مقدمه

جزوه حاضر به منظور دوره کلی و مرور جامع مطالب اصلی درس معادلات دیفرانسیل آماده شده است.

از آنجاکه هدف این مجموعه ایجاد توانایی برای پاسخگویی به بیش از ۸۰٪ سوالات مطرح شده در آزمون این درس می‌باشد، پیشنهاد می‌شود:

در درس معادلات به مباحث زیر کاملاً مسلط باشید.

۱. **بازنویسی کردن یک معادله دیفرانسیل با یک تغییر متغیر یا یک تغییر در تابع داده شده**

۲. **در بحث معادلات مرتبه دوم و مراتب بالاتر (به طور متوسط ۳۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ یافتن پایه‌های جواب معادلات همگن با ضرایب ثابت و کوشی

ب ـ یافتن جواب خصوصی معادلات غیرهمگن با روش ضرایب نامعین و اپراتورهای معکوس

ج ـ یافتن یک پایه جواب از روی پایه جواب دیگر

د ـ روش‌های کاهش مرتبه

۳. **در بحث تبدیل لاپلاس (به طور متوسط ۳۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ محاسبه انتگرال‌های ناسره با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس

ب ـ حل معادلات دیفرانسیل غیر همگن که در طرف ثانی یکی از موارد زیر وجود دارد:

توابع چند ضابطه‌ای (شامل تابع پله واحد)، توابع شامل دلتای دیراک، تابع مجهول $f(t)$

ج ـ محاسبه لاپلاس معکوس توابع کسری با تأکید بر روش تجزیه کسرها و احتمالاً استفاده از فرم معکوس قضایای اول و دوم انتقال

د ـ محاسبه تبدیل لاپلاس توابعی به فرم $u_a(t)f(t)$, $e^{at}f(t)$, $\frac{1}{t}f(t)$, $tf(t)$ وقتی تبدیل لاپلاس $f(t)$ معلوم است.

هـ ـ قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع به خصوص در حل معادلات انتگرالی

و ـ تبدیل لاپلاس توابع نیمه متناوب

۴. **در بحث معادلات مرتبه اول (به طور متوسط ۲۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ معادلات قابل تبدیل به معادلات جدایی‌پذیر

ب- معادلات کامل و بحث عامل انتگرال‌ساز

ج ـ معادله مرتبه اول خطی و برنولی

د ـ یافتن مسیرهای قائم در فرم دکارتی و قطبی

هـ ـ یافتن جواب غیرعادی معادله کلرو (پوش جواب عمومی)

۵. **در حل معادلات دیفرانسیل با روش سری‌های توانی (به طور متوسط ۲۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ تعیین نوع یک نقطه از نظر عادی ـ غیرعادی منظم و نامنظم

ب ـ تعیین شعاع همگرایی جواب

ج ـ یافتن ضرایب بسط تیلور جواب حول نقطه عادی

د ـ روش فروبینیوس و یافتن ریشه‌های معادله مشخصه حول نقطه غیر عادی منظم

هـ ـ انتگرال‌های شامل توابع لژاندر و بسل

ارادتمند شما

محمدصادق معتقدی

قضیه :

چنانچه $c_1 , c_2 , \dots , c_n$ ثابت‌هایی اختیاری و $y_1 , y_2 , \dots , y_n$ و نیز f توابعی معلوم از x باشند، معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های $c_1 , c_2 ,\dots, c_n$ در دسته توابع : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + f$

از بسط دترمینان زیر قابل حصول است:

$$\begin{vmatrix} (y-f) & (y-f)' & \dots & (y-f)^{(n)} \\ y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y'_n & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

مثال : معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت های A , B در دسته توابع زیر را بیابید .

$$\mathbf{y = A e^{4x} + B e^{-x} + 4 \cos x}$$

حل :

مطابق قضیه گفته شده:

$$y_1 = e^{4x} \qquad y_2 = e^{-x} \qquad f = 4 \cos x$$

لذا معادله مورد نظر چنین حاصل می شود:

$$\begin{vmatrix} y - 4\cos x & y' + 4\sin x & y'' + 4\cos x \\ e^{4x} & 4e^{4x} & 16e^{4x} \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad e^{4x} e^{-x} \begin{vmatrix} y - 4\cos x & y' + 4\sin x & y'' + 4\cos x \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to$$

$$(y - 4\cos x)(4+16) - (y' + 4\sin x)(1-16) + (y'' + 4\cos x)(-1-4) = 0 \quad \to \quad y'' - 3y' - 4y - 12\sin x + 20\cos x = 0$$

چند نکته اولیه

۱) گاهی برای حل یک معادله دیفرانسیل تنها نیاز به انتگرال‌گیری متوالی خواهد بود، به خصوص در معادلاتی به فرم :

$$A(x)dx = B(y)\,dy$$

انتگرال‌گیری از طرفین معادله جواب عمومی معادله را نشان خواهد داد.

مثال : در معادله انتگرالی $f(x) = e^{-\int_0^x t^2 f(t)\,dt}$ مطلوبست محاسبه $f(2)$.

حل : با $\ln$گیری از طرفین معادله بدست می آوریم :

$$\ln f(x) = -\int_0^x t^2 f(t)\,dt \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -x^2 f(x) \quad \to \quad \frac{-df}{f^2(x)} = x^2\,dx \xrightarrow{\int} \frac{1}{f(x)} = \frac{x^3}{3} + c$$

اگر به فرض مسئله در $x = 0$ نگاه کنیم ، بدست می آید :

$$f(0) = e^{-\int_0^0 \ldots\ldots} = e^0 = 1$$

با اعمال این شرط در جواب معادله به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\underbrace{\cancel{f(0)}}_{1}} = \frac{0^3}{3} + c \quad \rightarrow \quad c = 1$$

پس داریم:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{x^3}{3} + 1} \quad \rightarrow \quad f(2) = \frac{3}{11}$$

۲) بسیاری مواقع برای پاسخ به سوال یک معادله دیفرانسیل نیازی به حل معادله نیست و خواسته مورد نظر را می‌توان از المان های موجود در مسئله پیدا کرد.

مثال : معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x^3 y + 4y^5}$ مفروض است. اگر بدانیم در $x = 0$ داریم $y = 0$، مطلوبست محاسبه: $I = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{y^2}$

حل : مطابق فرض مسئله برای $x = 0$ داریم : $y = 0$، لذا انتظار داریم:

وقتی $x \to 0 \quad : \quad y \to 0$

پس داریم:

$$I = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2}{y^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}}$$

$$I = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2x}{2y \frac{dy}{dx}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{\frac{x}{3x^3 y + 4y^5} \cdot y} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} 3x^3 + 4y^4 = 0$$

۳) گاهی لازم می‌شود یک معادله دیفرانسیل را با تغییر متغیر یا تغییر تابع بازنویسی کنیم. برای این منظور باید مشتقات موجود در معادله را بازنویسی کرده و در داخل معادله اصلی قرار دهیم .

مثال : معادله دیفرانسیل $x^2\, y y'' = (x y' + y)^2$ مفروض است. اگر این معادله را با فرض $y(x) = e^{\int u(x)\, dx}$ بازنویسی کنیم ،به چه معادله‌ای می‌رسیم؟

حل :

$$y = e^{\int u(x)\, dx} \quad \rightarrow \quad y' = u(x) \,.\, e^{\int u(x)\, dx} \quad \rightarrow \quad y'' = u'(x)\, e^{\int u(x)\, dx} + u(x) \,.\, u(x)\, e^{\int u(x)\, dx}$$

این عبارات را در معادله اصلی قرار می دهیم :

$$x^2 \,.\, e^{\int u} \left(u' e^{\int u} + u^2 e^{\int u} \right) = \left(x\, u\, e^{\int u} + e^{\int u} \right)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 \left(u' + u^2 \right) = (x u + 1)^2 \quad \rightarrow$$

$$x^2 u' + \cancel{x^2 u^2} = \cancel{x^2 u^2} + 2xu + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 u' = 2xu + 1$$

مثال : معادله دیفرانسیل $2x^3y' + x^4y'' - y = 0$ مفروض است. اگر این معادله را با فرض $x = \frac{1}{t}$ بازنویسی کنیم ، به چه معادله ای می‌رسیم؟

حل :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{-1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} + \frac{-1}{x^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

