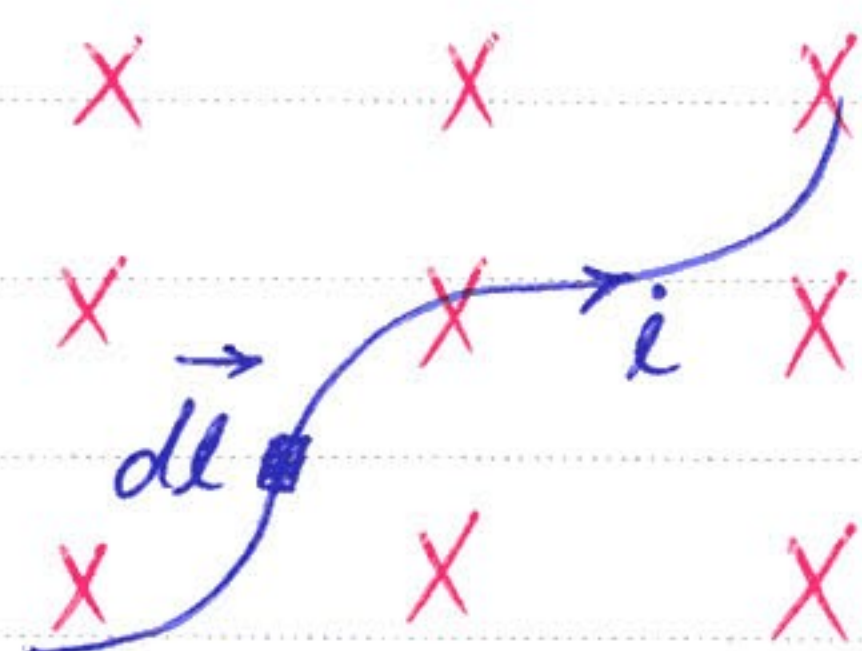
$$* \vec{F}_B = i l B \rightarrow \text{میدان بر سیم حامل جریان عمود است}$$

$$* \vec{F}_B = i \vec{l} \times \vec{B} = i l B \sin \theta \rightarrow \text{میدان با سیم حامل جریان زاویه \theta می‌سازد}$$

$\vec{dl}$ (بردار طولی): بردار اندازه آن برابر طول سیم در جهت آن در جهت جریان است.

θ : زاویه بین جهت جریان و جهت میدان مغناطیسی است. فقط برابر واقعی کاربرد دارد.

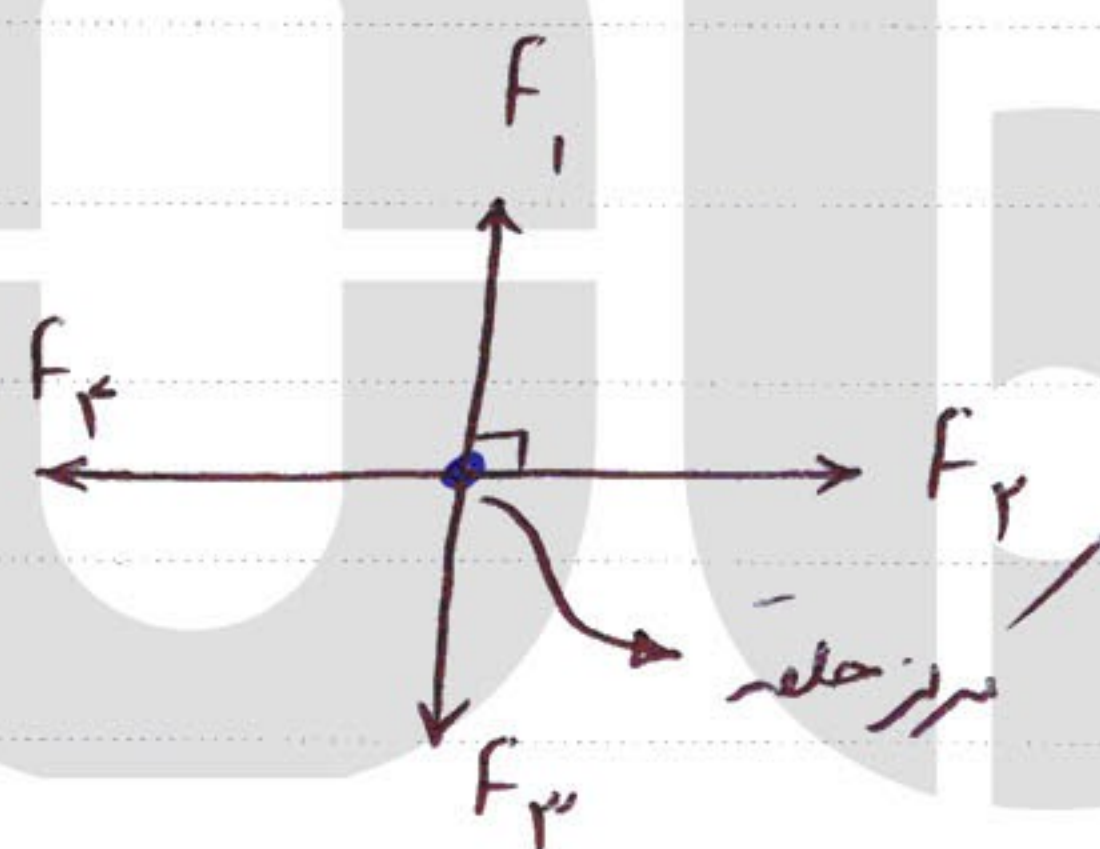
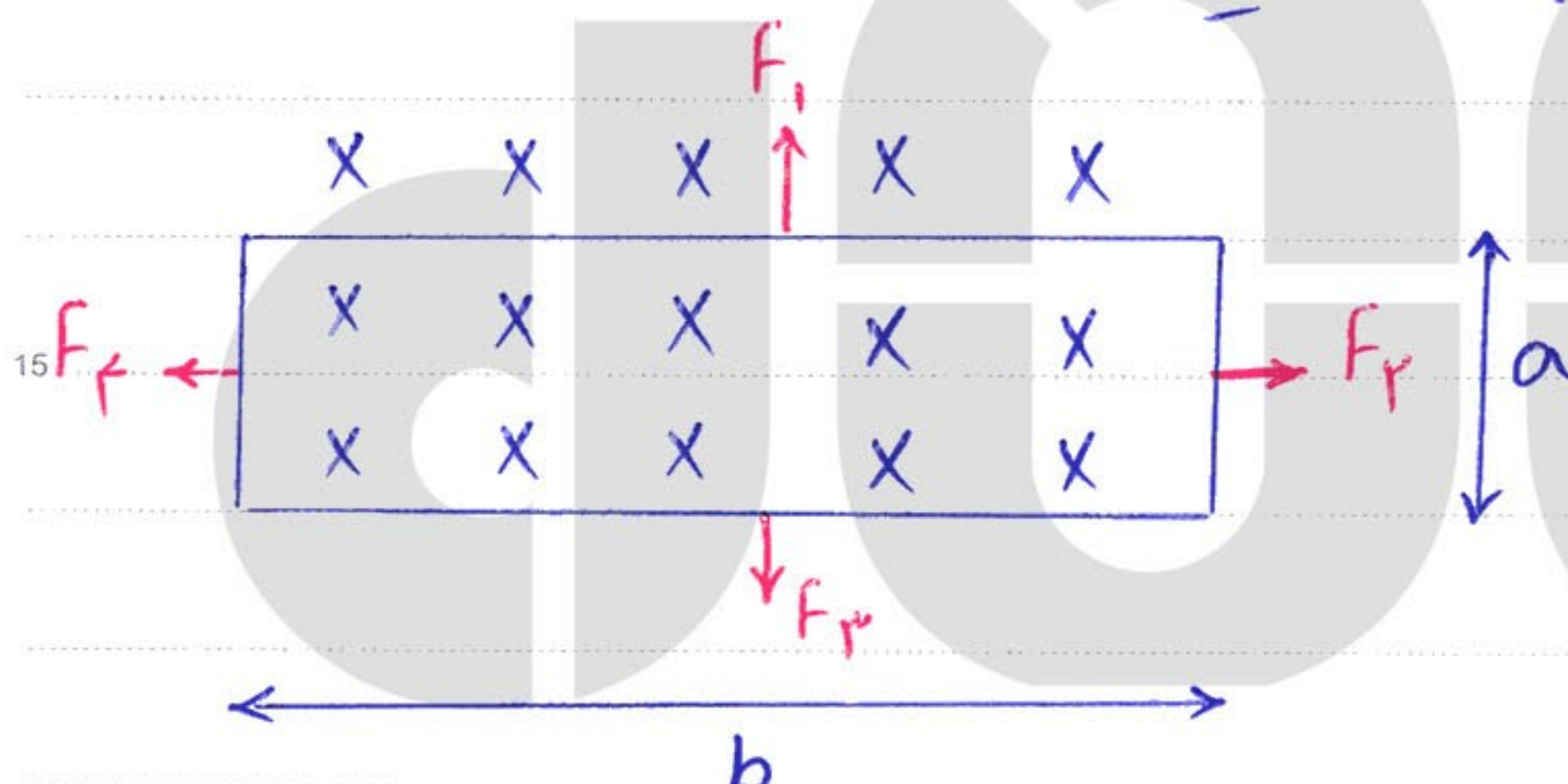
سیم ثابت است.



$$d\vec{F}_B = i \times d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_B = \int d\vec{F}_B$$

$$\Rightarrow \int d\vec{F}_B = \int i d\vec{l} \times \vec{B}$$

مثال: نیرو وارد بر حلقه جریان را بدست آورید.



$$F_{B1} = i l B \sin 90^\circ = i b B$$

$$F_{B2} = i l B \sin 90^\circ = i a B$$

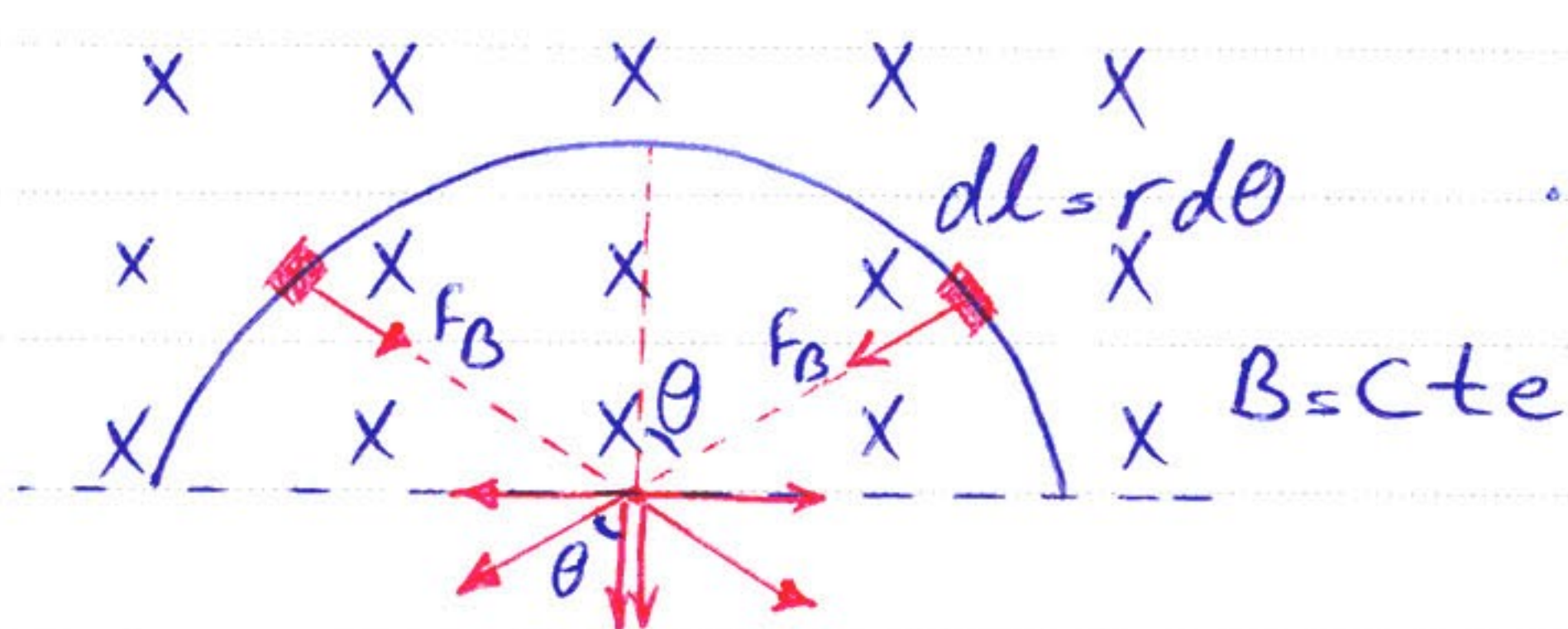
$$F_{B3} = i l B \sin 90^\circ = i b B$$

$$F_{B4} = i l B \sin 90^\circ = i a B$$

$$\Rightarrow F_T = 0$$

حرکتی ندارد

سوال: یک سیم حلقه جریان به صورت نیم دایره با شعاع r در میدان ثابت قرار دارد.

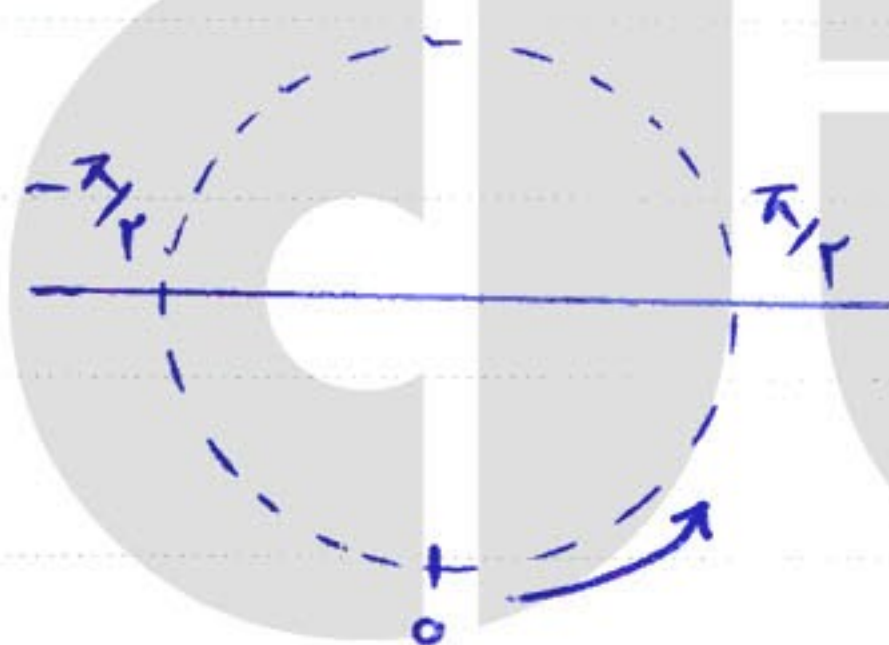


نیروی میدان مغناطیسی را بدست آورید.

$$F = \int i d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow dF_B = i d\vec{l} \times \vec{B} = i d\vec{l} \times B \sin 90^\circ = i d\vec{l} B$$

$$\rightarrow dF_B = i r d\theta B = i r B d\theta \rightarrow F_{Bx} = 0, F_{By} = \int dF_B \cos \theta$$

$$\Rightarrow \int i r B \cos \theta d\theta = i r B \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = i r B \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 i r B$$