این عبارات را در معادله اصلی می‌گذاریم:

$$2x^3\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + x^4\left(\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y = 0 \quad \to \quad \frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

تعریف تبدیل لاپلاس

$$L\big(f(t)\big)=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,.\,f(t)\,dt$$ (با شرط $s>0$)

هرگاه a عددی ثابت باشد داریم:

$f(t)$	a	e^{at}	$\sin at$	$\cos at$	$\sinh at$	$\cosh at$	t^a
$F(s)$	$\frac{a}{s}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$

$$L\big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)=\alpha F(s)+\beta G(s)$$

یادآوری تابع گاما:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} e^{-x}\,.\,x^{a-1}\,dx$$ (با شرط $a>0$)

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\ \xrightarrow{\text{اگر } \alpha\in\mathbb{N}}\ \Gamma(\alpha+1)=\alpha!$$

۱) محاسبه انتگرال‌هایی در فرم $\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ با استفاده از فرمول تعریف تبدیل لاپلاس و تابع گاما:

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

۱) $$\mathbf{I=\int_0^{\infty} e^{-4t}\cos^2 t\,dt}$$

حل : طبق فرمول تبدیل لاپلاس:

$$L\big(f(t)\big)=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,.\,f(t)\,dt$$

$$I=\left\{L\left(\cos^2 t\right)\right\}\Big|_{s=4}=\left\{L\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\right\}\Big|_{s=4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)\Big|_{s=4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{20}\right)$$

$$۲)\ I = \int_0^\infty t^2 e^{-4\sqrt{t}}\, dt$$

حل : با تغییر متغیر $\sqrt{t} = u$ داریم:

$$\rightarrow \quad t = u^2 \rightarrow dt = 2u\, du$$

$$\begin{cases} t = 0 & \rightarrow \quad u = 0 \\ t = \infty & \rightarrow \quad \infty = u \end{cases} \quad \rightarrow \quad I = \int_0^\infty \left(u^2\right)^2 e^{-4u} (2u\,du)$$

$$= 2\int_0^\infty u^5 e^{-4u}\, du = 2\left(L\left(u^5\right)\right)\Big|_{s=4} = 2\left(\frac{5!}{s^6}\right)\Big|_{s=4} = 2\,\frac{5!}{4^6}$$

مثال : مطلوبست حاصل انتکرال:

$$I = \int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-t^2}\, dt$$

حل : با تغییر متغیر $t^2 = u$ داریم:

$$2\,t\,dt = du \quad \rightarrow \quad dt = \frac{du}{2t} = \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{cases} t = 0 & \rightarrow \quad u = 0 \\ t = \infty & \rightarrow \quad \infty = u \end{cases} \xrightarrow{\text{می‌توان نوشت}}$$

$$I = \int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-u} \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{4}}\, du = \frac{1}{2}\left\{L\left(u^{-\frac{1}{4}}\right)\right\}\Big|_{s=1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{4}+1\right)}{s^{-\frac{1}{4}+1}}\Big|_{s=1} = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1^{\frac{3}{4}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2}$$

مثال : لاپلاس معکوس تابع $\mathbf{F(s) = \dfrac{7s^{\frac{3}{2}} - 4s^2}{s^9}}$ را بیابید.

حل : داریم:

$$F(s) = \frac{7}{s^{\frac{15}{2}}} - \frac{4}{s^7} = 7\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)}{s^{\frac{15}{2}}} - 4\,\frac{1}{6!}\times\frac{6!}{s^7} \xrightarrow{L^{-1}} f(t) = \frac{7}{\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)}\, t^{\frac{13}{2}} - \frac{4}{6!}\, t^6$$

و البته :

$$\Gamma\left(\frac{15}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{13}{2}+1\right) = \frac{13}{2}\,\Gamma\left(\frac{13}{2}\right) = \ldots\ldots = \frac{13}{2}\,\frac{11}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\underbrace{\Gamma\left(\cancel{\frac{1}{2}}\right)}_{\sqrt{\pi}}$$

۲) استفاده از روش تفکیک کسرها برای محاسبه لاپلاس معکوس توابع کسری

مثال : مطلوبست محاسبه لاپلاس معکوس تابع زیر:

$$\mathbf{F(s)} = \frac{3\mathbf{s}^2+7}{(\mathbf{s}-1)(\mathbf{s}^2+4)}$$

حل : از روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{3s^2+7}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+4)} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}$$

$$= \frac{A(s^2+4)+(Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{(A+B)s^2+(-B+C)s+(4A-C)}{(s-1)(s^2+4)}$$

با متحد قرار دادن صورت کسرها داریم:

$$\rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -B+C=0 \\ 4A-C=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{s+1}{s^2+4} = \frac{2}{s-1} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} \rightarrow f(t) = 2e^{1t} + \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$$

مثال : در لاپلاس معکوس تابع $F(s) = \frac{s^2+4s+9}{(s-3)(s+1)(s-2)}$ ضریب جمله e^{2t} چه خواهد شد.

حل : مطابق روش تجزیه کسرها داریم:

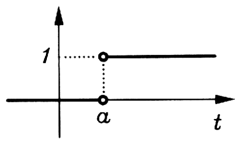
$$\frac{s^2+4s+9}{(s-3)(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} f(t) = A e^{3t} + B e^{-t} + \underbrace{C e^{2t}}_{\text{هدف ما محاسبه } C \text{ است}}$$

اگر طرفین رابطه فوق را در $s-2$ ضرب کنیم و به حاصل کار در $s=2$ تماشا کنیم، بدست می آوریم :

$$\frac{(2)^2+4(2)+9}{(2-3)(2+1)} = A(0) + B(0) + C \rightarrow C = \frac{21}{-3} = -7$$

الف) یادآوری تابع پله واحد:



$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

$$*L\left(u_a(t)\right) = \frac{e^{-as}}{s}$$

نوشتن توابع با رفتار تغییرات خطی برحسب پله واحد:

در توابعی که رفتار تغییرات خطی دارند به طوری‌که در هر قسمت شیب‌ها تغییر می‌کند و احتمالاً در نقاطی خاص پرش‌هایی نیز داریم با استفاده از دو جمله زیر می‌توان رفتار این توابع را برحسب تابع پله نوشته و سپس لاپلاسشان را پیدا کرد.

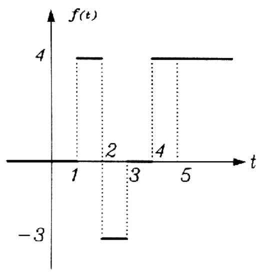
۱) هرگاه در $t = c$ پرشی به اندازه k واحد داشتیم جمله $k u_C(t)$ اضافه می‌کنیم.

۲) هرگاه در $t = c$ شیب نسبت به حالت قبل به اندازه m واحد اضافه شد جمله $m(t-c)u_c(t)$ اضافه می‌کنیم:

البته بدیهی است که:

$$L\left(u_c(t)\right) = \frac{e^{-cs}}{s} \qquad , \qquad L\left((t-c)u_c(t)\right) = \frac{e^{-cs}}{s^2}$$

مثال : تبدیل لاپلاس نشان داده شده در شکل زیر را پیدا کنید.



می‌توان نوشت:

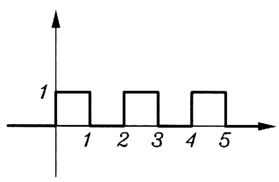
$$f(t) = 4u_1(t) - 7u_2(t) + 3u_3(t) + 4u_4(t) \quad \rightarrow \quad F(s) = 4\frac{e^{-1s}}{s} - 7\frac{e^{-2s}}{s} + 3\frac{e^{-3s}}{s} + 4\frac{e^{-4s}}{s}$$

مثال : لاپلاس معکوس $F(s) = \dfrac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)}$ چگونه تابعی است؟

۱) یک موج مربعی بالای محور زمان
۲) یک موج مربعی بالا و پایین محور زمان
۳) یک موج پلکانی
۴) یک موج مثلثی

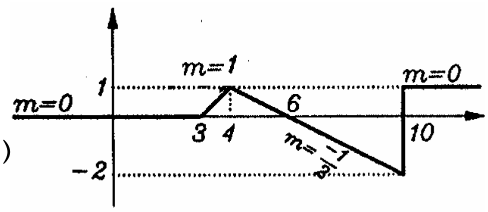
$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+e^{-s}} = \frac{1}{s}\left\{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \ldots\right\} = \frac{e^{-0s}}{s} - \frac{e^{-1s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \ldots$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \quad f(t) = u_0(t) - u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) + \ldots$$



مثال : تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

۱)



حل : با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$f(t)=1(t-3)\,u_3(t)-\frac{3}{2}(t-4)\,u_4(t)+\frac{1}{2}(t-10)\,u_{10}(t)+3u_{10}(t)$$

و با لاپلاس گیری از رابطه مذکور بدست می آوریم :

$$F(s)=1\,\frac{e^{-3s}}{s^2}-\frac{3}{2}\,\frac{e^{-4s}}{s^2}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{-10s}}{s^2}+\frac{3e^{-10s}}{s}$$

$$۲)\ \mathbf{f(t)}\begin{cases}0 & \mathbf{t}<2\\ 4\mathbf{t}-9 & 2<\mathbf{t}<3\\ -\mathbf{t}+1 & \mathbf{t}>3\end{cases}$$

حل : شیب هر قسمت ضریب t می‌باشد .برای مشخص کردن پرش‌ها می‌نویسیم:

$$f\left(2^-\right)=0 \qquad , \qquad f\left(2^+\right)=4(2)-9=-1$$

$$f\left(3^-\right)=4(3)-9=3 \qquad , \qquad f\left(3^+\right)=-3+1=-2$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(t)=4(t-2)\,u_2(t)-u_2(t)-5(t-3)\,u_3(t)-5\,u_3(t)$$

و با لاپلاس گیری از رابطه مذکور بدست می آوریم :

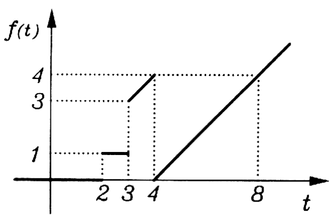
$$F(s)=\frac{4\,e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{5\,e^{-3s}}{s^2}-\frac{5\,e^{-3s}}{s}$$

مثال : هرگاه $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s}+\dfrac{e^{-3s}}{s^2}+\dfrac{2\,e^{-3s}}{s}-\dfrac{4\,e^{-4s}}{s}$ باشد. نمودار $f(t)$ چگونه است؟

حل : داریم:

$$f(t)=u_2(t)+(t-3)\,u_3(t)+2u_3(t)-4u_4(t)$$

می‌توان دید:



ب) یادآوری تابع دلتای دیراک:

$$\lim_{b\to 0}\frac{1}{b}\left(u_a(t)-u_{a+b}(t)\right)=\delta_a(t)=\delta(t-a)=\begin{cases}0 & t\neq a\\ \infty & t=a\end{cases}$$

خاصیت غربالی تابع دلتا : $\displaystyle\int_{\text{در هر بازهٔ شامل } t=a}\delta_a(t)f(t)dt=f(a)$

یافتن تبدیل لاپلاس توابعی که دارای تابع دلتای دیراک هستند:

$$L\left(\delta_a(t)f(t)\right)=e^{-as}f(a)$$

مثال : تبدیل لاپلاس تابع زیر را به‌دست آورید:

$$f(t)=\delta_2(t)\left(t^2+3t\right)$$

حل : طبق فرمول داریم:

$$F(s)=e^{-2s}\left\{(2)^2+3(2)\right\}=10\,e^{-2s}$$

✓ قضایائی در تبدیل لاپلاس

با فرض آن که لاپلاس $f(t)$ را $F(s)$ بنامیم.

قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی

در صورت موجود بودن حدهای سمت چپ:

مقدار اولیه : $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

مقدار نهایی : $\displaystyle\lim_{t\to \infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

مثال : فرض کنید :

$$F(s)=\frac{e^{-5s}}{s^2+s+20}+\frac{4}{s}\qquad,\qquad G(s)=\ln\left(1-\frac{7}{s}\right)$$

مطلوبست محاسبه $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)$ و $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)$:

حل : طبق قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{se^{-5s}}{s^2+s+20}+\frac{4s}{s}=0+4=4$$

طبق قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{t\to 0}g(t)=\lim_{s\to\infty}sG(s)=\lim_{s\to 0}s\ln\left(1-\frac{7}{s}\right)=\infty\times 0\quad (\text{مبهم})$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{7}{s}\right)}{\frac{1}{s}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} = \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{\frac{7}{s^2}}{1-\frac{7}{s}}}{-\frac{1}{s^2}} = \lim_{s\to\infty} \frac{-7}{1-\frac{7}{s}} = -7$$

۲) قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع

$$L\left(f'(t)\right) = sF(s) - f(0)$$

$$L\left(f''(t)\right) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L\left(f'''(t)\right) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

از اینجا می‌توان نشان داد:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$f'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 F(s) - sf(0)$$

$$f''(0) = \lim_{s\to\infty} s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0)$$

مثال : اگر $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt$ باشد ، آن‌گاه تبدیل لاپلاس $f(x)$ را بیابید .

حل :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} e^{-x}$$

ازآنجاکه:

$$L\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = L\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \rightarrow L\left(f'(x)\right) = L\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} e^{-x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right)\Bigg|_{s\to s+1} = \frac{1}{\sqrt{s+1}}$$

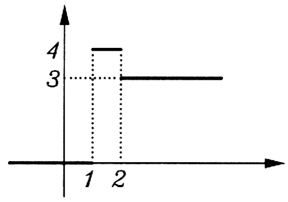
و چون $f(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{0}} e^{-t^2}\,dt = 0$ می‌توان نوشت:

$$L\left(f'(x)\right) = sL\left(f(x)\right) - f(0) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{s+1}} = sF(s) - 0 \rightarrow F(s) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

مثال : تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را پیدا کنید.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 4 & 1<t<2 \\ 3 & t>2 \end{cases} \\ y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

حل : ابتدا با ترسیم شکل معادله $f(t)$ داریم:



$$f(t) = 4u_1(t) - u_2(t)$$

(اگر $L\left(y(t)\right) = Y(s)$ بنامیم)

از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$L(y'') + L(3y') + L(2y) = L\left(f(t)\right) \quad \to$$

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{4e^{-1s}}{s} - \frac{1e^{-2s}}{s} \quad \to$$

$$\left(\left(s^2 + 3s + 2\right)Y(s)\right) - 3 = \frac{4e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \quad \to \quad Y(s) = \left(\frac{4e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + 3\right)\frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

مثال : فرض کنید $F(s) = \dfrac{2s-1}{s^2 - s + 7}$ باشد مطلوبست $f'(0)$.

حل :

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^2 - s}{s^2 - s + 7} = 2$$

$$f'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 F(s) - sf(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^3 - s^2}{s^2 - s + 7} - 2s = \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{2s^3} - s^2 - \cancel{2s^3} + 2s^2 - 14s}{s^2 - s + 7} = 1$$

مثال : بین توابع بسل رابطه $\dfrac{d}{dt}\left(t^{-\alpha} J_\alpha(t)\right) = -t^{-\alpha} J_{\alpha+1}(t)$ برقرار است چنانچه بدانیم $L\left(J_0(t)\right)$ برابر $\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ بوده و $J_0(0) = 1$ می‌باشد، لاپلاس $J_1(t)$ را بیابید .