که برای این بازه باید دایره شللات را به این شکل در نظر بگیریم:

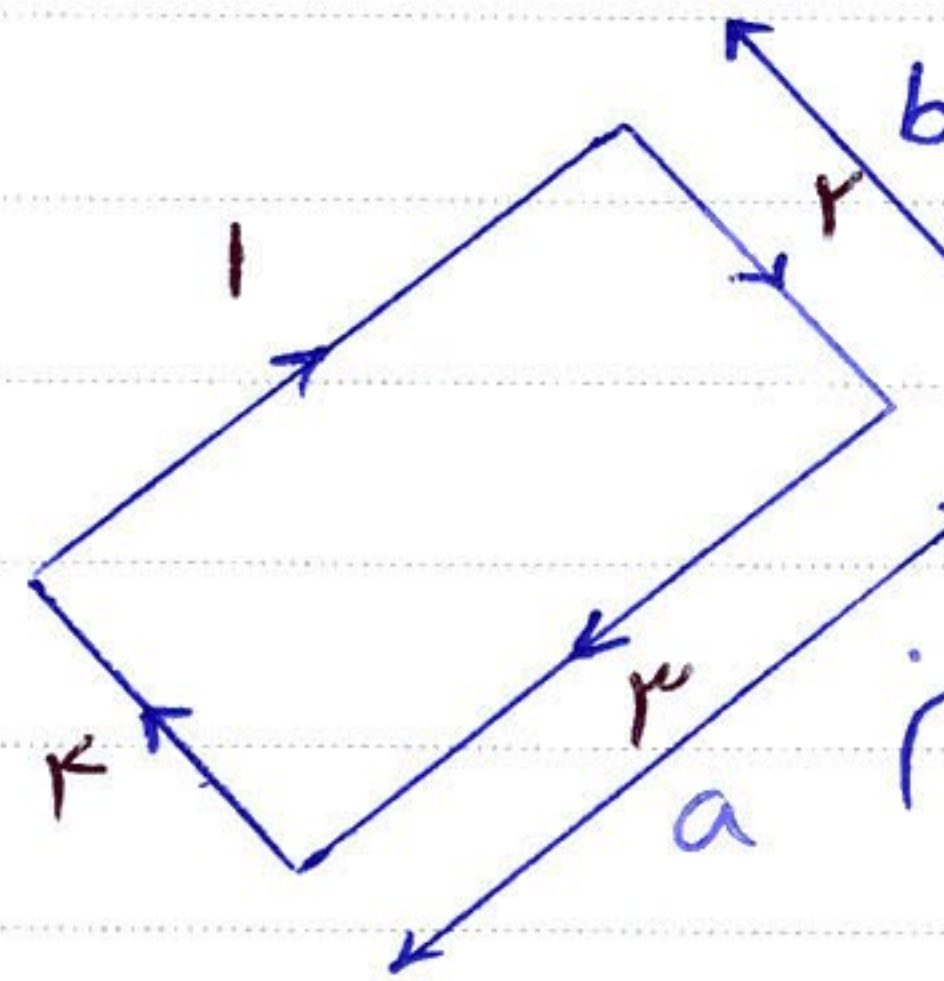
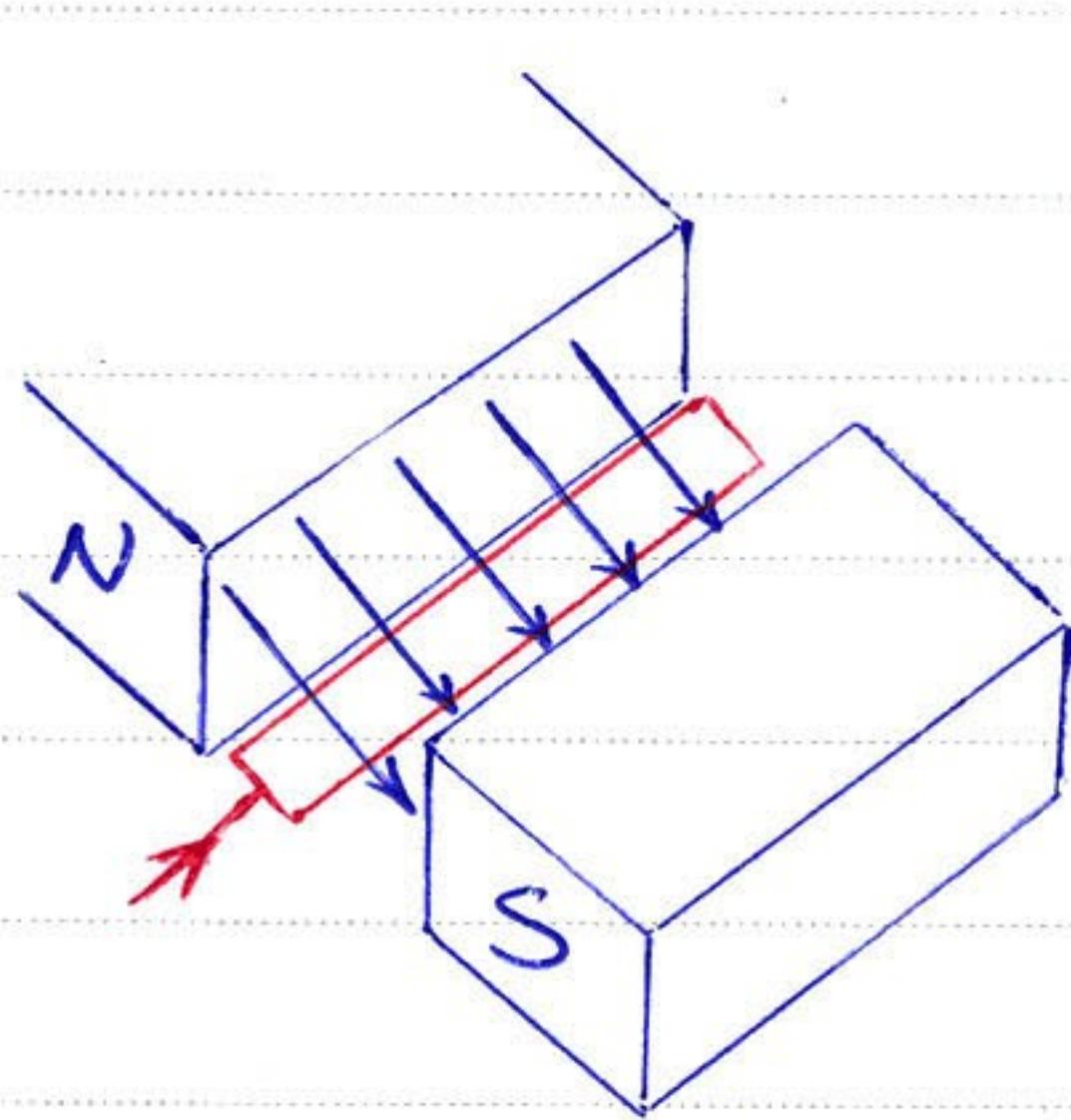
نصف دایره را در پایین در نظر می گیریم و در جهت شللاتی می چرخانیم.

در این صورت θ از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ تغییر می کند.

* در صورتیکه سیم حلقه مغناطیسی ثابت باشد حلقه در هر شللی باشد و سیم باشد کار آن صفر

است.

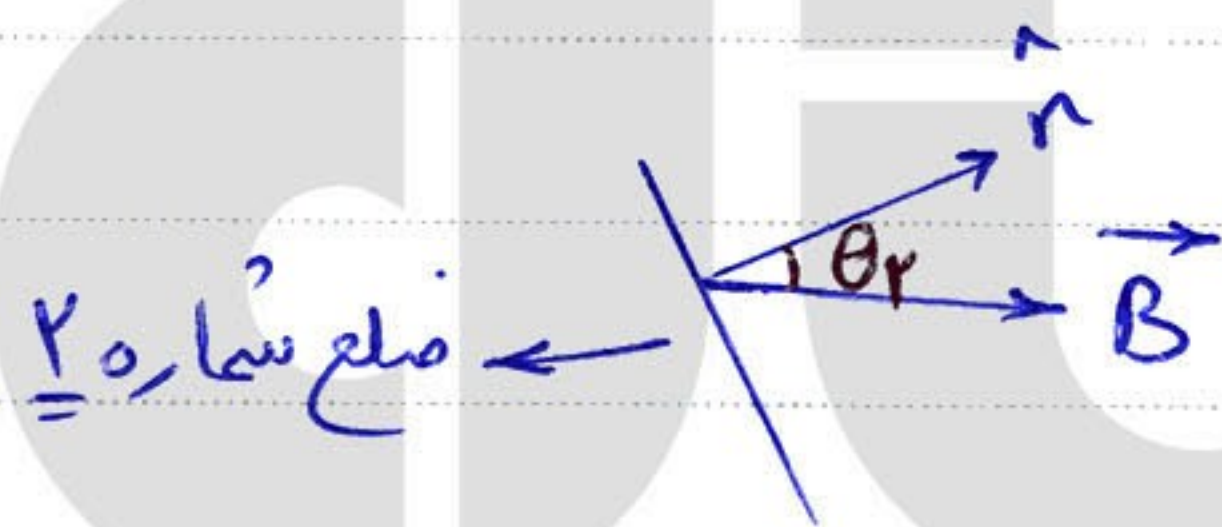
نکته: اگر در هر حلقه جریان در میدان مغناطیسی



$\hat{n}$: بردار عمود بر سطح حلقه

θ : زاویه بین $\hat{n}$ و جهت میدان

نکته: بردار عمود بر سطح حلقه معرفی می کنیم به جهت آن با استفاده از قانون دست راست تعیین می گردد. به طور کلی اگر چهار انگشت دست راست در جهت جریان قرار گیرد انگشت شست جهت بردار عمود بر حلقه نشان می دهد.



$$F_1: \text{ نیرو وارد بر ضلع } \perp: |\vec{F}_1| = \ell \vec{\ell}_1 \times \vec{B} = \ell \ell_1 B \sin \theta_1 = \ell a B \sin 90^\circ$$

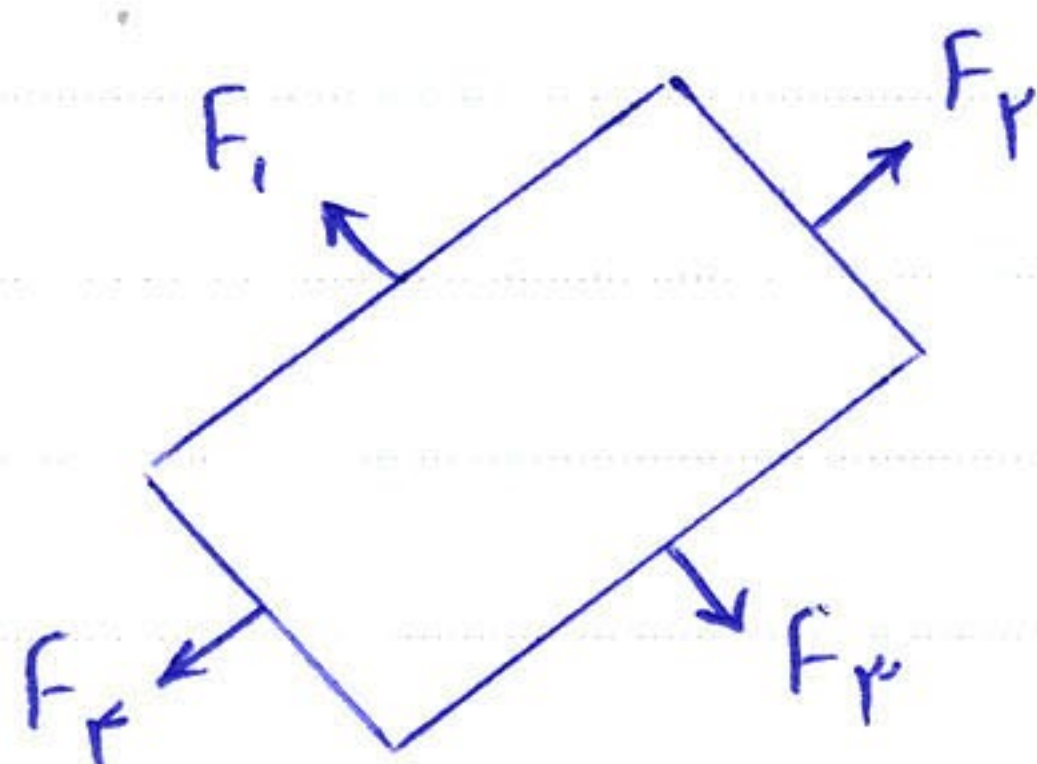
$$\rightarrow |\vec{F}_1| = \ell a B = |\vec{F}_3|$$

جهت F_1 و F_3 به دلیل عکس بودن جهت جریان در این دو رسم در خلاف جهت یکدیگرند اما اندازه آن ها با هم برابر است.

$$|\vec{F}_2| = \ell \vec{\ell}_2 \times \vec{B} = \ell \ell_2 B \sin \theta_2 = \ell b B \sin (90^\circ - \theta) = \ell b B \cos \theta$$

$$\rightarrow |\vec{F}_2| = \ell b B \cos \theta = |\vec{F}_4|$$

جهت F_1 و F_2 به دلیل عکس بودن جهت جریان در این دو رسم در خلاف جهت یکدیگرند اما اندازه آن ها با هم برابر است.

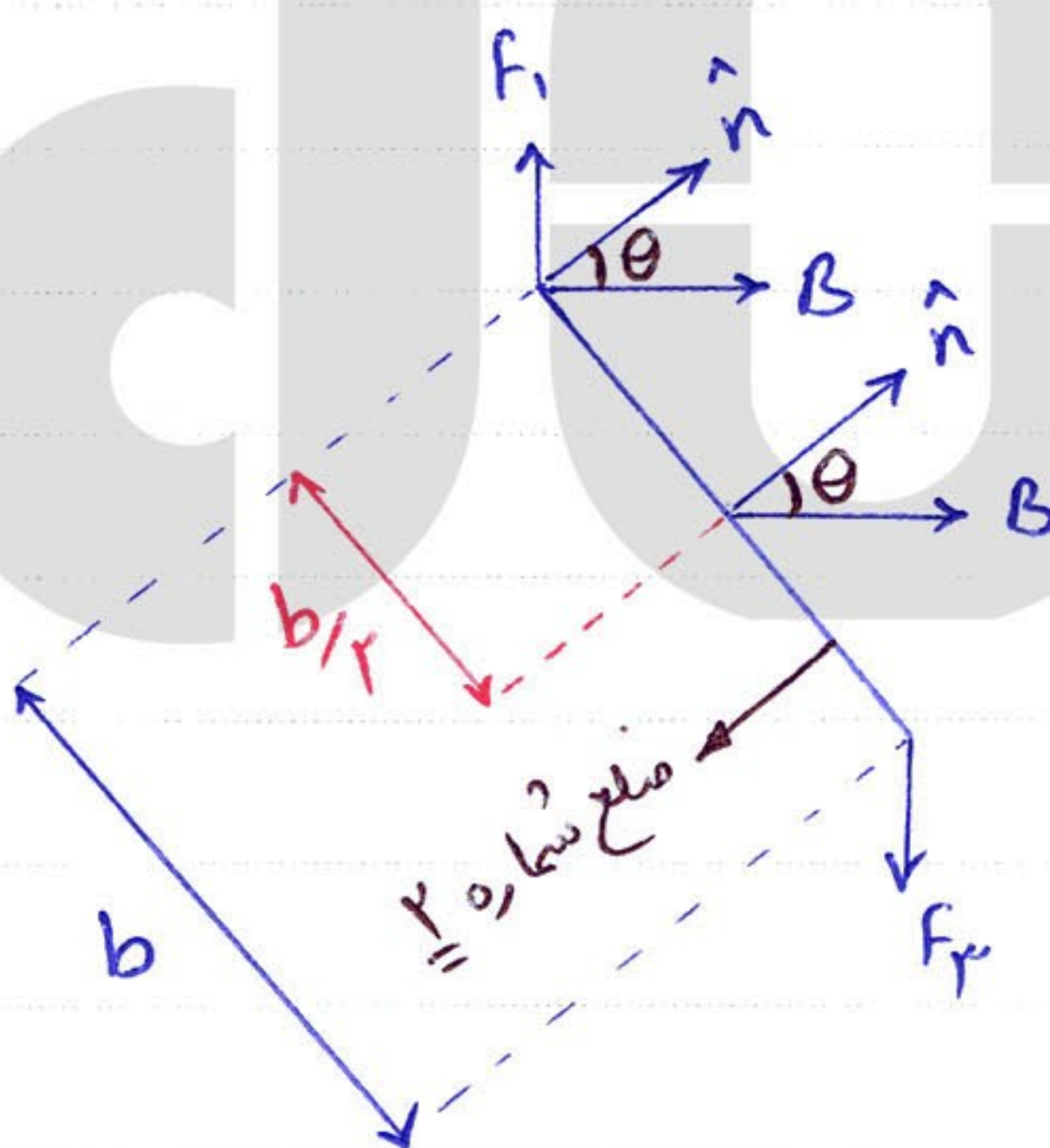


$$\vec{\Sigma F} = 0$$

در نتیجه حلقه حرکت انتقالی ندارد.