حل :
$$\xrightarrow{\alpha = 0} \quad \frac{d}{dt}\left(t^{-0} J_0(t)\right) = -t^{-0} J_1(t) \quad \to \quad \frac{d}{dt}\left(J_0(t)\right) = -J_1(t)$$

حالا می‌نویسیم:

$$L\left(J_1(t)\right) = L\left(-J_0'(t)\right) = -L\left(J_0'(t)\right) = -\left\{s\,L\left(J_0(t)\right) - J_0(0)\right\} = -\left(s\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} - 1\right)$$

۳) قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال‌های یک تابع

$$L\left(\int_0^t f(t)\,dt\right) = \frac{1}{s}F(s) \quad \to \quad L^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right) = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$L\left(\int_0^t\int_0^t f(t)\,dt\,dt\right) = \frac{1}{s^2}F(s) \quad \to \quad L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}F(s)\right) = \int_0^t\int_0^t f(t)\,dt\,dt$$

مثال : تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$F(s)=\frac{3}{s^2\left(s^2+9\right)}$$

حل :

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s+9}\right)=\sin 3t \quad\rightarrow\quad L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\cdot\frac{3}{s^2+9}\right)=\int_0^t\int_0^t \sin 3t\,dt\,dt=\int_0^t -\frac{1}{3}\cos 3t\Big|_0^t\,dt$$

$$=\int_0^t\left(-\frac{1}{3}\cos 3t+\frac{1}{3}\right)dt=\left(-\frac{1}{9}\sin 3t+\frac{1}{3}t\right)\Bigg|_0^t=-\frac{1}{9}\sin 3t+\frac{1}{3}t$$

۴) قضیه اول انتقال

$$L\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a)\quad\rightarrow\quad L^{-1}\left(F(s-a)\right)=e^{at}f(t)$$

مثال : اگر $L\left(f(t)\right)=F(s)$ باشد لاپلاس تابع زیر را بیابید:

$$\mathbf{y(t)=e^{4t}\int_0^t e^{-3u}f(u)\,du}$$

حل :

$$L\left(e^{-3u}f(u)\right)=F(s)\Big|_{s\to s+3}=F(s+3)\quad\rightarrow\quad L\left\{\int_0^t e^{-3u}f(u)\,du\right\}=\frac{1}{s}F(s+3)$$

$$\rightarrow\quad L\left\{e^{4t}\int_0^t e^{-3u}f(u)\,du\right\}=\left(\frac{1}{s}F(s+3)\right)\Bigg|_{s\to s-4}=\frac{1}{s-4}F(s-1)$$

مثال : لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$\mathbf{f(t)=t^4\cosh 3t}$$

حل :

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(t^4e^{3t}+t^4e^{-3t}\right)\xrightarrow{L}F(s)=\frac{1}{2}\left\{\frac{4!}{s^5}\Big|_{s\to s-3}+\frac{4!}{s^5}\Big|_{s\to s+3}\right\}=\frac{12}{(s-3)^5}+\frac{12}{(s+3)^5}$$

مثال : لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$\text{۱)}\ \mathbf{F(s)=\frac{4s-1}{s^2+2s+17}}$$

حل : از آنجایی که مخرج کسر قابل تجزیه به عوامل درجه اول حقیقی نمی‌باشد $\Delta<0$ با ایجاد مربع کامل در مخرج می‌نویسیم:

$$F(s)=\frac{4s-1}{(s+1)^2+16}=\frac{4(s+1)-5}{(s+1)^2+16}=4\,\frac{(s+1)}{(s+1)^2+16}-5\,\frac{1}{4}\,\frac{4}{(s+1)^2+16}\xrightarrow{L^{-1}}$$

$$f(t)=4\,.\,e^{-1t}\,.\cos 4t-\frac{5}{4}e^{-1t}\,.\sin 4t$$

۲) $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{9s-1}}$

حل :

$$F(s)=\frac{1}{3}\frac{1}{\left(s-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(s-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}\xrightarrow{L^{-1}} f(t)=\frac{1}{3}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.e^{\frac{1}{3}t}.t^{-\frac{1}{2}}$$

۳) $F(s)=\dfrac{2}{s^3+2s^2+2s}$

حل :

$$F(s)=\frac{2}{s\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{2}{s}\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

ازآنجاکه:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)=e^{-t}\sin t \quad\rightarrow\quad f(t)=L^{-1}\left(\frac{2}{s}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)=2\int_0^t e^{-t}\sin t\,dt$$

انتگرال		مشتق
$\sin t$	$\searrow^{+}$	e^{-t}
$-\cos t$	$\searrow^{-}$	$-e^{-t}$
$-\sin t$	$\overset{+}{\int}\rightarrow$	e^{-t}

$$\int e^{-t}\sin t\,dt=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t-\int e^{-t}\sin t\,dt \quad\rightarrow\quad 2\int e^{-t}\sin t\,dt=-e^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)$$

پس داریم:

$$f(t)=-\left(e^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)-1\right)=1-e^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)$$

راه دیگر:

$$F(s)=\frac{2}{s\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}=\frac{(A+B)s^2+(2A+C)s+2A}{s\left(s^2+2s+2\right)}\quad\rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=0\\2A+C=0\\2A=2\end{array}\right\}\quad\rightarrow\quad A=1,B=-1,C=-2$$

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{s^2+2s+2}=\frac{1}{s}-\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1}\quad\rightarrow$$

$$f(t)=1-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=1-e^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)$$

۵) قضیه دوم انتقال

$$L\left(u_c(t)\,f(t-c)\right)=e^{-cs}\,F(s)\rightarrow L^{-1}\left(e^{-cs}\,F(s)\right)=u_c(t)\,f(t-c)$$

$$L\left(u_c(t)\,f(t)\right)=e^{-cs}\,.\,L\left(f(t+c)\right)$$

مثال : تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $\mathbf{f(t)=u_{\frac{\pi}{3}}(t)\sin\left(4t-\frac{\pi}{2}\right)}$

حل :

$$F(s)=e^{-\frac{\pi}{3}s}\,L\left\{\sin\left(4\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=e^{-\frac{\pi}{3}S}\,.L\left\{\sin\left(4t+\frac{5\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=e^{-\frac{\pi}{3}s}\,.\,L\left(\sin 4t\cos\frac{5\pi}{6}+\cos 4t\,.\,\sin\frac{5\pi}{6}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}S}\,.\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{s^2+16}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+16}\right\}$$

۲) $\mathbf{f(t)=u_3(t)\,e^{-2t}\left(t^2+3t\right)}$

حل :

$$F(s)=e^{-3s}\,.\,L\left\{e^{-2(t+3)}\left((t+3)^2+3(t+3)\right)\right\}=e^{-3s}\,.\,L\left\{e^{-2t}\,.\,e^{-6}\left(t^2+9t+18\right)\right\}$$

$$=e^{-3s}\,e^{-6}\,.\left\{L\left(t^2+9t+18\right)\right\}_{s\rightarrow s+2}=e^{-3s}\,e^{-6}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{9}{s^2}+\frac{18}{s}\right)\Bigg|_{s\rightarrow s+2}$$

$$=e^{-3s}\,e^{-6}\left(\frac{2}{(s+2)^3}+\frac{9}{(s+2)^2}+\frac{18}{(s+2)}\right)$$

۳) $\mathbf{f(t)=u_{\pi}(t)\,(2t+1)\,e^{t-\pi}\sin t}$

حل : بنابر قضیهٔ دوم انتقال داریم:

$$F(s)=e^{-\pi s}\,.\,L\left\{2\left((t+\pi)+1\right)e^{t+\pi-\pi}\sin(t+\pi)\right\}=e^{-\pi s}\,.\,L\left\{(2t+2\pi+1)\,e^{t}\,(-\sin t)\right\}$$

و بنابر قضیه اول انتقال بدست می آوریم :

$$F(s)=-\,e^{-\pi s}\,.\,L\left\{e^{t}\left(2t\sin t+(2\pi+1)\sin t\right)\right\}=-\,e^{-\pi s}\left\{-2\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'+(2\pi+1)\frac{1}{s^2+1}\right\}_{s\rightarrow s-1}$$

$$=-\,e^{-\pi s}\left\{-2\,\frac{-2s}{\left(s^2+1\right)^2}+\frac{2\pi+1}{s^2+1}\right\}_{s\rightarrow s-1}=....$$

مثال : لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید.

$$\mathbf{F(s)=\frac{e^{-4s}}{s^2(s-3)}}$$

حل : می‌دانیم:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-3}\right)=\int_0^t\int_0^t e^{3t}\,dt\,.\,dt=\int_0^t\left(\frac{1}{3}e^{3t}\right)\Big|_0^t dt$$

$$=\int_0^t\left(\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}\right)dt=\left(\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}t\right)\Big|_0^t=\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}$$

پس می‌گوییم:

$$\rightarrow\quad L^{-1}\left(e^{-4s}\frac{1}{s^2(s-3)}\right)=u_4(t)\left(\frac{1}{9}e^{3(t-4)}-\frac{1}{3}(t-4)-\frac{1}{9}\right)$$

مثال : جواب معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید:

$$\begin{cases}\mathbf{y''-2y'+y=\delta_3(t)\left(t^2+4t\right)}\\ \mathbf{y(0)=y'(0)=0}\end{cases}$$

حل : از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$\left(s^2Y(s)-\underset{0}{s\cancel{y(0)}}-\underset{0}{\cancel{y'(0)}}\right)-2\left(sY(s)-\underset{0}{\cancel{y(0)}}\right)+Y(s)=e^{-3s}\left\{(3)^2+4(3)\right\}$$

$$\rightarrow\quad\left(s^2-2s+1\right)Y(s)=21e^{-3s}\quad\rightarrow\quad Y(s)=\frac{21e^{-3s}}{(s-1)^2}$$

بنابراین:

$$y(t)=L^{-1}\left(\frac{21e^{-3s}}{(s-1)^2}\right)=21\,.\,u_3(t)\left\{e^{1(t-3)}\,.\,(t-3)\right\}$$

۶) قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس

$$L(t\,f(t))=-F'(s)\quad\rightarrow\quad L^{-1}(F'(s))=-t\,f(t)$$

$$L\left(t^2 f(t)\right)=+F''(s)\quad\rightarrow\quad L^{-1}(F''(s))=t^2 f(t)$$

مثال : تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t^2\sin 3t$ را بیابید.