اما نیروهای F_1 و F_3 به حلقه گسترده وارد می شوند و حلقه را دارای چرخشی می کنند تا

$\hat{n}$ با B هم راستا شود:



$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_3 \rightarrow \tau = r + F \times \sin \theta$$

$$\tau_1 = F_1 b/2 \sin \theta = i a B b/2 \sin \theta$$

$$\tau_3 = F_3 b/2 \sin \theta = i a B b/2 \sin \theta$$

گسترده وارد بر حلقه جریان در سیم عمود بر صفحه می شود $\tau = i a b B \sin \theta$

* اگر حلقه N در یکپارچه شده باشد:

$$\tau = i N a b B \sin \theta = i N A B \sin \theta$$

$A \leftarrow$ مساحت حلقه

میان در قطبی مقناطیسی (متر) : اندکیت برداری به اندازه آن برابر iNA است.

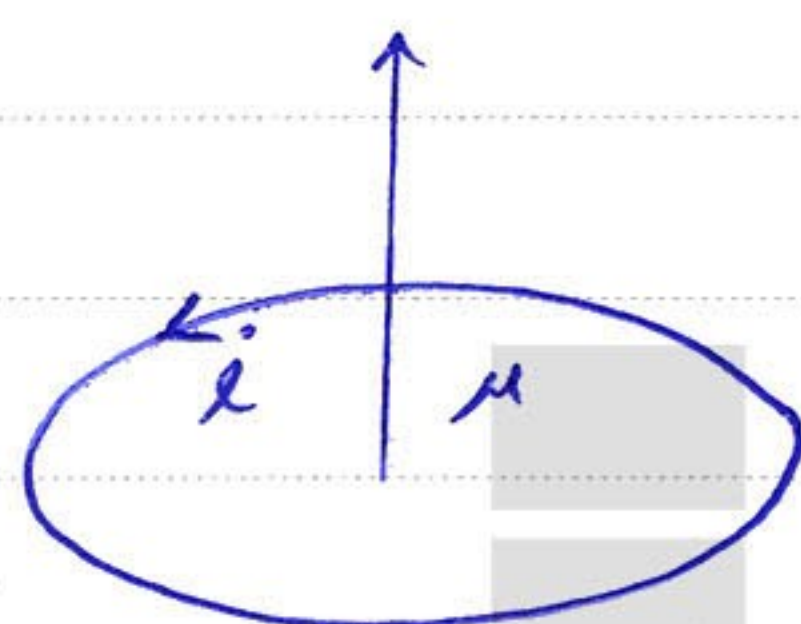
جهت متر هم جهت با $\hat{n}$ است پس در نتیجه :

$$|\vec{\mu}| = iNA$$

θ : زاویه بین B و μ که در حقیقت زاویه بین $\hat{n}$ و B

$$\tau = \mu B \sin \theta = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

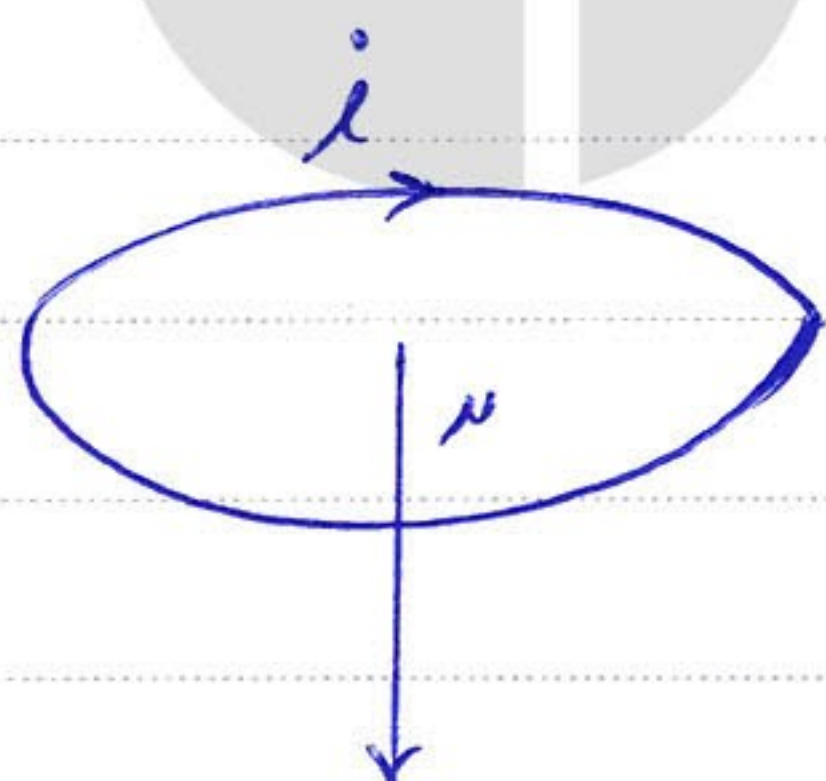
در قطبی الکتریکی



$$\tau = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

در قطبی مقناطیسی



$$\tau = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0^\circ \rightarrow U(\theta) = -\mu B \\ \theta = 180^\circ \rightarrow U(\theta) = \mu B \end{array} \right.$$

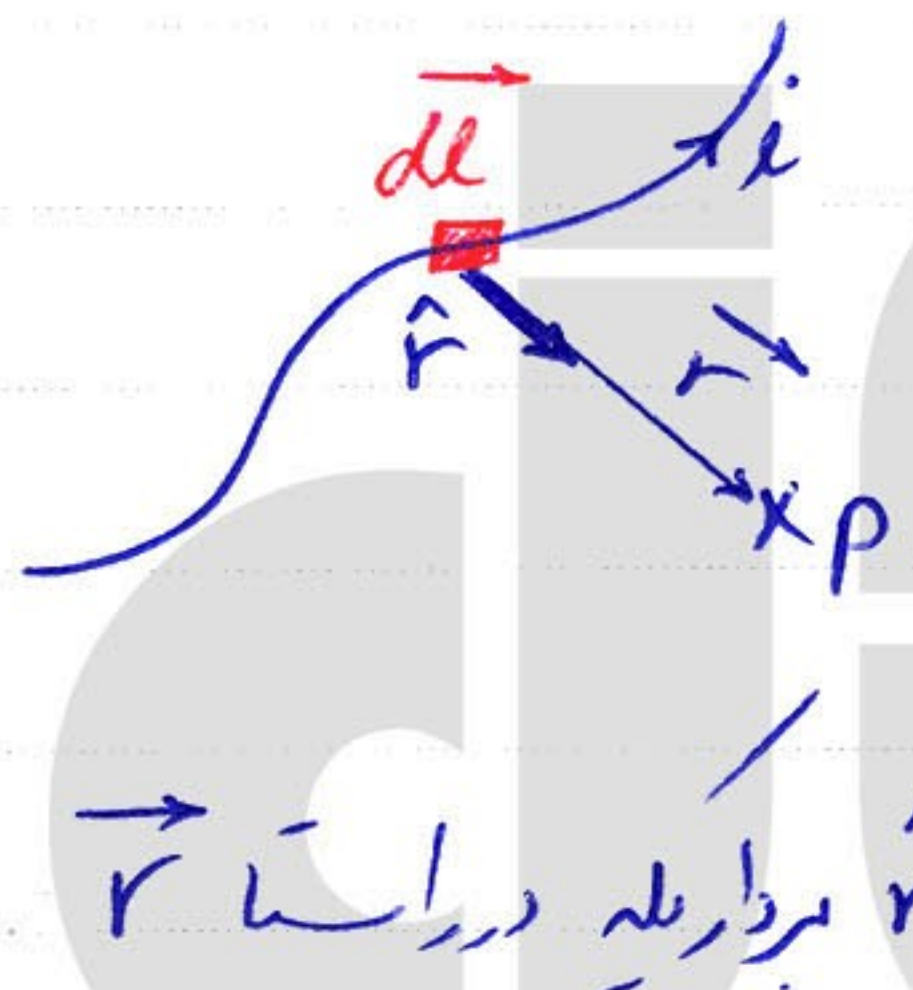
فصل نهم

محاسبه میدان مغناطیسی - سیم حامل جریان

قانون بیورسادر

قانون آمپر

قانون بیورسادر



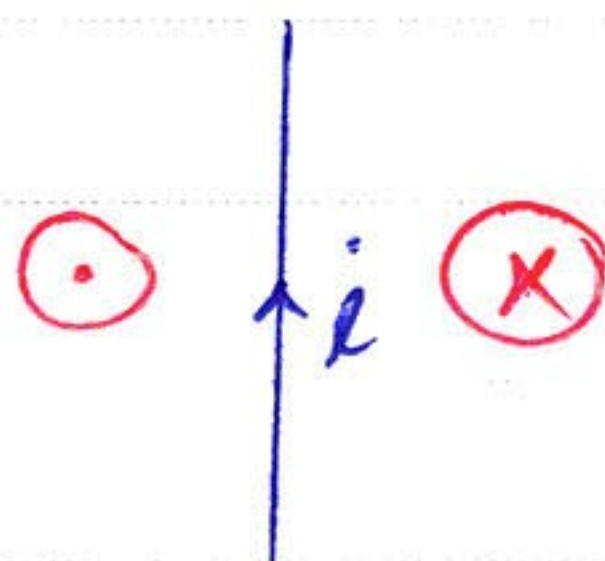
$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2} \Rightarrow \theta = \int dB$$

$\hat{r}$ بردار به در راستای $\vec{r}$

* جهت میدان مغناطیسی (B) با استفاده از قانون دست راست بیان می شود، در این صورت

که انگشت نسبت در جهت جریان و سپس چهار انگشت جهت میدان را نمایش می دهد.



روش حل مسائل توسط قانون بیورسادر

(۱) انتخاب بردار dl (المان طول در جهت جریان)

(۲) مسطح کردن بردار r

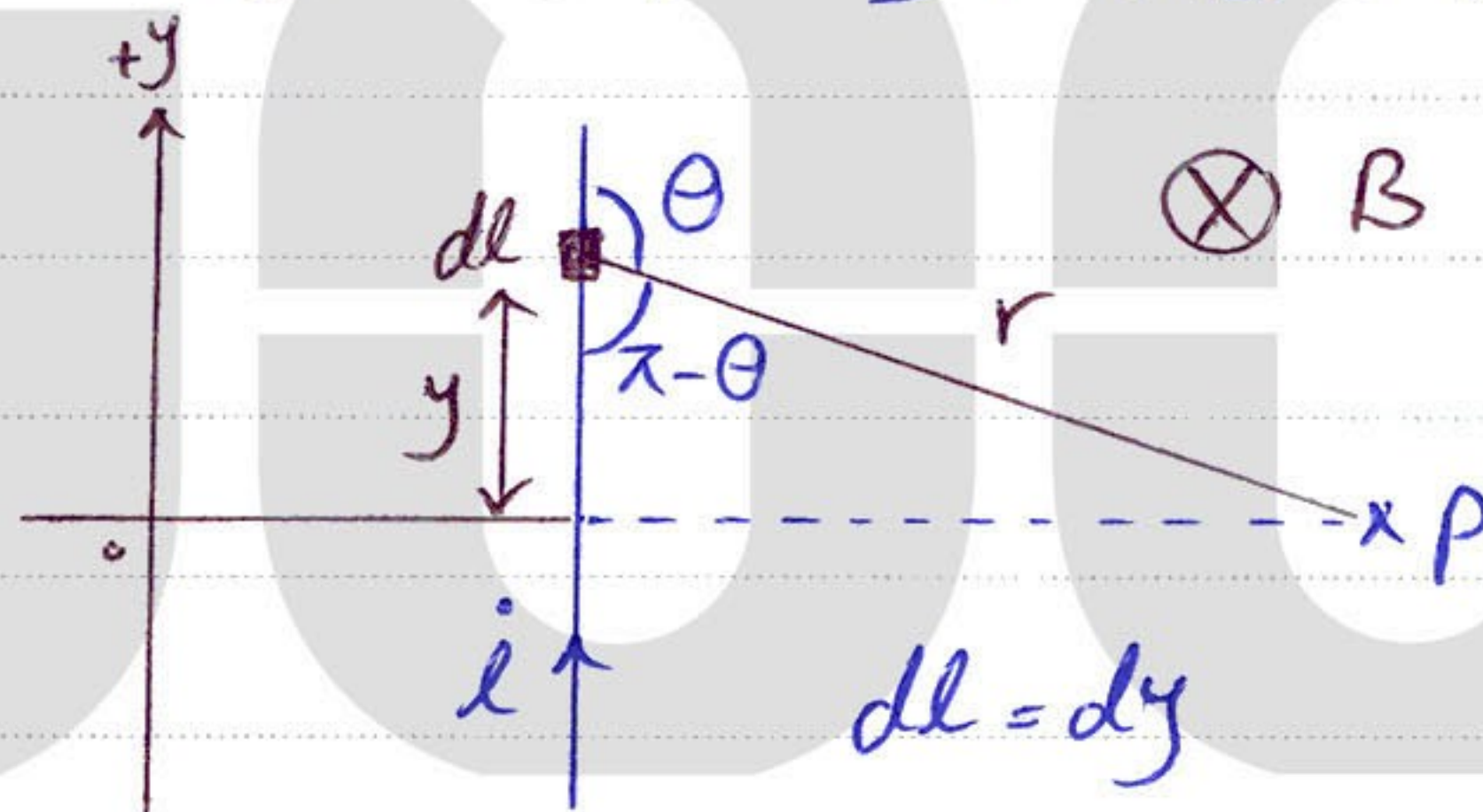
(۳) مسطح کردن زاویه θ (زاویه بین $\vec{r}$ و $d\vec{l}$)

(۴) نوشتن dB و محاسبه dl و r^2 و $\sin\theta$ بر حسب پارامترهای دستگاه مختصات

(۵) انتگرال گیری از dB

(۶) مسطح کردن جهت dB با استفاده از قانون دست راست

مثال: سیم حامل جریان با طول بی نهایت موجود است. میدان مغناطیسی نسبت به نقطه P



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \times \frac{dl \sin\theta}{r^2}, \quad dl = dy, \quad r^2 = R^2 + y^2, \quad \sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{r}$$

$$\rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \times \frac{dy R}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

۲۵ $\rightarrow$ چون مبدأ مختصات دوگانه است $B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \rightarrow y = R \tan\theta$

$$\rightarrow dy = R(1 + \tan^2\theta) d\theta = R \sec^2\theta d\theta$$

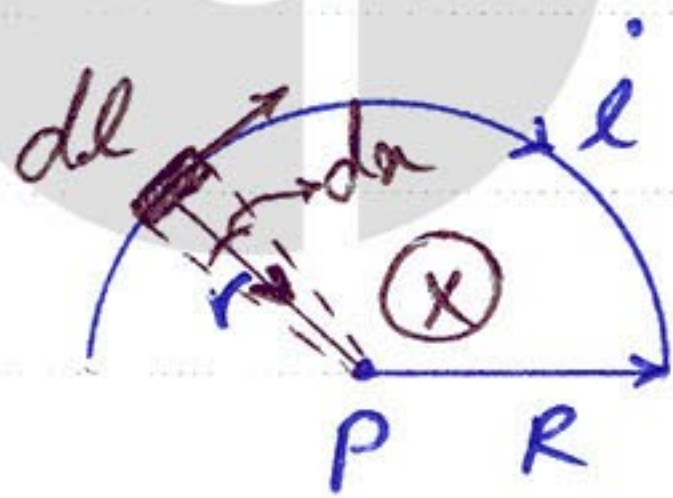
$$\Rightarrow (R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = (R^2 + R^2 \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = (R^2 (1 + \tan^2 \theta))^{\frac{3}{2}} = R^3 \sec^3 \theta$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R \sec^2 \theta d\theta}{R^3 \sec^3 \theta} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta$$

به این دلیل که اگر $\pi/2$ را در $y = R + \tan \theta$ جای گذاری کنیم $+\infty$ و اگر $-\pi/2$ را جای گذاری کنیم $-\infty$ بدست می آید.