حل : می‌دانیم:

$$L(\sin 3t)=\frac{3}{s^2+9}\quad\rightarrow$$

$$L\left(t^2\sin 3t\right)=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{-6s}{\left(s^2+9\right)^2}\right)=\frac{-6\left(s^2+9\right)^2-2\left(s^2+9\right)(2s)(-6s)}{\left(s^2+9\right)^4}$$

مثال : حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\mathbf{I=\int_0^{\infty} e^{-4t}\, t\cos 2t\, dt}$$

حل : مطابق فرمول تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$I=\left\{L\left(t\cos 2t\right)\right\}\Big|_{s=4}$$

می‌دانیم:

$$L\left(\cos 2t\right)=\frac{s}{s^2+4}\quad\rightarrow\quad L\left(t\cos 2t\right)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)=-\frac{s^2+4-2s^2}{\left(s^2+4\right)^2}=\frac{s^2-4}{\left(s^2+4\right)^2}$$

حال داریم:

$$I=\left(\frac{s^2-4}{\left(s^2+4\right)^2}\right)\Bigg|_{s=4}=\frac{12}{400}$$

مثال : لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$\text{۱) }\mathbf{F(s)=\ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)}$$

حل : داریم:

$$F(s)=\ln\left(s+3\right)-\ln\left(s+1\right)\quad\rightarrow\quad F'(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+1}$$

از آنجا که $L^{-1}\left(F'(s)\right)=-t\,f(t)$ داریم:

$$e^{-3t}-e^{-t}=-t\,f(t)\quad\rightarrow\quad f(t)=\frac{e^{-3t}-e^{-t}}{-t}$$

$$\text{۲) }\mathbf{F(s)=Arccot\,s}$$

حل : داریم:

$$F'(s)=\frac{-1}{1+s^2}$$

حال از آنجا که $L^{-1}\left(F'(s)\right)=-t\,f(t)$ ، پس داریم:

$$-\sin t=-t\,f(t)\quad\rightarrow\quad f(t)=\frac{\sin t}{t}$$

۳) $\mathbf{F(s)=\sqrt{s}-\sqrt{s+4}}$

حل : داریم:

$$F'(s)=\frac{1}{2\sqrt{s}}-\frac{1}{2\sqrt{s+4}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(s+4)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

حالا می‌گوییم:

$$L^{-1}\left(F'(s)\right)=-t\,f(t)\quad\rightarrow\quad\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(t^{-\frac{1}{2}}-e^{-4t}\,t^{-\frac{1}{2}}\right)=-t\,f(t)\quad\rightarrow\quad f(t)=\frac{\left(t^{-\frac{1}{2}}-e^{-4t}\,t^{-\frac{1}{2}}\right)}{-2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\,t}$$

مثال : بر تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل زیر چه معادله‌ای حاکم است؟

$$\begin{cases}\mathbf{(t+1)y''-3y'+t^2\,y=1}\\ \mathbf{y(0)=1\quad,\quad y'(0)=2}\end{cases}$$

حل : با لاپلاس گیری از معادله بدست می آوریم :

$$\frac{-d}{ds}\left(s^2\,Y(s)-\underset{1}{\cancel{sy(0)}}-\underset{2}{\cancel{y'(0)}}\right)+\left(s^2\,Y(s)-\underset{1}{\cancel{sy(0)}}-\underset{2}{\cancel{y'(0)}}\right)-3\left(sY(s)-\underset{1}{\cancel{y'(0)}}\right)+\frac{d^2}{ds^2}\,Y(s)=\frac{1}{s}\quad\rightarrow$$

$$-\left(2\,sY+s^2\,Y'-1\right)+\left(s^2\,Y-s-2\right)-3\left(sY-1\right)+Y''=\frac{1}{s}$$

مثال : تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$xy''+(1-x)y'+y=0\quad,\quad y(0)=1\,,\;y'(0)=-1$$

حل :

$$L(xy'')+L(y')-L(xy')+L(y)=L(0)$$

$$\rightarrow\quad-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+\left(sY(s)-y(0)\right)+\frac{d}{ds}\left(sY(s)-y(0)\right)+Y(s)=0$$

$$\rightarrow\quad-\left(2sY+s^2Y'-y(0)\right)+\left(sY-y(0)\right)+\left(Y+sY'\right)+Y=0$$

$$\left(-s^2+s\right)Y'+(-s+2)Y=0\quad\rightarrow\quad\left(s^2-s\right)\frac{dY}{ds}=(-s+2)Y\quad\rightarrow\quad\frac{dY}{Y}=\frac{-s+2}{s(s-1)}ds$$

$$\rightarrow\quad\frac{dY}{Y}=\left(\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s}\right)ds\quad\xrightarrow{\int}\quad\ln Y=\ln(s-1)-2\ln s+\ln k\quad\rightarrow\quad Y(s)=\frac{k(s-1)}{s^2}$$

و چون داریم:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)\quad\rightarrow\quad 1=\lim_{s\to\infty}\frac{ks(s-1)}{s^2}\quad\rightarrow\quad k=1$$

۷) قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس

$$L\left(\frac{1}{t}f(t)\right)=\int_{s}^{+\infty}F(s)\,ds$$

مثال : تبدیل لاپلاس تابع را پیدا کنید.

$$\mathbf{f(t)=\frac{e^{2t}-1+\sin t}{t}}$$

حل : می‌دانیم:

$$L\left(e^{2t}-1+\sin t\right)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+1}\quad\rightarrow$$

$$L\left(\frac{1}{t}\left(e^{2t}-1+\sin t\right)\right)=\int_{s}^{+\infty}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+1}\right)ds=\left(\ln(s-2)-\ln s+\tan^{-1}s\right)\Big|_{s}^{+\infty}$$

$$=\left\{\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)+\tan^{-1}s\right\}\Big|_{s}^{+\infty}=\left\{\left(\underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{0}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)+\tan^{-1}s\right)\right\}$$

مثال : حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\mathbf{I=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt}$$

حل : مطابق فرمول تبدیل لاپلاس داریم:

$$I=\int_{0}^{\infty}e^{-0t}\left(\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\right)dt=\left\{L\left(\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\right)\right\}\Big|_{s=0}$$

می‌دانیم:

$$L\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$L\left(\frac{1}{t}\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)\right)=\int_{s}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)ds=\left(\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)\right)\Big|_{s}^{\infty}=\underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0}-\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)$$

لذا :

$$I=-\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)\Big|_{s=0}=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2$$

۸) قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دوتابع

تعریف پیچش دو تابع : $(f*g)_{(t)}=\int_{0}^{t}f(\lambda)\,g(t-\lambda)\,d\lambda$

$$=\int_{0}^{t}f(t-\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda$$

$$L\left((f*g)_{(t)}\right)=F(s)G(s)\quad\rightarrow\quad L^{-1}\left(F(s)G(s)\right)=(f*g)_{(t)}$$

مثال : پیچش دو تابع $g(t)=\sin t$ ، $f(t)=t$ را پیدا کنید.

حل : راه مستقیم:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda=\int_0^t (t-\lambda)\sin\lambda\,d\lambda$$

از روش جزء به جزء داریم:

مشتق		انتگرال
$t-\lambda$	$+$	$\sin\lambda$
-1	$-$	$-\cos\lambda$
0		$-\sin\lambda$

$$(f*g)(t)=\left(-(t-\lambda)\cos\lambda-\sin\lambda\right)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=t}=(0-\sin t)-(-t-0)=t-\sin t$$

راه دوم:

$$L(f*g)(t)=F(s)\,G(s)=\frac{1}{s^2}\,\frac{1}{s^2+1}$$

حال می‌گویم:

$$(f*g)(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right)=\int_0^t\int_0^t \sin t\,dt\,dt$$

$$=\int_0^t (-\cos t)\Big|_0^t\,dt=\int_0^t(-\cos t+1)\,dt=(-\sin t+t)\Big|_0^t=-\sin t+t$$

مثال : تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\int_0^t \sin 3(t-\lambda)\,e^{-2\lambda}\,d\lambda$ را پیدا کنید.

حل : مطابق تعریف پیچش:

$$f(t)=\sin 3t*e^{-2t}\quad\rightarrow\quad F(s)=L(\sin 3t)\,.\,L\left(e^{-2t}\right)=\frac{3}{s^2+9}\cdot\frac{1}{s+2}$$

مثال : معادلهٔ انتگرالی زیر را حل کنید.

$$\mathbf{f(t)=t\,e^{t}+\int_0^t \lambda\, f(t-\lambda)\,e^{\lambda}\,d\lambda}$$

حل : می‌توان نوشت:

$$f(t) = t e^{t} + \left(t e^{t} * f(t)\right) \xrightarrow{L}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} . F(s) \quad \rightarrow \quad F(s)\left\{1 - \frac{1}{(s-1)^2}\right\} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\rightarrow \quad F(s)\left(\frac{s^2 - 2s + 1 - 1}{(s-1)^2}\right) = \frac{1}{(s-1)^2} \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s} = \frac{1}{s(s-2)}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \quad f(t) = \int_0^t e^{2t}\, dt = \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - 1\right)$$

مثال : با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب مسئله زیر را در یک بیان انتگرالی بنویسید.

$$\begin{cases} y'' + 9y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل : از طرفین معادله لاپلاس گرفته و شرایط $y(0) = y'(0) = 0$ را نیز اعمال می‌کنیم.

$$s^2\, Y(s) + 9\, Y(s) = F(s)$$

$$\rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 + 9} F(s) \overset{L^{-1}}{\rightarrow} y(t) = \int_0^t \frac{1}{3} \sin 3\lambda \,.\, f(t-\lambda)\, d\lambda \;\; \text{یا} \;\; y(t) = \int_0^t \frac{1}{3} \sin 3(t-\lambda) \,.\, f(\lambda)\, d\lambda$$

۹) قضیه تبدیل لاپلاس توابع نیمه متناوب

با فرض آن که برای tهای مثبت داشته باشیم:

$$f(t+p) = f(t)$$

یعنی f برای $t > 0$ تابعی متناوب با دوره تناوب p باشد، داریم :

$$L(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} . f(t)\, dt$$

مثال : تبدیل لاپلاس تابع زیر را به‌دست آورید:

$$f(t) = \begin{cases} e^{3t} & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 5 \end{cases} \quad , \quad f(t+5) = f(t)$$

حل : $f(t)$ تابعی متناوب با دوه متناوب $P = 5$ است. لذا طبق فرمول داریم:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-5s}} \int_0^5 e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1 - e^{-5s}} \left\{\int_0^1 e^{-st} e^{3t}\, dt + \int_1^5 0\, dt\right\}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-5s}} \left\{\frac{1}{3-s} e^{(3-s)t}\right\}\Big|_0^1 = \frac{1}{1 - e^{-5s}} . \frac{1}{3-s}\left(e^{3-s} - 1\right)$$

۱۰) قضیه مقیاس

$$L\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right)=aF(as)$$

مثال : فرض کنید $L(f(t))=e^{-\sqrt{s}}$ باشد. لاپلاس تابع $f(4t)$ را بیابید.

حل : در این مساله داریم:

$$L(f(4t))=\frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{1}{4}s}}=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s}}$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x, y, y') = 0$ می‌باشد، که در وضعیت‌هایی خاص قابل حل است. برخی مواردی که ممکن است به عنوان یک تست مورد سؤال قرار گیرد را مرور می‌کنیم.

۱) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جدائی‌پذیر

هرگاه بتوانیم یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را در قالب $A(x)\,dx = B(y)\,dy$ بنویسیم، معادله را از نوع جدایی‌پذیر گفته و با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه جواب عمومی به‌دست می‌آید.

توجه:در معادلات دیفرانسیلی به فرم $y' = f(ax + by + c)$ با جانشینی $u(x) = ax + by + c$ که نتیجه می‌دهد $u' = a + by'$، به یک معادله جدایی‌پذیر برای تابع $u(x)$ خواهیم رسید.

مثال : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید:

۱) $\mathbf{y' = \sqrt{4 + x + 4y + xy}}$

$$y' = \sqrt{4 + x + y(4 + x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{(4 + x)(1 + y)}$$

$$dy \,.\, (1 + y)^{-\frac{1}{2}} = (4 + x)^{\frac{1}{2}}\, dx \Rightarrow \xrightarrow{\int} 2(1 + y)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(4 + x)^{\frac{3}{2}} + C$$

۲) $\mathbf{(x + y)^2\, y' = 1}$

مطابق توجه گفته شده با فرض: $u(x) = x + y$ که نتیجه می‌دهد:

$$u' = 1 + y'$$

می‌توان نوشت:

$$u^2(u' - 1) = 1 \to u' - 1 = \frac{1}{u^2}$$

$$u' - 1 = \frac{1}{u^2} \to \frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2} + 1 \to \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{u^2} \to \frac{u^2 + 1 - 1}{1 + u^2}\, du = dx \to$$

$$\left(1 - \frac{1}{1 + u^2}\right) du = dx \xrightarrow{\int} u - \tan^{-1} u = x + c \xrightarrow{u = x + y} (x + y) - \tan^{-1}(x + y) = x + c$$

۲) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با توابع همگن

یادآوری:

همان‌طوری‌که می‌دانیم تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه α می‌گویند هرگاه $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$

در معادله دیفرانسیل $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ هرگاه توابع P و Q توابعی همگن بادرجه همگنی یکسان باشند، معادله را از نوع مرتبه اول با توابع همگن گفته و با جانشینی $y = x\,u(x)$ که نتیجه می‌دهد $y' = u(x) + x\,u'(x)$، به یک معادله جدایی‌پذیر برای تابع $u(x)$ خواهیم رسید.

توجه:در معادلات دیفرانسیل $y' = \dfrac{ax + by + c}{mx + ny + k}$ اگر دو خط $mx + ny + k = 0$ و $ax + by + c = 0$ موازی باشند با تغییر تابع $u(x) = ax + by + c$ معادله به نوع جدایی‌پذیر تبدیل می‌شود و اگر دو خط مذکور همدیگر را در نقطه (x_0, y_0) قطع کنند با جانشینی‌های $y = Y + y_0$ و $x = X + x_0$ معادله به فرم توابع همگن تبدیل می‌شود.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$\left(2x^2 + y^2\right)dx + xy\,dy = 0$$

حل :

$2x^2 + y^2$ و xy هر دو همگن از درجه $\alpha = 2$ هستند لذا با فرض:

$$y = x\,u(x) \rightarrow y' = u + xu'$$

و نوشتن معادله اصلی به صورت $\left(2x^2 + y^2\right) + xy\dfrac{dy}{dx} = 0$ داریم:

$$\left(2x^2 + x^2u^2\right) + x(xu)(u + xu') = 0 \longrightarrow$$
$$2 + u^2 + u^2 + xuu' = 0 \rightarrow xu\frac{du}{dx} = -2\left(1 + u^2\right) \rightarrow$$

$$\frac{u\,du}{1 + u^2} = -2\frac{dx}{x} \xrightarrow{\ \int\ } \frac{1}{2}\ln\left(1 + u^2\right) = -2\ln x + C$$

$$\xrightarrow{\ln K = C} \ln\sqrt{\left(1 + u^2\right)} = \ln\frac{K}{x^2} \rightarrow \sqrt{1 + u^2} = \frac{K}{x^2} \xrightarrow{u = \frac{y}{x}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{K}{x^2}$$

۳) معادلات دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ را کامل می‌گویند هرگاه $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ باشد. در چنین شرایطی جواب عمومی معادله به صورت $u(x, y) = c$ خواهد بود که تابع u را باید از حل دستگاه $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$ به‌دست آورد.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{1 - 2x - 3y}{4y + 3x}$ چه خانواده‌ای از مقاطع مخروطی را نشان می‌دهد؟

۱) دایره‌ها　　　　۲) سهمی‌ها

۳) بیضی‌ها　　　　۴) هذلولی‌ها

حل : داریم:

$$\overbrace{(2x + 3y - 1)}^{P}dx + \overbrace{(4y + 3x)}^{Q}dy = 0$$

ملاحظه می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=3$$

پس معادله از نوع کامل است.