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} (1 - (-1)) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

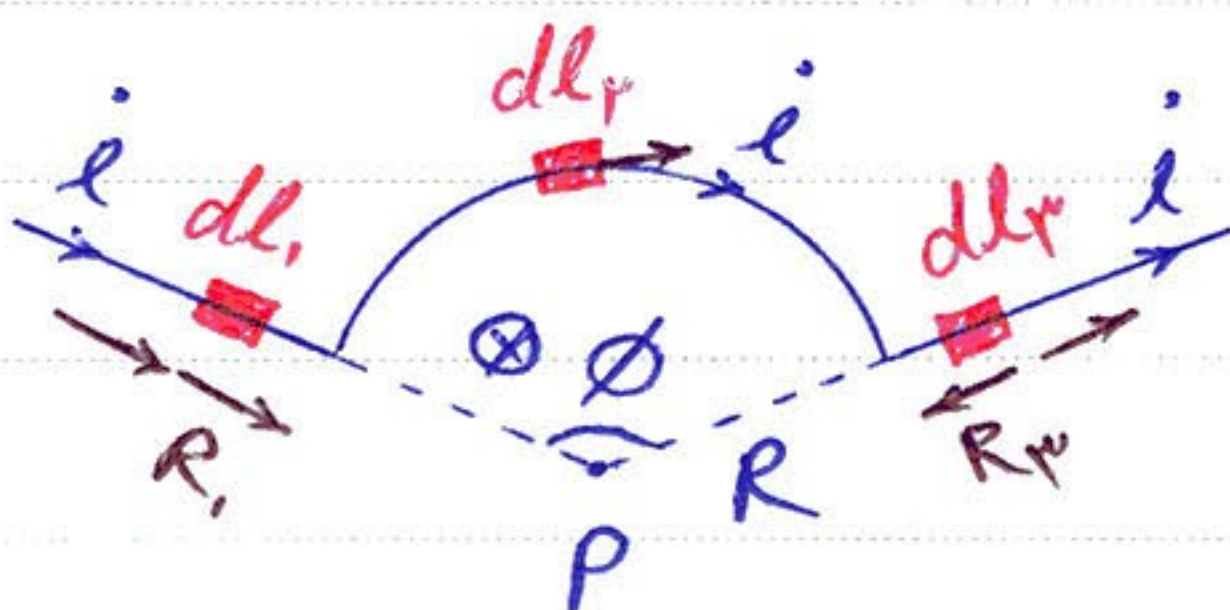
سوال: میدان مغناطیسی نیم دایره در نقطه P واقع در مرکز نیم دایره در این صورت است. میدان مغناطیسی را بدست آورید.



$$\frac{\mu_0 i dl}{4\pi R^2} = dB, \quad dl = r d\alpha = R d\alpha$$

* $\sin \theta$ به این دلیل که شعاع همیشه بر محیط خود عمود است برابر است.

$$B = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} R d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^{\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}$$



سوال: میدان مغناطیسی نیم دایره در نقطه P واقع در مرکز دایره را بدست آورید.

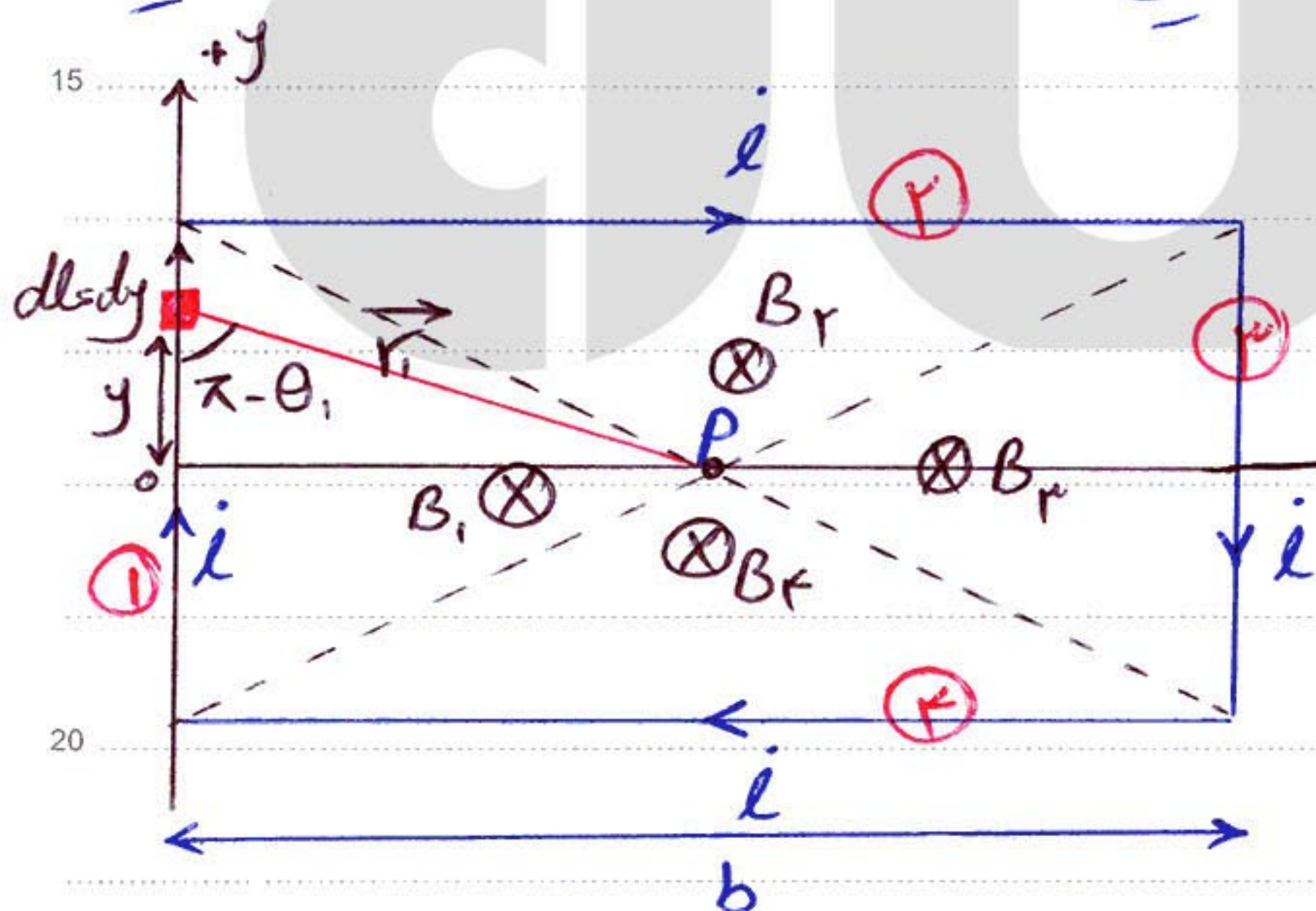
$$dB_1 = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{\sin\theta_1 dl_1}{r_1^2} = 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$dB_r = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{\sin\theta_r dl_r}{r_r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^\phi d\alpha = \frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R}$$

$$dB_r = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{\sin\theta_r dl_r}{r_r^2} = 0 \rightarrow \theta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow B_{\text{net}} = B_1 + B_r + B_r = \frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R}$$

مثال: میدان مغناطیسی سهم مقابل در به شکل مقابل است نسبت به نقطه P در سمت راست.



چون میدان حاصل از هر چهار جهت

در یک سراسر است پس می توان آن ها

را با هم جمع کرد.

$$|B| = B_1 + B_r + B_r + B_r, \quad dB = \frac{\mu_0 i dl \sin\theta}{4\pi r^2}$$

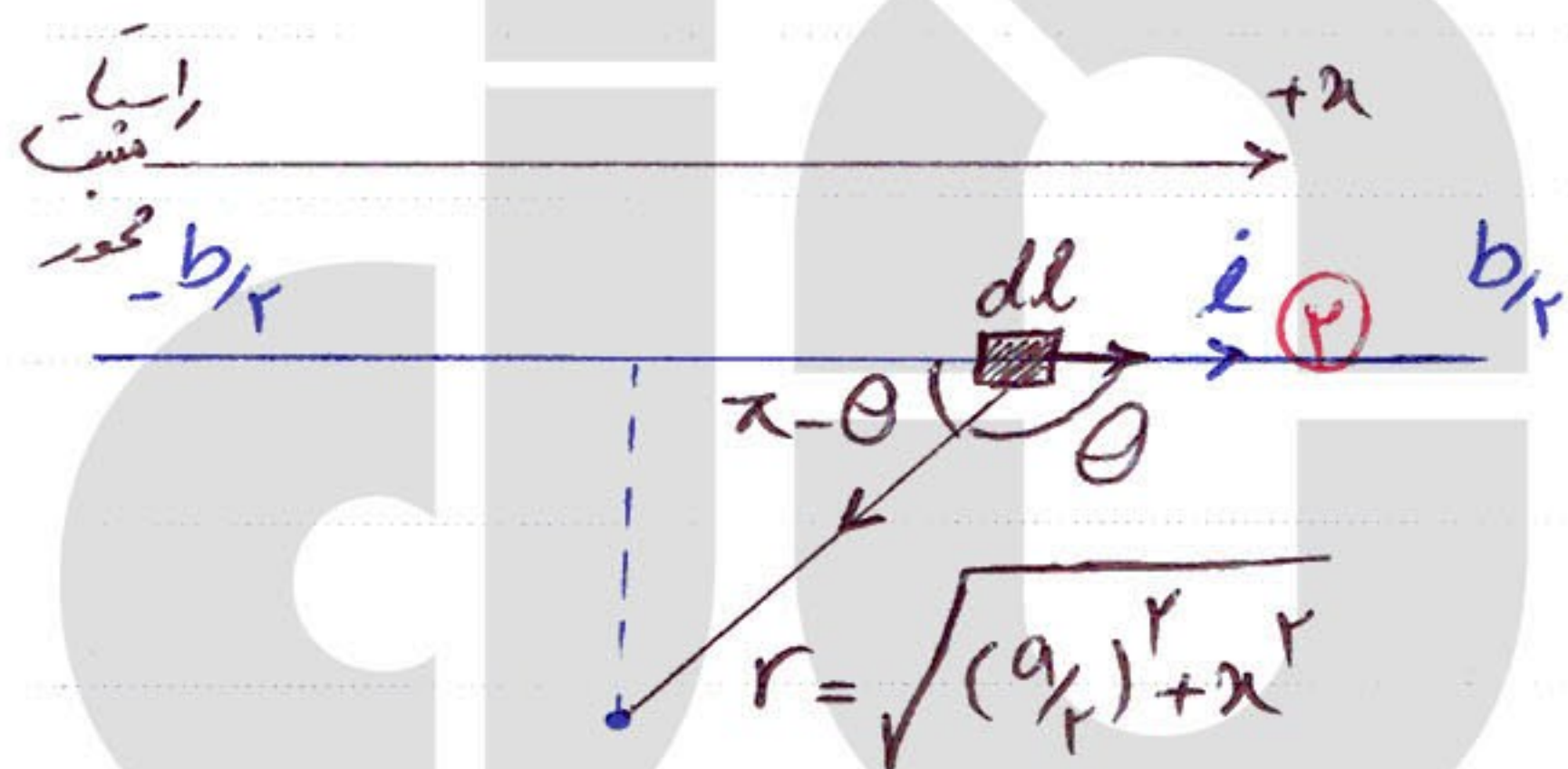
$$dl_1 = dy, \quad r_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 + y^2}, \quad \sin\theta_1 = \sin(\pi - \theta_1) = \frac{b/r}{\sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 + y^2}}$$

$$B = \int_{-a/r}^{a/r} \frac{\mu_0 i b dy}{((b/r)^2 + y^2)^{3/2} \lambda \pi} = \frac{\mu_0 i b}{\pi \lambda \pi} \int_{-a/r}^{a/r} \frac{dy}{((b/r)^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i b/r}{\pi \lambda} \int \frac{b/r \sec^2 \theta d\theta}{(b/r)^3 \sec^3 \theta} = \frac{\mu_0 i}{\pi b \lambda} \int_{\tan^{-1}(-a/b)}^{\tan^{-1}(a/b)} \cos \theta d\theta$$

$$* y = \frac{b}{r} \tan \theta \rightarrow -\frac{a}{r} = \frac{b}{r} \tan \theta \begin{cases} \theta = \tan^{-1}(a/b) \\ \theta = \tan^{-1}(-a/b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_1 = B_r$$



$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 i dl \sin \theta}{\pi \lambda r^2}$$

$$dl = da$$

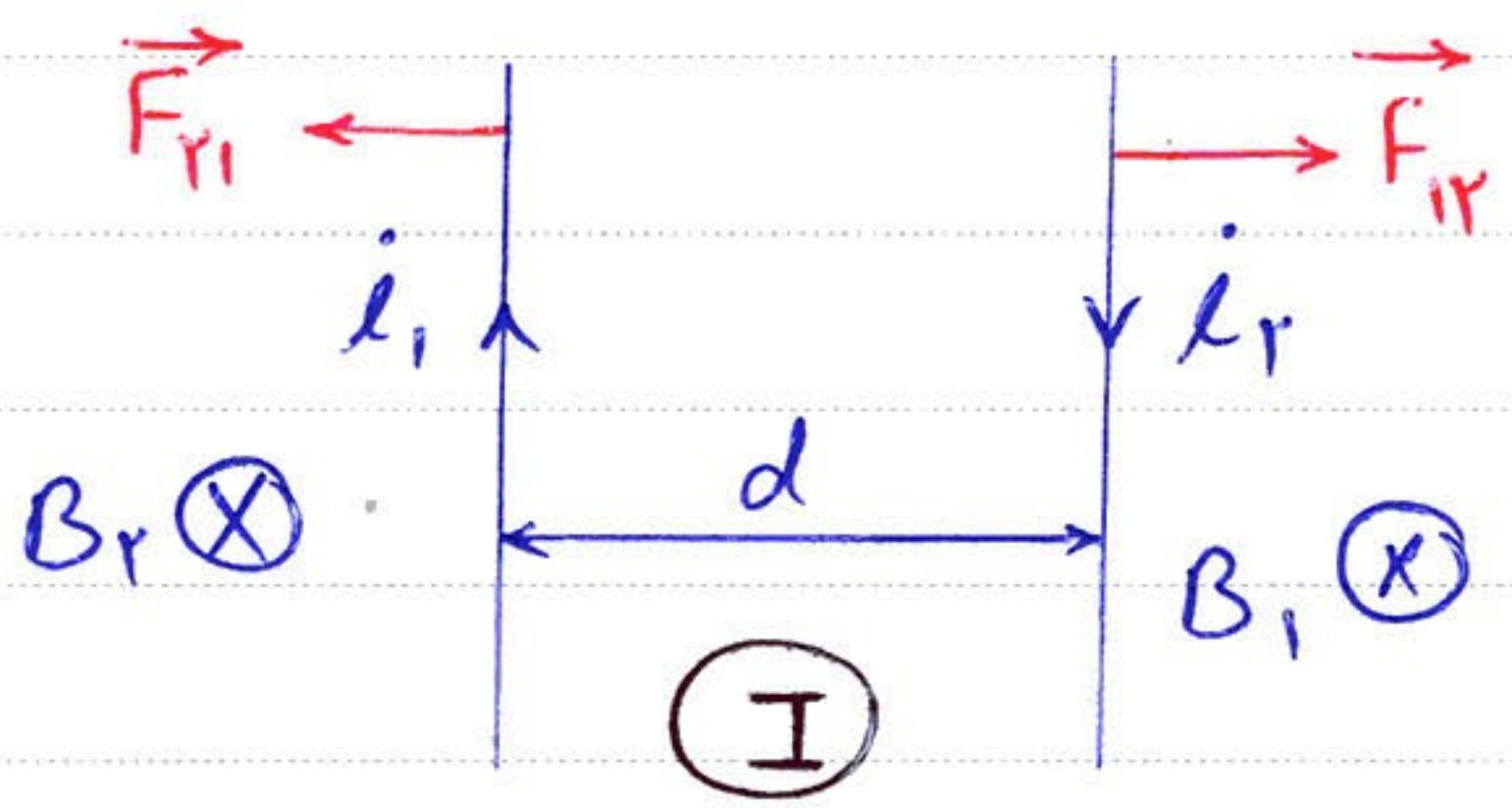
$$\Rightarrow \sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{a/r}{\sqrt{(a/r)^2 + x^2}}$$

$$\Rightarrow B = \int dB = \int_{-b/r}^{b/r} \frac{\mu_0 i da}{\pi \lambda ((a/r)^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i a}{\pi \lambda} \int_{-b/r}^{b/r} \frac{da}{((a/r)^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{x = a/r \tan \theta}{da = a/r \sec^2 \theta d\theta} \rightarrow \frac{\mu_0 i a}{\pi \lambda} \int_{\tan^{-1}(-b/a)}^{\tan^{-1}(b/a)} \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow |B_r| = |B_f| \Rightarrow B_T = B_1 + B_r + B_r + B_f$$

نیروی بین دو سیم حامل جریان

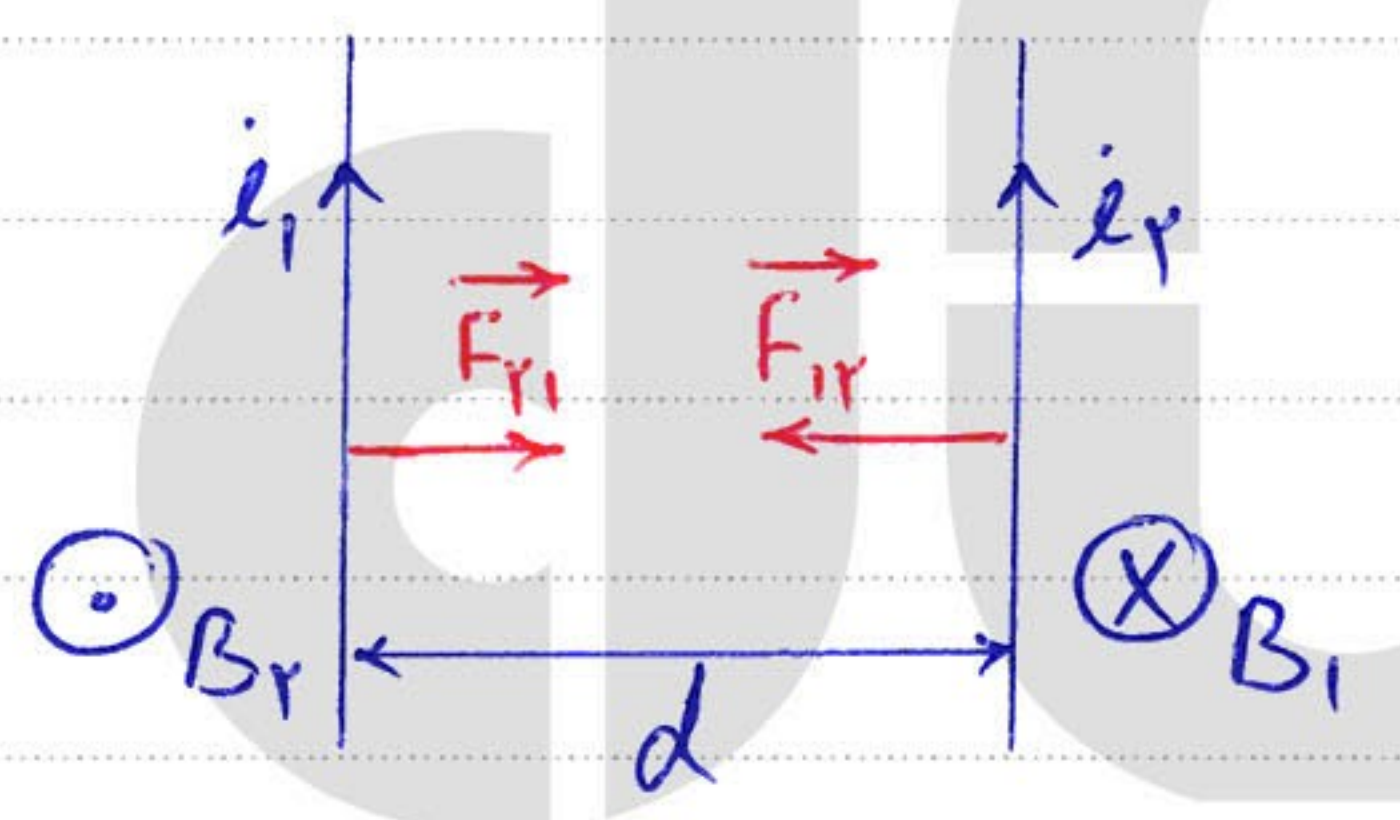


$$B_i = \frac{\mu i}{2\pi r} = \frac{\mu i_1}{2\pi d}$$

نیروی وارد بر سیم ۲

$$\vec{F}_{12} = i_2 \vec{L} \times \vec{B} = i_2 L B_i \sin 90^\circ = i_2 L B_i = i_2 L \frac{\mu i_1}{2\pi d}$$

$$= \frac{\mu i_1 i_2 L}{2\pi d} \rightarrow B_r = \frac{\mu i_2}{2\pi d}$$

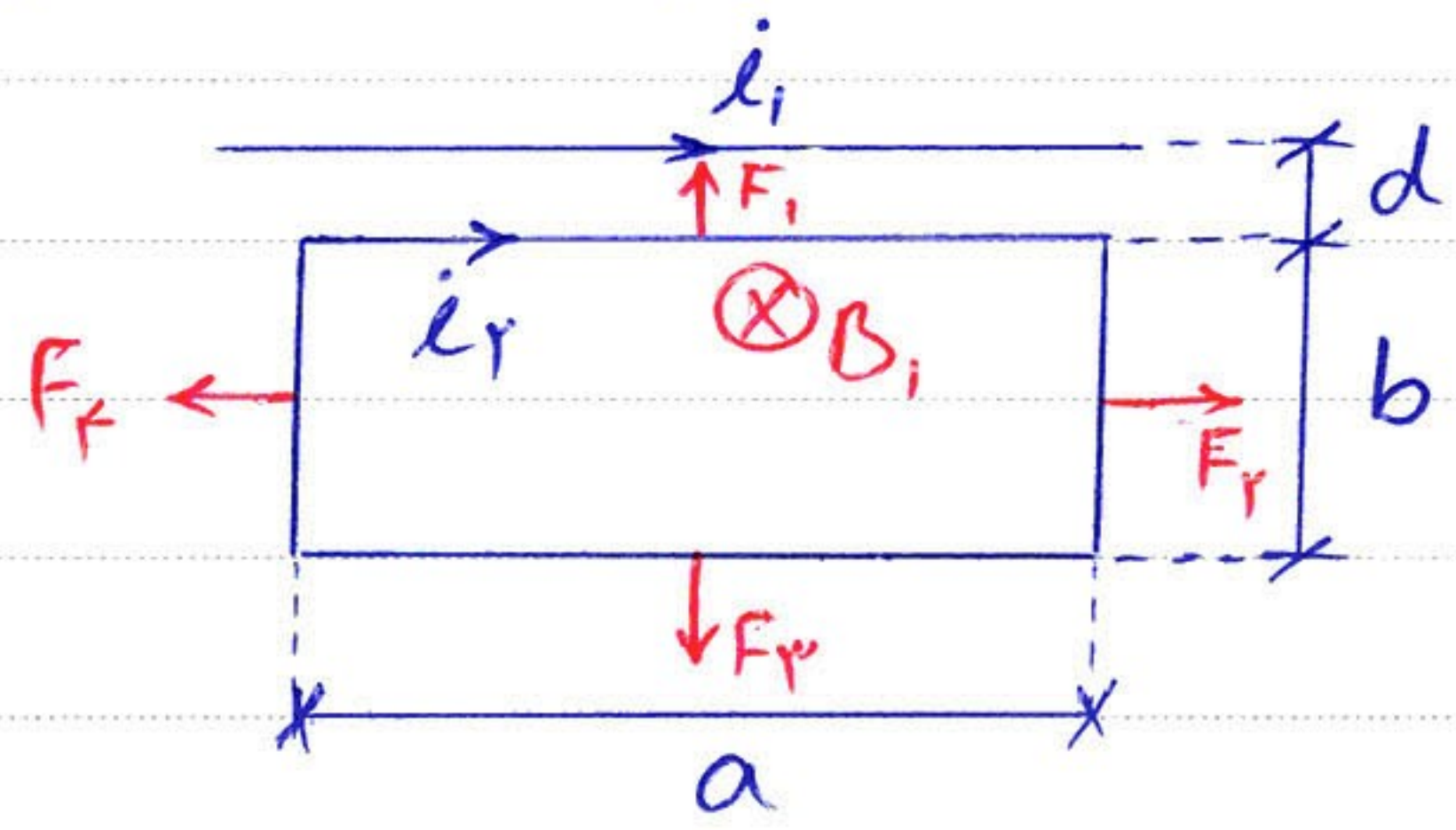


$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{\mu L i_1 i_2}{2\pi d}$$

* اگر جریان هاهم جهت باشند، درسیم یکدیگر را جذب و اگر جریان هادرخلاف جهت باشند

درسیم یکدیگر را دفع می کنند.

مثال: نیرو وارد بر سیم که حلقه را ساخته توسط سیم حامل جریان را بدست آورید.



$$\text{سیم شماره ۱: } \vec{F}_1 = \vec{i}_r \vec{L} \times \vec{B}_1 = \vec{i}_r L B_1 \sin 90^\circ = \vec{i}_r L B_1 = \vec{i}_r a \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

$$= \frac{a \mu_0 i_1 \vec{i}_r}{2\pi d}$$

$$\text{سیم شماره ۲: } \vec{F}_2 = \vec{i}_r L B_1 \sin 90^\circ = \frac{\vec{i}_1 \vec{i}_r a \mu_0}{2\pi (b+d)}$$

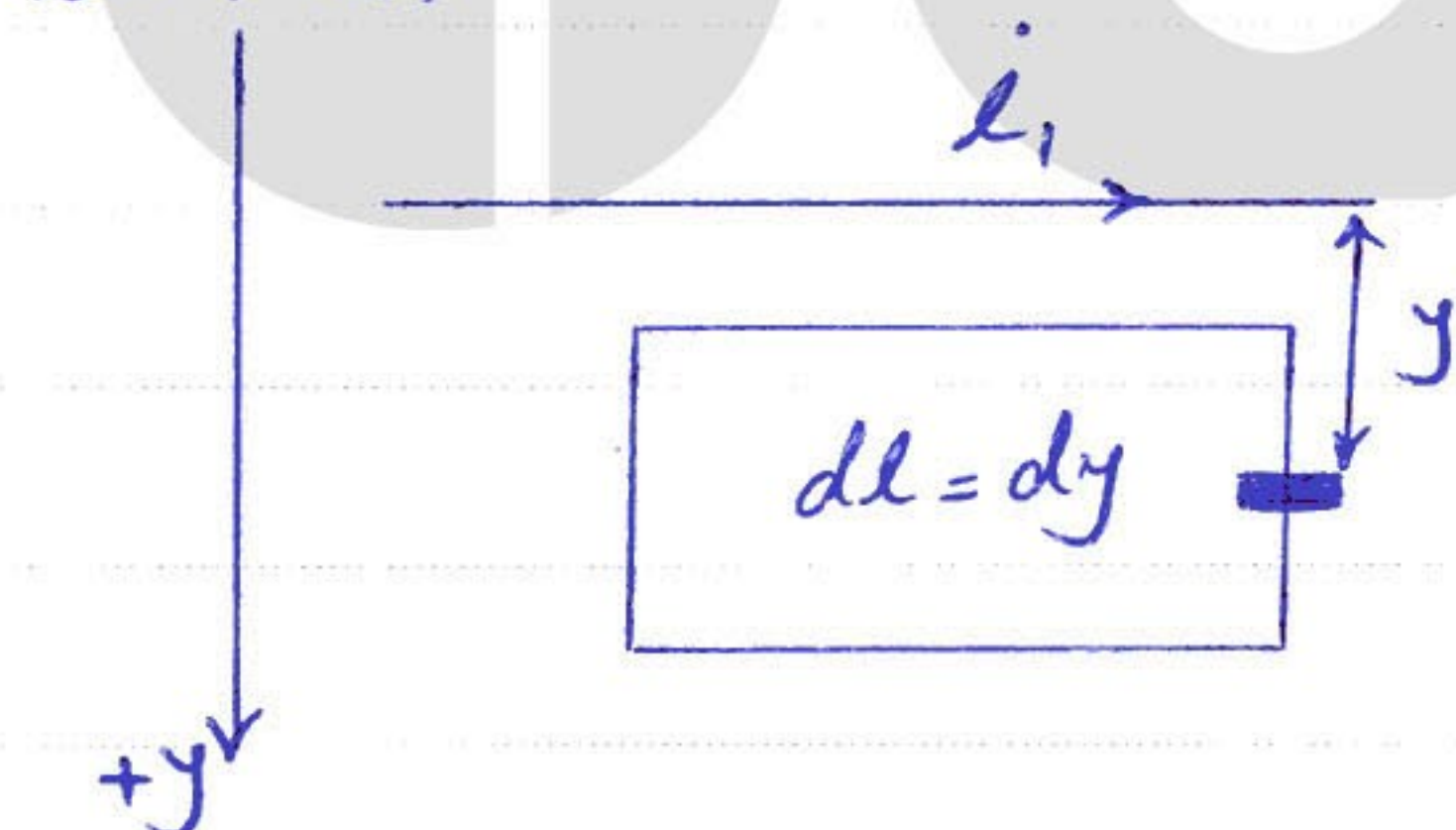
$$\Rightarrow F_1 > F_2 \rightarrow \text{چون } F_2 \text{ منحرف نباشد}$$