برای یافتن u می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+3y-1\xrightarrow{\int} u=x^2+3xy-x+A(y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=4y+3x\xrightarrow{\int} u=2y^2+3xy+B(y)\end{cases}\quad\rightarrow\quad u=x^2+3xy-x+2y^2$$

در نهایت جواب عمومی چنین است:

$$u(x,y)=k\rightarrow x^2+3xy-x+2y^2=k$$

که یک خانواده هذلولی است زیرا:

$$A=1\quad,\quad B=3\quad,\quad C=2$$

$$\Delta=B^2-4AC=9-8>0$$

عامل انتگرال‌ساز

اگر معادله دیفرانسیل $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ کامل نباشد، ممکن است بتوانیم تابعی مانند $\mu(x,y)$ به‌گونه‌ای بیابیم که با ضرب آن در معادله فوق، حاصل یک معادله کامل باشد یعنی $P\mu\,dx+Q\mu\,dy=0$ کامل باشد. (این می‌طلبد که $\dfrac{\partial(P\mu)}{\partial y}=\dfrac{\partial(Q\mu)}{\partial x}$ باشد.

در این شرایط $\mu(x,y)$ را یک عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل مورد نظر می‌گوئیم (این تابع یکتا نمی‌باشد).

برای یافتن عامل انتگرال‌ساز ممکن است یکی از بحث‌های زیر مفید باشد:

الف) گاهی در گزینه‌های پیشنهادی یک ساختار مشترک دیده می‌شود، در این وضعیت کافی است فرم کلی این ساختار مشترک را در نظر گرفته و با ضرب آن در معادله دیفرانسیل مورد نظر، شرط کامل شدن معادله حاصله را نوشته و تکلیف μ را معلوم کنیم.

ب) اگر $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=h(x)$ آنگاه $\mu(x)=e^{\int h(x)\,dx}$

اگر $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=h(y)$ آنگاه $\mu(y)=e^{-\int h(y)\,dy}$

مثال : یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله دیفرانسیل $ydx+\left(xLny+y^6\right)dy=0$ پیدا کنید.

حل :

$$\left.\begin{array}{l}P(x,y)=y\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=1\\ Q(x,y)=\left(xLny+y^6\right)\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=Lny\end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1-Lny}{y}=\frac{1}{y}-\frac{Lny}{y}=h(y)$$

پس می‌توان گفت:

$$\mu(y)=e^{-\int h(y)\,dy}=e^{\int\left(\frac{Lny}{y}-\frac{1}{y}\right)dy}=e^{-Lny+\frac{(Lny)^2}{2}}\ \Rightarrow\ \mu(y)=\frac{e^{\frac{(Lny)^2}{2}}}{y}$$

مثال : یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله $\left(1+x^2\right)dy-\left(tg^{-1}x-y\right)dx=0$ پیدا کنید.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=y-tg^{-1}x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=1 \\ Q(x,y)=1+x^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=h(x) \quad \Rightarrow \quad h(x)=\frac{1-2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(x)=e^{\int h(x)dx}=e^{\int\frac{1-2x}{1+x^2}dx}=e^{\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}\right)dx}$$

$$\Rightarrow \mu(x)=e^{tg^{-1}x-Ln\left(1+x^2\right)}=e^{tg^{-1}x}.e^{-Ln\left(1+x^2\right)} \Rightarrow \mu(x)=\frac{e^{tg^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال : کدام‌یک از توابع زیر می‌تواند عامل انتگرال‌سازی برای معادله دیفرانسیل $\left(2y+x^2y\right)dx+3x\,dy=0$ باشد؟

۱) $\dfrac{x^3}{y}$ ۲) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\;y^2}$ ۳) $\sqrt{y}\;x^4$ ۴) $\dfrac{1}{xy}$

حل : مشاهده می‌شود تمام گزینه‌های پیشنهادی یک فرم مشترک $\mu=x^{\alpha}\,y^{\beta}$ دارد اگر بخواهیم این عبارت عامل انتگرال‌ساز شود باید با ضرب این عامل در معادله، به معادله دیفرانسیل کامل برسیم.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^{\alpha}\,y^{\beta+1}+x^{\alpha+2}\,y^{\beta+1}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^{\alpha+1}\,y^{\beta}\right)\rightarrow$$

$$2(\beta+1)\,x^{\alpha}y^{\beta}+(\beta+1)\,x^{\alpha+2}\,y^{\beta}=3(\alpha+1)\,x^{\alpha}\,y^{\beta} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(\beta+1)=3(\alpha+1) \\ \beta+1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \beta=-1 \qquad \alpha=-1$$

$$\mu=x^{-1}\,y^{-1}=\frac{1}{xy}$$

۴) معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی مانند:

$$1\,y'+P(x)y=Q(x)$$

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y(x)=e^{-\int P(x)\,dx}\left\{\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+c\right\}$$

توجه:یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت

$$1\,x'+P(y)\,x=Q(y)$$

از نوع مرتبه اول خطی برای x به عنوان تابعی از y می‌باشد.

مثال : جواب عمومی $y' + y\tan x = \cos x$ را پیدا کنید.

حل : معادله از نوع مرتبه اول خطی است با:

$$P(x) = \tan x \quad , \quad Q(x) = \cos x$$

می‌باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \tan x\, dx}\left\{\int \cos x\, e^{\int \tan x\, dx}\, dx + C\right\} \\ &= e^{\ln(\cos x)}\left\{\int \cos x\,.\, e^{-\ln(\cos x)}\, dx + C\right\} \\ &= \cos x\left\{\int \cos x\,\frac{1}{\cos x}\, dx + C\right\} \\ &= \cos x(x + C) \rightarrow y(x) = x\cos x + C\cos x \end{aligned}$$

۵) معادله دیفرانسیل مرتبه اول برنولی

معادله دیفرانسیل مرتبه اولی به صورت $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$ (که در آن n عددی ثابت مخالف صفر و یک می‌باشد) را از نوع برنولی می‌گویند.

با جانشینی $u(x) = y^{1-n}$ که نتیجه می‌دهد $u'(x) = (1-n)\,y^{-n}\,y'$ چنانچه ابتدا طرفین معادله برنولی مورد نظر را بر y^n تقسیم کرده و حاصل را برحسب $u(x)$ بازنویسی کنیم یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی برای $u(x)$ ایجاد می‌شود که قابل حل با روال مربوطه خواهد بود.

توجه:یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت

$$x' + P(y)\,x = Q(y)\,x^n$$

از نوع برنولی برای x به عنوان تابعی از y می‌باشد.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + y = \dfrac{x}{\sqrt{y}}$ را بیابید.

حل : معادله برنولی به ازاء $n = -\dfrac{1}{2}$ است لذا با فرض:

$$u(x) = y^{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = y^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{3}{2}\,y^{\frac{1}{2}}\,y'$$

و نوشتن معادله اصلی به صورت $y'\sqrt{y} + y\sqrt{y} = x$ داریم:

$$\frac{2}{3}u' + u = x \rightarrow u' + \frac{3}{2}u = \frac{3x}{2} \qquad \longrightarrow \qquad u(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left\{\int \frac{3x}{2}\,.\,e^{\frac{3}{2}x}\, dx + c\right\}$$

با اعمال روش جزء به جزء داریم:

مشتق		انتگرال
$\frac{3x}{2}$	$+$	$e^{\frac{3x}{2}}$
$\frac{3}{2}$	$-$	$\frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}}$
0		$\frac{4}{9}e^{\frac{3x}{2}}$

$$u(x) = e^{-\frac{3x}{2}}\left\{x\,e^{\frac{3x}{2}} - \frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}} + C\right\}$$

$$y^{\frac{3}{2}} = x - \frac{2}{3} + C\,e^{-\frac{3}{2}x}$$

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y\,dx + \left(x - x^2 y\right)dy = 0$$