از طرفی به دلیل اینکه میدان در محل سیم ۲ متغیر است (زیرا میدان به فاصله وابسته است)

به این دلیل که ابتدای سیم شماره ۲ از سیم حامل جریان به فاصله d ، انتهای سیم ۲ از سیم

حامل جریان $b+d$ فاصله دارد پس باید همان سری کنیم:

جهت مثبت محور



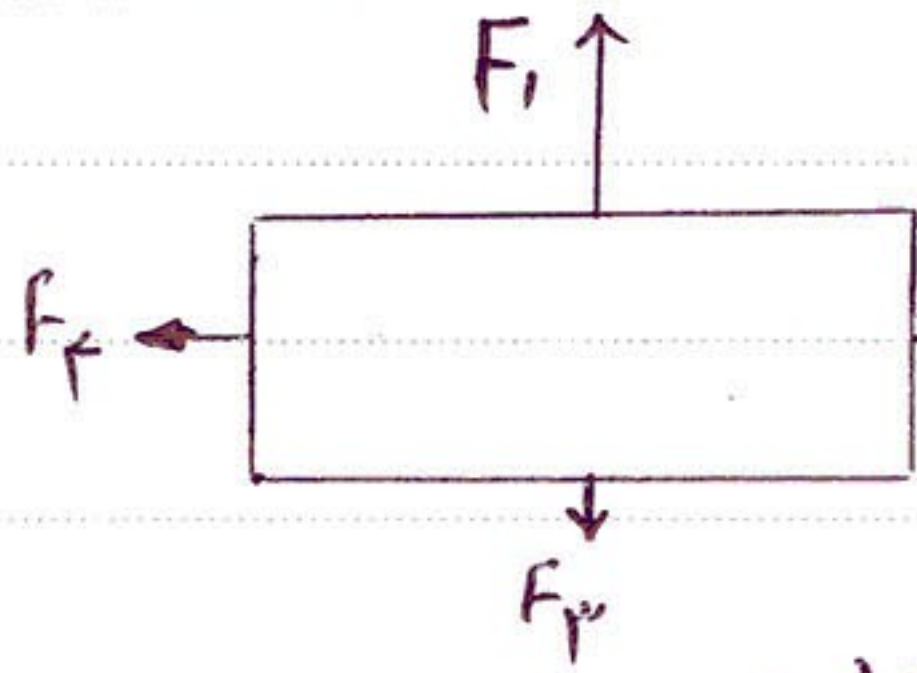
$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

$$dF_r = \vec{i}_r d\vec{l} \times \vec{B}_1 = \vec{i}_r dl B \sin 90^\circ$$

$$= \vec{i}_r dl B_1 = \vec{i}_r dy \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

$$= \frac{\mu_0 i_1 \vec{i}_r}{2\pi} \times \frac{dy}{y} \Rightarrow \vec{F}_r = \frac{\mu_0 i_1 \vec{i}_r}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{dy}{y}$$

$$= \frac{\mu_0 i_1 \vec{i}_r \ln y}{2\pi} \Big|_d^{d+b} = \frac{\mu_0 i_1 \vec{i}_r}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) \rightarrow |F_r| = |F_f|$$



جهت جریان فقط بر روی جهت نیرو تأثیری ندارد:

F_2 با F_3 حتی می شود و چون $F_1 > F_3$ پس حلقه به سمت بالا می رود.

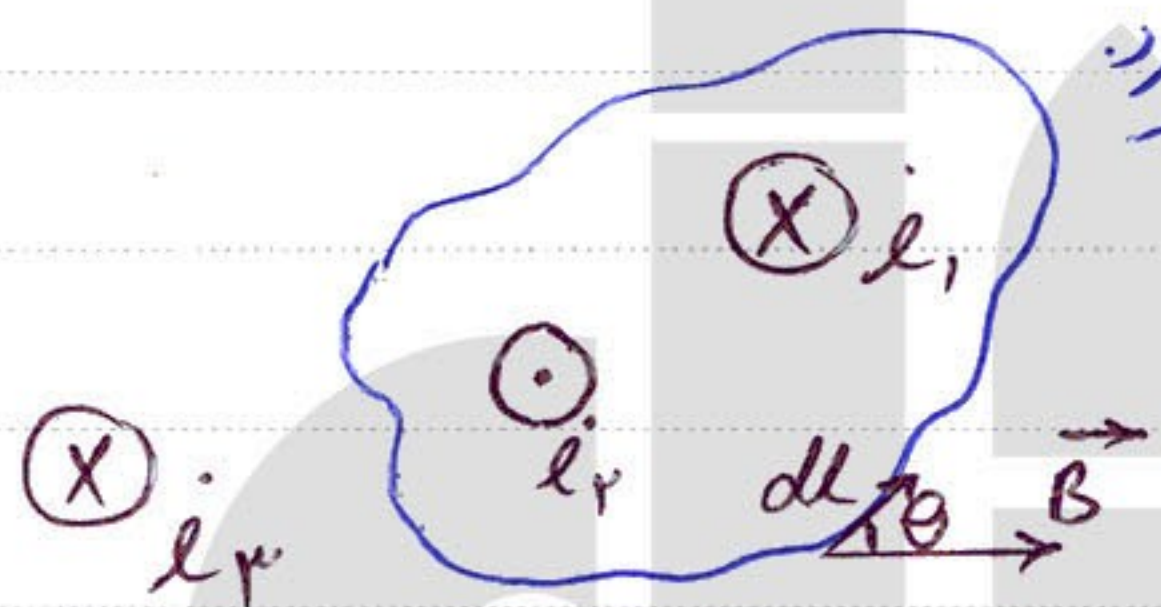
قانون آمپر

مسابه قانون گاوس که به کمک می کند میدان مغناطیسی در سیستم های دارای تقارن راحت تر

محاسبه کنیم: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$: قانون آمپر

* فقط جریان هایی که داخل سطح بسته فرضی ما باشد مورد محاسبه قرار می گیرد.

* باید سطح بسته فرضی ما طوری فرض شود که سیستم تقارن



راسته باشد و میدان در مسیر بسته همه جا ثابت و زاویه آن با امتداد مسیر مشخص باشد:

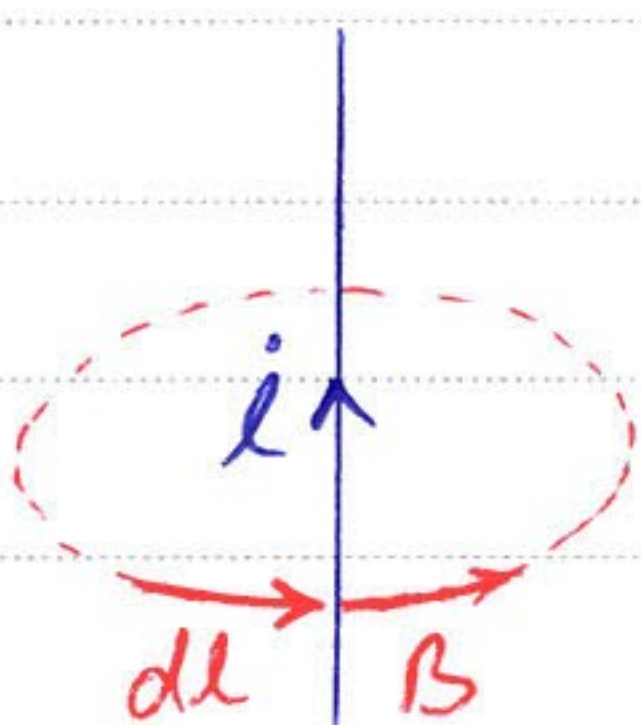
$$\oint B \cos \theta \, dl = \mu_0 i_{enc}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i_{enc}}{\cos \theta \oint dl}$$

طول مسیر بسته

مثال: سیم بلند حاوی جریان است. B را بیابید.

الترانسیست نسبت در جهت فرار داریم یعنی به سمت راست



چپ سیم بیرون شود در سمت راست است سیم درون سواست. پس

مسیر فرضی یک دایره حول سیم می‌شود که B بر روی آن ثابت است. از طرفی dl ، جهت آن
 را خودمان تعیین می‌کنیم می‌تواند هم جهت B یا در خلاف جهت B باشد بنابراین تفاوت داریم است
 که اگر هم جهت با B باشد $\theta = 0$ و اگر در خلاف جهت با B باشد $\theta = 180^\circ$ است.

$$\cos \theta = 1 \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} \Rightarrow \int B dl = \mu_0 i_{enc} \Rightarrow B \int dl = \mu_0 i$$

10 * حال چو آنست دست راست است در جهت dl در تظری سیم (یعنی در جهت حرکت) نه انگشت

نسبت جهت شیب جریان ایشان می‌دهد:

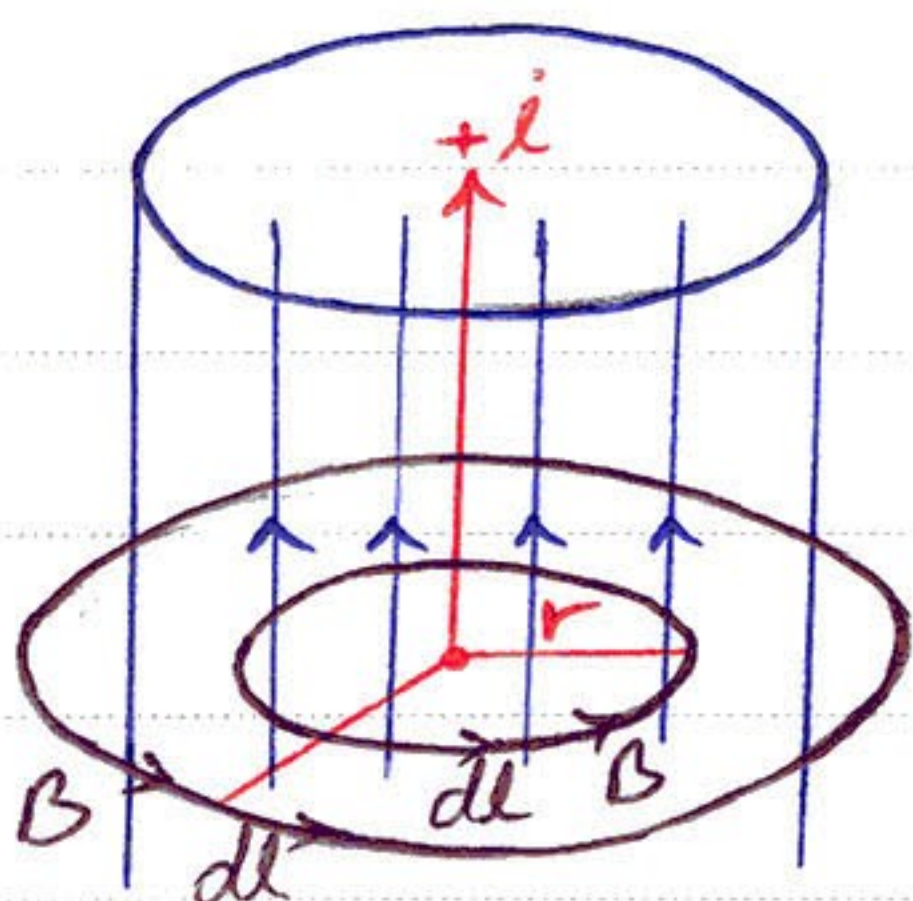
$$B \int dl = B \int r \cdot r = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

15 * از قانون آمپر برای سیم‌های بلند مثلاً باطل می‌نویسند می‌توان استفاده کرد. برای سیم‌هایی

که کُستکی دارند و یا لوله هستند از این قانون استفاده نکنیم بهتر است.

20 مثال: یک سیم حامل جریان ضخیم و بزرگ داریم که شعاع آن R است. B را در جهت $r < R$

و $r > R$ باید. (جهت جریان در این سیم رو به بالا و جایی جریان در این سیم ثابت است. $j = cte$)



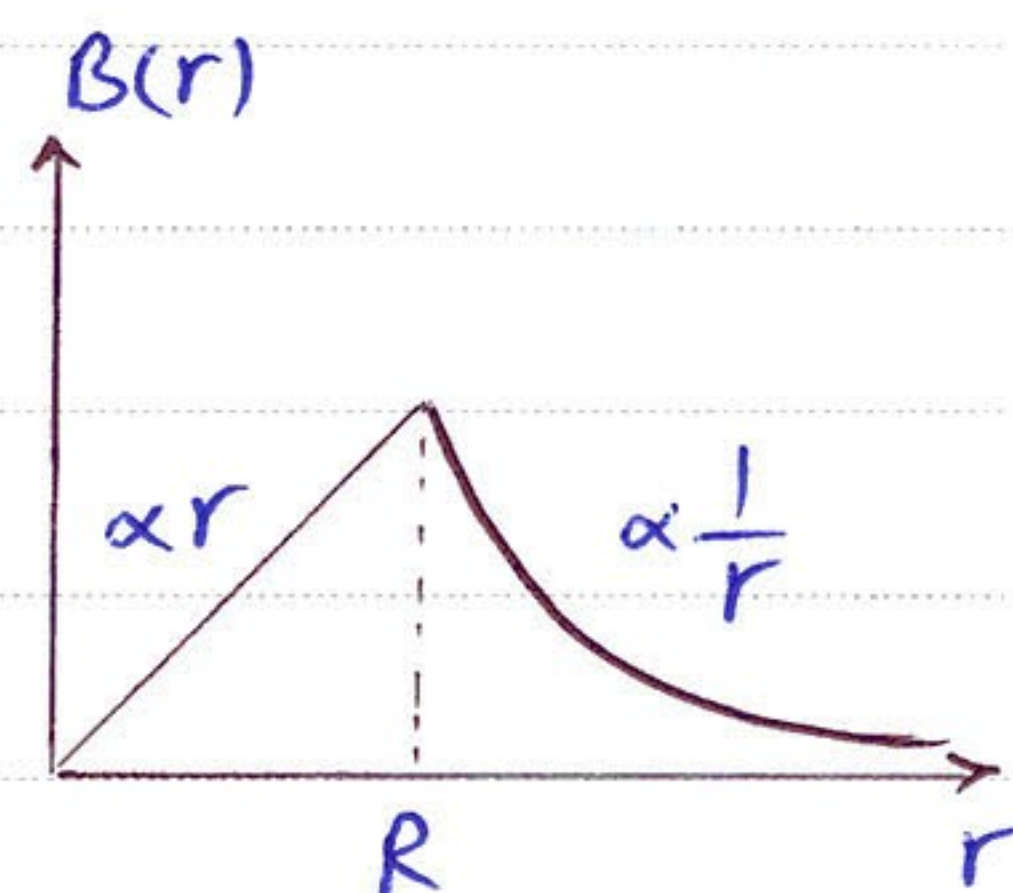
$$r < R: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} \Rightarrow \int B dl \cos(0) = \mu_0 i_{enc}$$

$$\Rightarrow B \times 2\pi r = \mu_0 i_{enc} \quad *$$

$$j = \frac{I}{\text{مساحت}} = \frac{I}{\pi R^2} \Rightarrow I = jA = \int j da$$

$$I_{enc} = \int j da = \int j r \pi r dr = j \int_0^r r \pi r dr = j \pi r^2$$

$$a = \pi r^2 \rightarrow da = 2\pi r dr$$



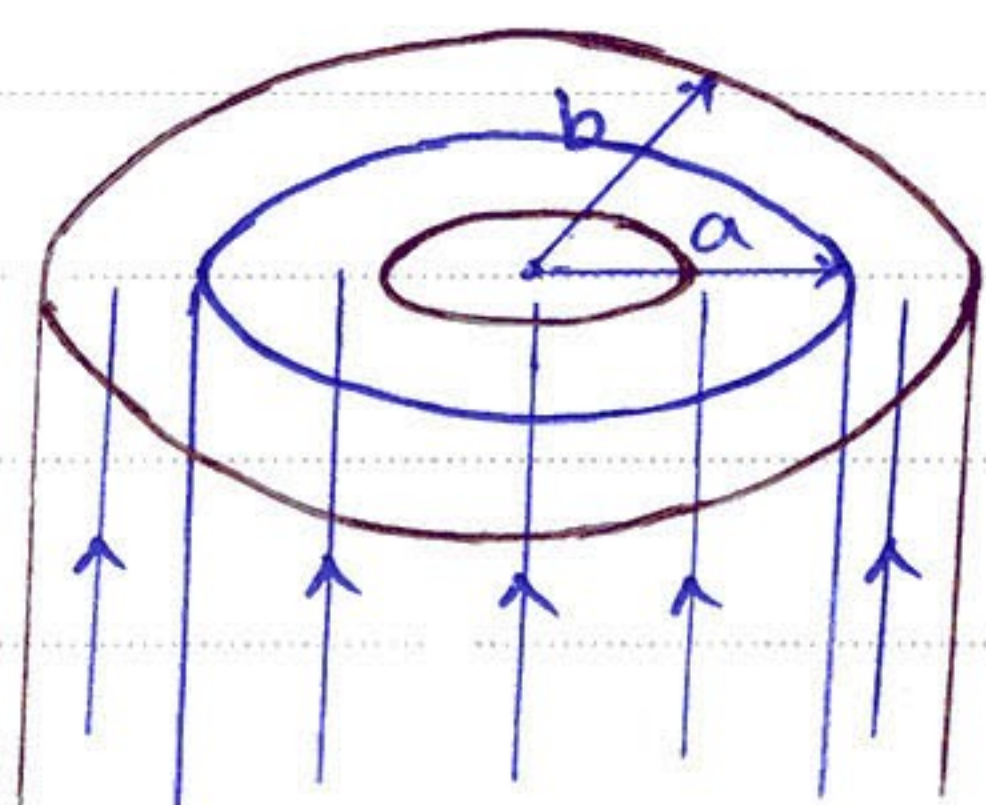
$$(*) \rightarrow B \times 2\pi r = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 j \pi r^2 \xrightarrow{j = \frac{I}{\pi R^2}} \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \mu_0 I \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$$r > R : \oint B dl = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow \oint B dl \cos(0) = \mu_0 I_{enc}$$

$$\Rightarrow B \times 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

مثال: میدان مغناطیسی سیم متناهی را در حالات زیر بدست آورید. (جای جریان $j = CR$)



$$B(r) = \begin{cases} ? & r < a \\ ? & a < r < b \\ ? & r > b \end{cases}$$

$$r < a : \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \rightarrow \int B dl \cos(0) = \mu_0 I_{enc} = B \int dl$$

$$= \mu_0 I_{enc} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$a < r < b : \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \rightarrow B \int dl \cos(0) = B \int dl = \mu_0 I_{enc}$$

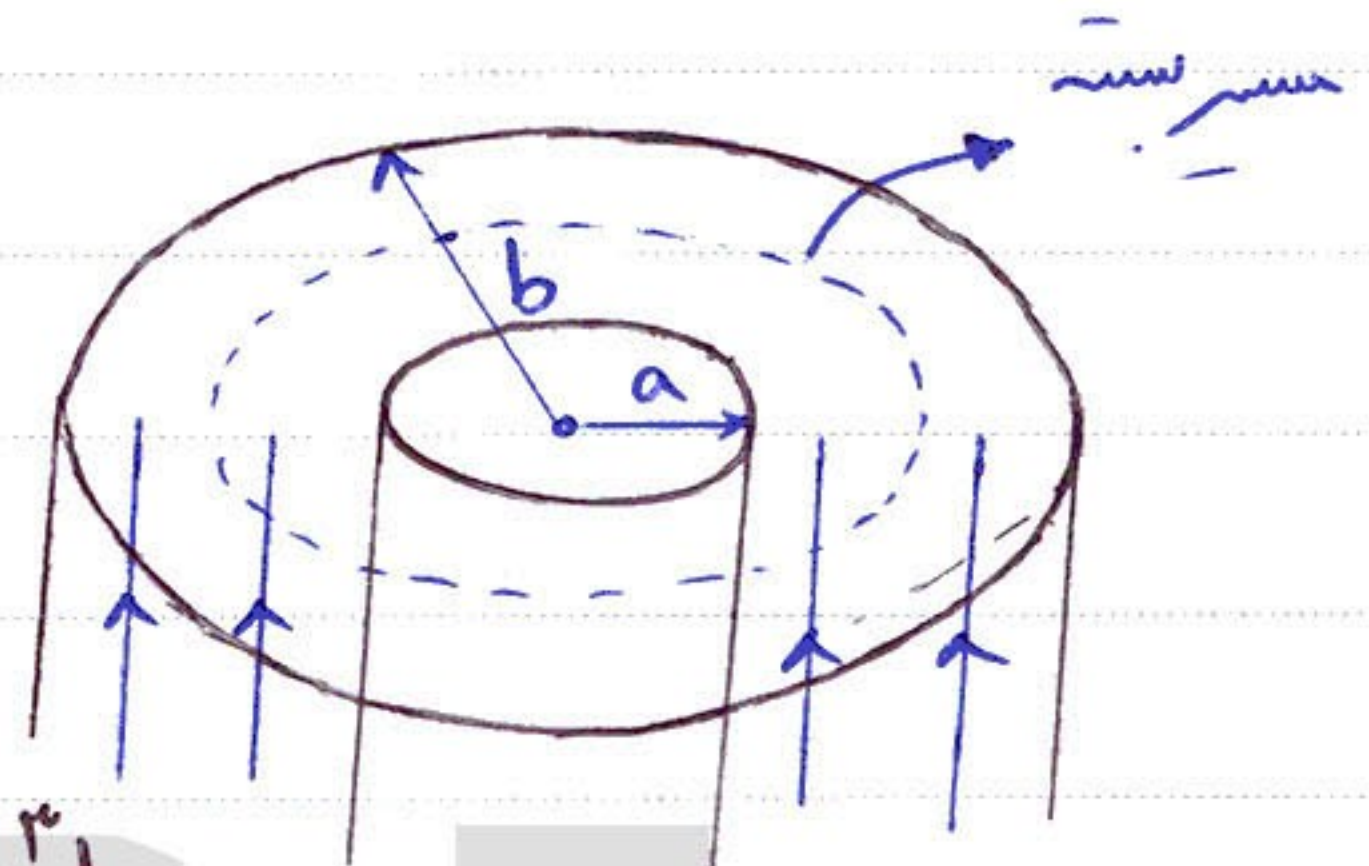
$$i_{enc} = \int j da = \int j r \lambda r dr = \int_a^r c r \lambda r dr = \lambda c \frac{r^3}{3} \Big|_a^r$$

$$\rightarrow i_{enc} = \frac{\lambda c}{3} (r^3 - a^3) \quad a = \pi r^2, da = 2\pi r dr$$

حدود تغییرات انتگرال با توجه به ناحیه‌ای که در مسیر بسته از آن جریان عبور دارد تعیین می‌شود.

$$\rightarrow B 2\pi r = \mu_0 \frac{\lambda c}{3} (r^3 - a^3)$$

طول مسیر بسته به شعاع



$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \frac{\lambda c}{3} (r^3 - a^3)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 c (r^3 - a^3)}{3r}$$

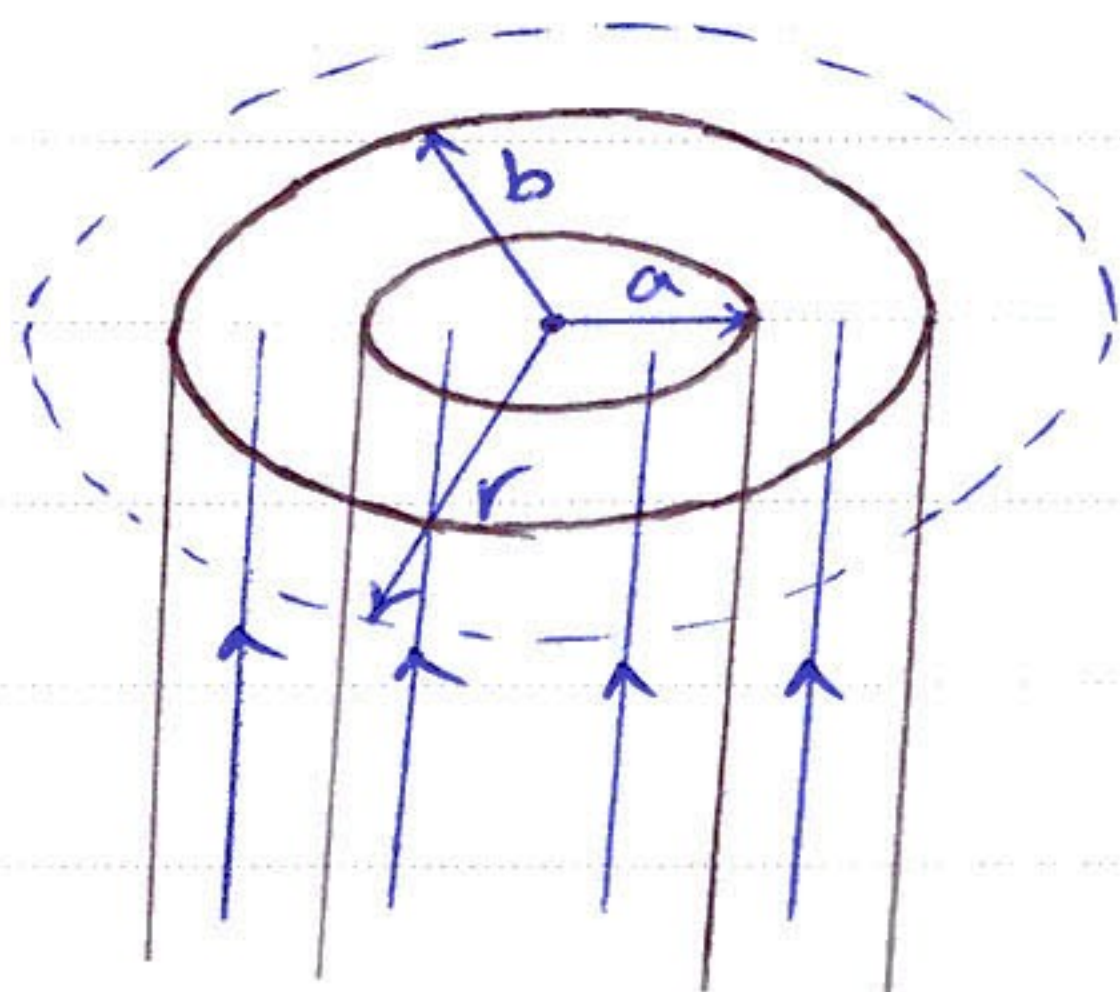
$$r > b: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} \rightarrow \int B dl \cos(0) = \mu_0 i_{enc}$$

$$\rightarrow B 2\pi r = \mu_0 i_{enc}$$

$$i_{enc} = \int j da = \int_a^b c r \lambda r dr = \frac{\lambda c}{3} \Big|_a^b$$

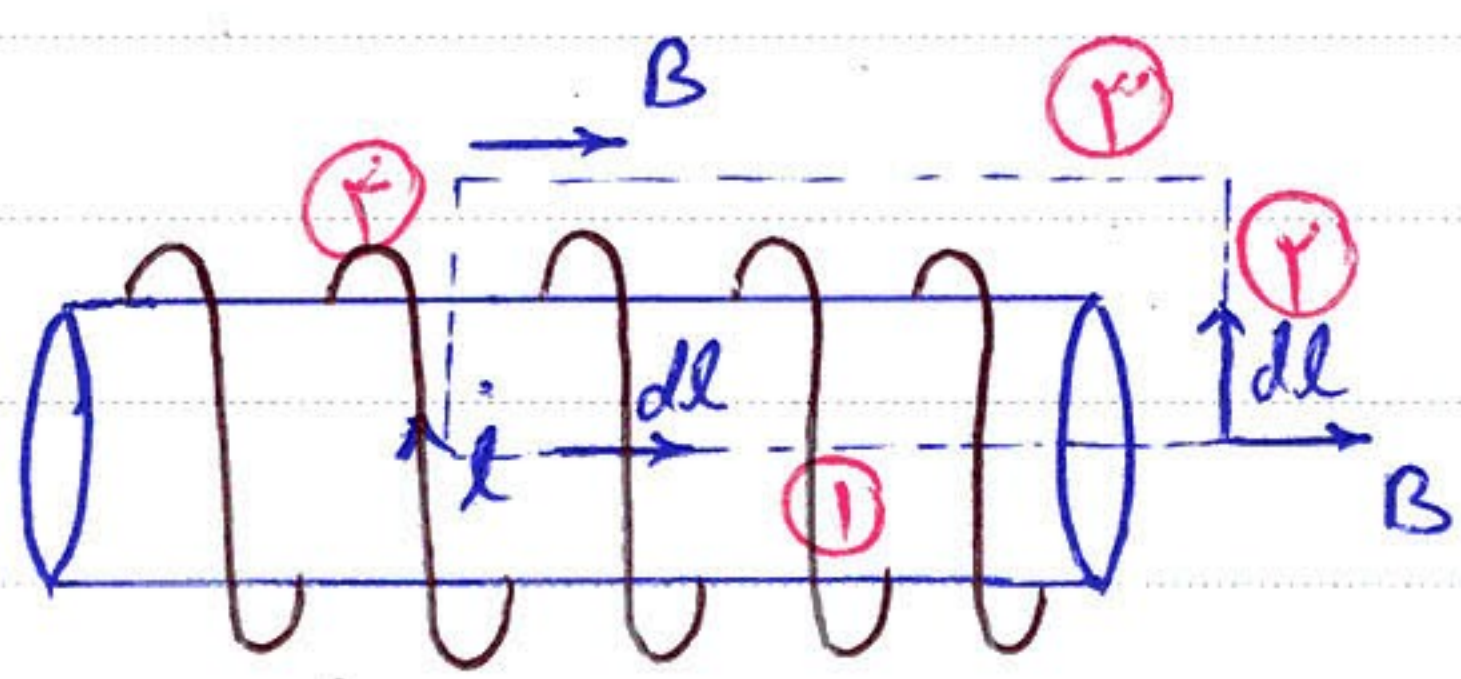
$$\rightarrow i = \frac{\lambda c}{3} (b^3 - a^3)$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 \frac{\lambda c}{3} (b^3 - a^3)}{2\pi r}$$



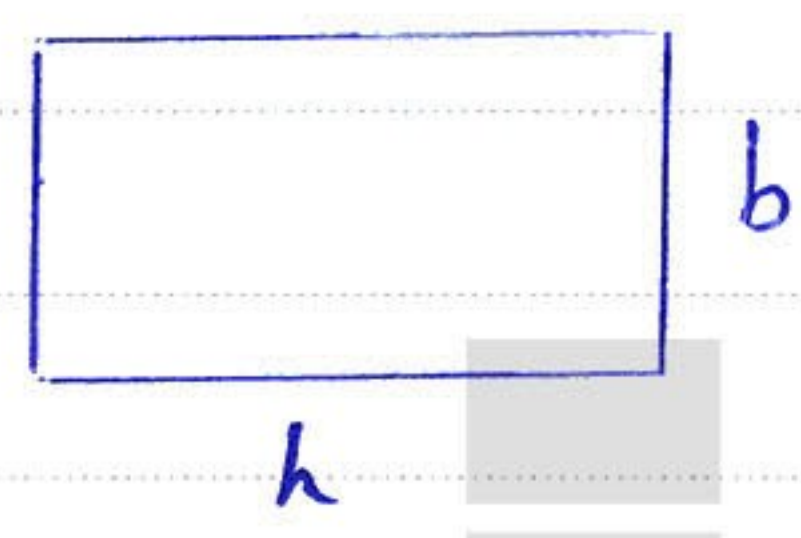
$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 c}{3r} (b^3 - a^3)$$

میدان مغناطیسی سیم لوله



طول سیم لوله بلند است و از اثرات لبه‌ها صرف نظر می‌کنیم.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} \rightarrow \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{B \cdot dl \cos 90^\circ = 0}$$



چون خارج مسلوله میدان مغناطیسی است.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B dl \cos(0) = B \int dl = Bh$$

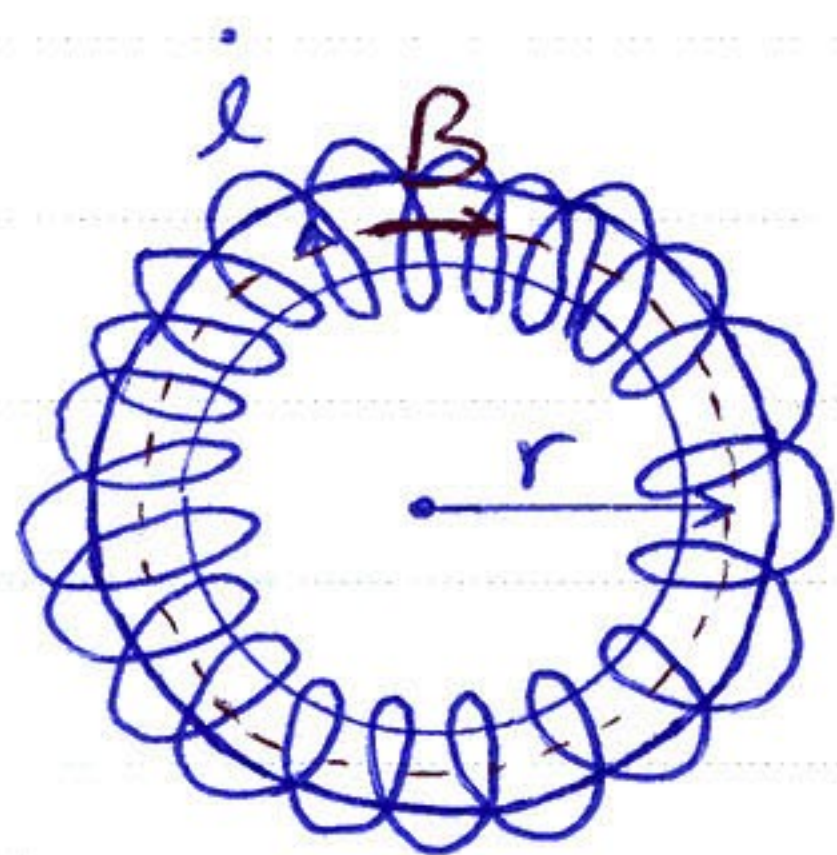


تعداد دور سیم مسلوله نسبت به $n = \frac{l}{N} h \rightarrow$

$n = \frac{l}{N}$ تعداد دور در واحد طول $\rightarrow \alpha = nh$

$$\Rightarrow Bh = \mu_0 i nh \rightarrow \boxed{B = \mu_0 n i}$$

میدان مغناطیسی سیم لوله



میدان مغناطیسی جنبه

مسیر بسته ای نه انتخاب می کنیم چنانچه میدان

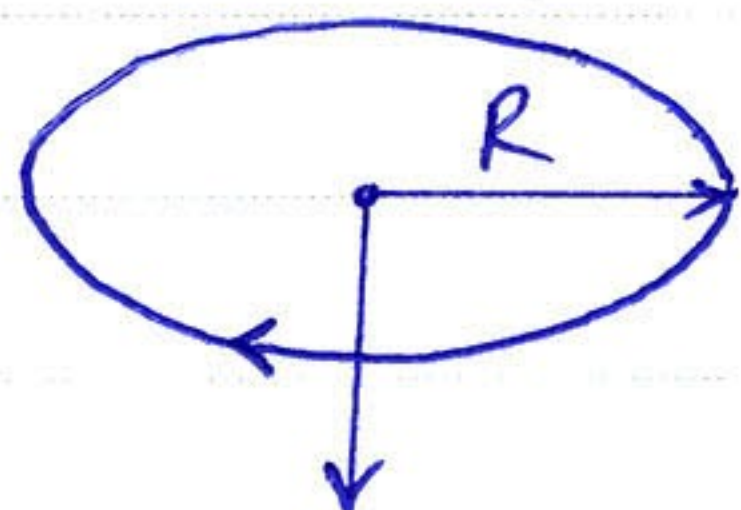
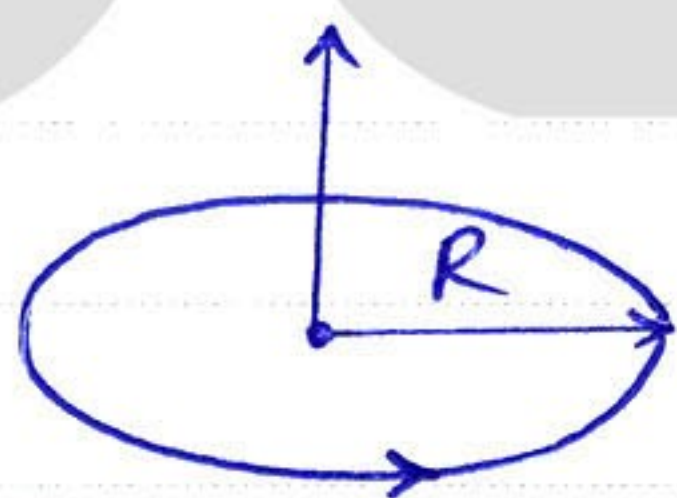
هم بسته است.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} \rightarrow \int B dl \cos(0) = \mu_0 i_{enc}$$

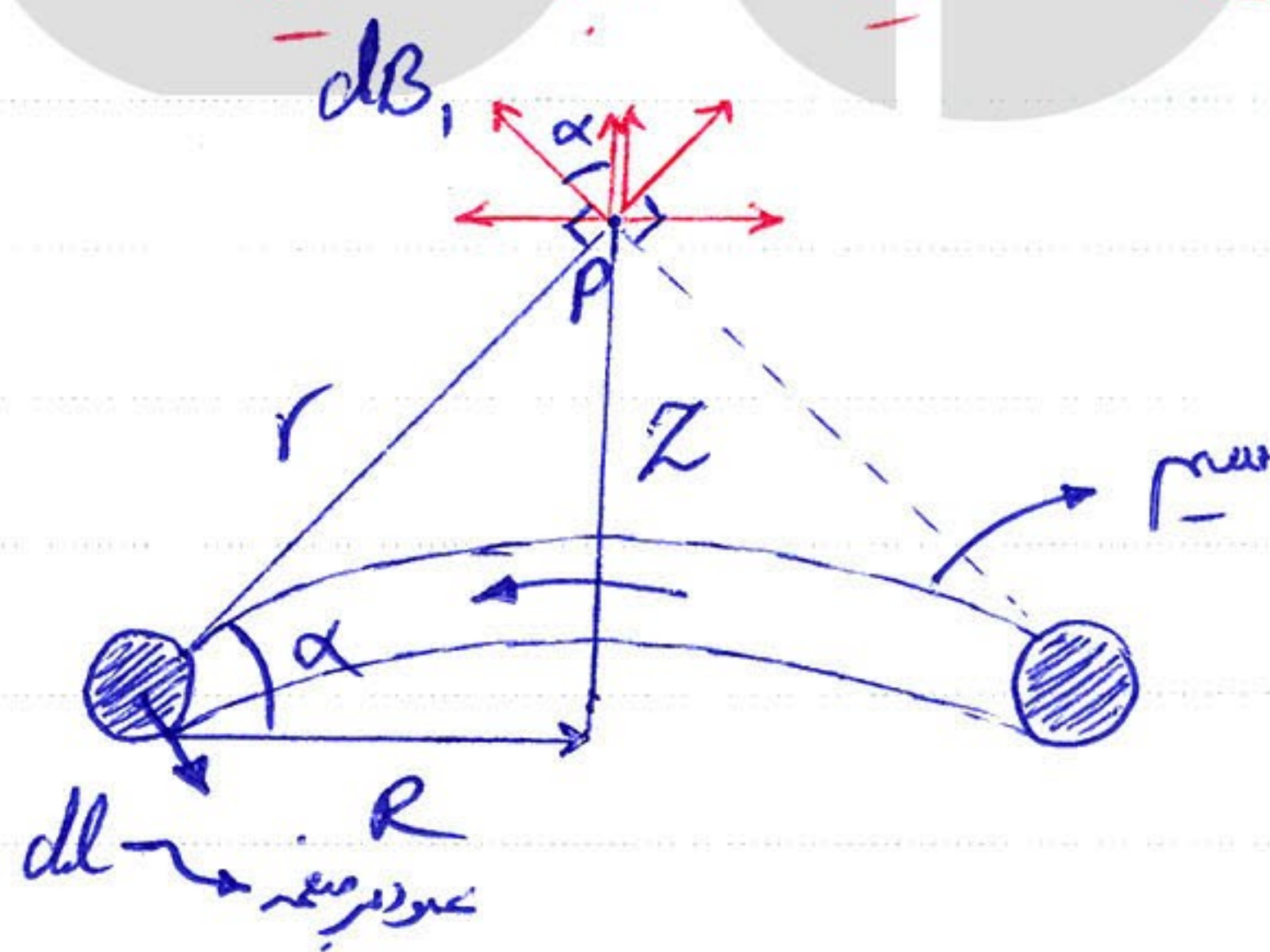
$$B \int dl = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 N i \quad \text{نقدار دور مسیم}$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 N i \rightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

میدان دو قطبی مغناطیسی $\rightarrow |\vec{\mu}| = N i A$



میدان مغناطیسی دو قطبی مغناطیسی



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \times \frac{dl \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \times \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

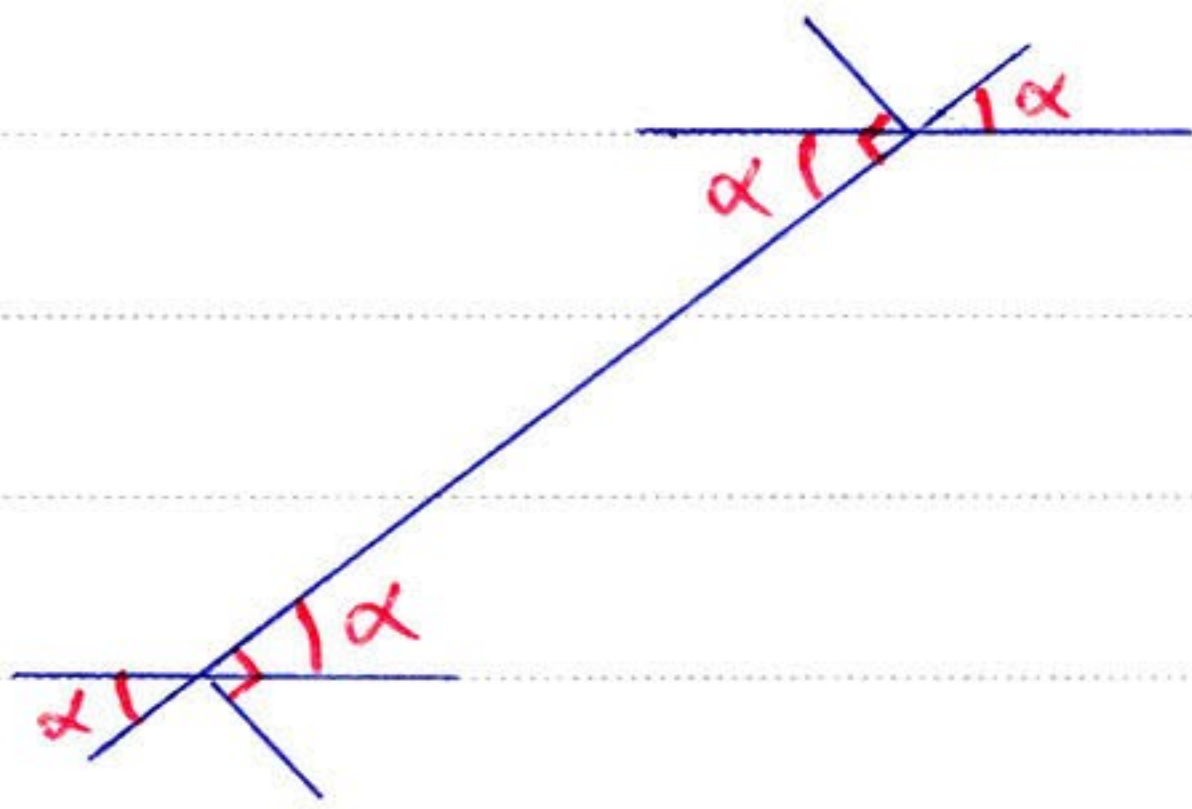
مسیر به شکل دایره است.

$$dl = R d\theta$$

$$r = \sqrt{R^2 + Z^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 i R d\theta \sin\theta}{r^2 (R^2 + Z^2)}$$

مولفه های x و y را حقیقی می‌کنیم و مولفه های z را با هم جمع می‌کنیم

$$dB_y = dB \cos\alpha$$



$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z^2}}$$

$$B_y = \int dB_y = \int \frac{\mu_0 i}{r^2} \times \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{r^2} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \int d\theta$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i R^2 \pi}{r^2 (R^2 + Z^2)^{3/2}}$$

تقریب میان دورهای

$$\rightarrow Z \gg R \rightarrow B = \frac{\mu_0 i R^2}{r^2 Z^3} = \frac{\mu_0 i \pi R^2}{r^2 Z^3} = \frac{\mu_0 i A}{r^2 Z^3}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \vec{M}}{r^2 Z^3}$$



دانشجوی خوب
حامی محیط زیست