حل : اگر بنویسیم:

$$y\frac{dx}{dy} + x = x^2\,y$$

که از نوع برنولی است برای x به عنوان تابعی از y است، به تعبیری با تبدیلات $y \rightleftarrows x$ به برنولی استاندارد زیر می‌رسیم:

$$x\,y' + y = x\,y^2$$

لذا با جانشینی:

$$u(x) = y^{1-2} = y^{-1} \;\Rightarrow\; u'(x) = -\,y^{-2}\,y'$$

داریم:

$$\frac{x\,y'}{y^2} + \frac{y}{y^2} = x \xrightarrow{\text{بازنویسی}} x(-u') + u = x \to u' - \frac{1}{x}u = -1 \xrightarrow[\text{اول خطی}]{\text{فرمول مرتبه}}$$

$$u(x) = e^{\ln x}\left\{\int -1\,e^{-\ln x}\,dx + C\right\} = x\left\{\int -\frac{1}{x}\,dx + C\right\} \to y^{-1} = x\,(-\ln x + C)$$

و البته جواب مساله اصلی چنین است:

$$x^{-1} = y\,(-\ln y + C)$$

۶) معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجهٔ n

معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجهٔ n زیر را در نظر بگیرید.

$$P(x, y)\,y'^{\,n} + Q(x, y)\,y'^{\,n-1} + \dots + R(x, y) = 0$$

چنانچه بتوانیم معادله فوق را به صورت حاصل‌ضرب n عامل درجه اول از y' بیان کنیم، کافی است تک تک عوامل مذکور را یک بار مساوی صفر قرار داده و جواب عمومی هر کدام را به صورت $\varphi_i(x, y, c) = 0$ پیدا کنیم، در نهایت جواب عمومی معادله مرتبه اول درجه n مورد بحث به صورت زیر خواهد بود:

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y, c) = 0$$

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'^{2} - (\cos x + y)\, y' + y\cos x = 0$ را بیابید.

حل : با کمی دقت می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$(y' - \cos x)(y' - y) = 0$$

لذا می‌توان نوشت:

$$y' - \cos x = 0 \;\Rightarrow\; y' = \cos x \;\xrightarrow{\int}\; y = \sin x + C \;\Rightarrow\; \sin x - y + C = 0$$

$$y' - y = 0 \;\Rightarrow\; y' = y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = dx \;\xrightarrow{\int}\; \ln y = x + k \;\Rightarrow\; x - \ln y + k = 0$$

در کل جواب عمومی چنین است:

$$(\sin x - y + C)(x - \ln y + k) = 0$$

۷) معادله دیفرانسیل مرتبه اول کلرو

یک معادله دیفرانسیل کلرو به صورت $y = xy' + F(y')$ نوشته می‌شود و می‌توان نشان داد جواب عمومی آن به صورت $y = cx + F(c)$ بیان می‌شود.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = x\,y' + \sqrt{1 + y'^{5}}$ را بیابید.

حل : معادله مذکور از نوع کلرو است و جواب عمومی آن چنین است:

$$y = C\,x + \sqrt{1 + C^{5}}$$

دو بحث هندسی در معادلات دیفرانسیل

۱) مسیرهای قائم یک دسته منحنی

دو دسته منحنی را مسیرهای قائم یکدیگر می‌گوئیم هرگاه هر کدام از منحنی‌های یک دسته، بر هر کدام از منحنی‌های دسته دیگر، عمود باشند.

الف) اگر معادله یک دسته منحنی در مختصات دکارتی با رابطه $\varphi(x, y, c) = 0$ بیان شده باشد، با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به متغیر x و سپس حذف c بین روابط موجود، معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی به‌دست می‌آید، با تبدیل $\frac{dy}{dx}$ به $-\frac{dx}{dy}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم حاصل می‌گردد که از حل آن مسیرهای قائم دسته منحنی‌های اولیه مشخص می‌گردد.

ب) اگر معادله یک دسته منحنی در مختصات قطبی با رابطه $\varphi(r, \theta, c) = 0$ بیان شده باشد، با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به متغیر θ و سپس حذف c بین روابط موجود، معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی به‌دست می‌آید، با تبدیل $\frac{dr}{d\theta}$ به $-r^{2}\frac{d\theta}{dr}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم حاصل می‌گردد که از حل آن مسیرهای قائم دسته منحنی‌های اولیه مشخص می‌گردد.

مثال : مسیرهای قائم دسته منحنی‌های زیر را پیدا کنید.

$$y = e^{Cx}$$

حل : (معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی) $\left.\begin{array}{l}\ln y = Cx \\ \dfrac{y'}{y} = C\end{array}\right\}$ مشتق نسبت به x ← تقسیم دو رابطه $\dfrac{\ln y}{\frac{y'}{y}} = x \to y \ln y = x y'$

با تبدیل $\dfrac{dy}{dx} \to -\dfrac{dx}{dy}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم چنین می‌شود:

$$y \ln y = x\left(-\frac{dx}{dy}\right) \to y \ln y\, dy = -x\, dx \xrightarrow{\int} \int y \ln y\, dy = \int -x\, dx$$

$$I = \int y \ln y\, dy$$

جزء به جزء $\begin{cases}\ln y = u \\ y\, dy = dv\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dfrac{dy}{y} = du \\ \dfrac{y^2}{2} = v\end{cases}$

$$I = \frac{y^2}{2} \ln y - \int \frac{y^2}{2} \frac{dy}{y} = \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{y^2}{4}$$

بنابراین:

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{y^2}{4} + k$$ معادله مسیرهای قائم

مثال : معادله مسیرهای قائم دسته منحنی‌های زیر را پیدا کنید:

حل :

$$r^2 = c \ln \theta$$

$\begin{cases} r^2 = c \ln \theta \\ 2r\dfrac{dr}{d\theta} = c\dfrac{1}{\theta}\end{cases}$ مشتق نسبت به θ $\xrightarrow{\text{تقسیم کنیم}} \dfrac{r}{2\frac{dr}{d\theta}} = \theta \ln \theta$

با تبدیل $\dfrac{dr}{d\theta}$ به $-r^2 \dfrac{d\theta}{dr}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم چنین می‌شود:

$$\frac{r}{2\left(-r^2 \frac{d\theta}{dr}\right)} = \theta \ln \theta$$

$$\frac{dr}{r} = -2\,\theta \ln \theta\, d\theta \xrightarrow{\int} \ln r = -2\left\{\frac{\theta^2}{2} \ln \theta - \frac{\theta^2}{4}\right\} + k$$ مسیرهای قائم

۲) پوش یک دسته منحنی و جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول

الف) پوش یک دسته منحنی، منحنی‌ای است که بر هر کدام از منحنی‌های دسته مذکور، مماس می‌باشد.

ب) اگر دسته منحنی $\varphi(x, y, c) = 0$ دارای پوش باشد، کافی است از معادله مذکور نسبت به c مشتق گرفته و بین روابط موجود، c را حذف کنیم، بدین‌ترتیب معادله پوش دسته منحنی مورد نظر حاصل می‌گردد.

ج) اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x, y, y') = 0$ دارای جواب عمومی $\varphi(x, y, c) = 0$ باشد، پوش دسته منحنی‌های جواب عمومی نیز، جوابی از معادله دیفرانسیل مذکور خواهد بود که اصطلاحاً به آن جواب غیرعادی این معادله دیفرانسیل می‌گویند.

د) جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، جوابی از آن معادله دیفرانسیل است که به ازاء هیچ ثابت اختیاری از جواب عمومی معادله قابل حصول نخواهد بود.

مثال : جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل $y = xy' + y' \ln y'$ را پیدا کنید.

$$y = x\,y' + y' \ln y'$$

حل : معادله مذکور از نوع کلرو است و جواب عمومی آن $y = Cx + C \ln C$ می‌باشد. برای یافتن پوش جواب عمومی می‌نویسیم.

$$\frac{\partial}{\partial C} \downarrow \begin{array}{ll} y = Cx + C\ln C & (\mathrm{I}) \\ 0 = x + \ln C + 1 & (\mathrm{II}) \end{array}$$

پوش جواب عمومی (جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل):

$$(\mathrm{II}) \to \ln C = -(x+1) \;\Rightarrow\; C = e^{-(x+1)} \xrightarrow{\mathrm{I}}$$
$$y = e^{-(x+1)} . x + e^{-(x+1)} \{-(x+1)\} \to y = -e^{-(x+1)}$$

۱) معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دو و مراتب بالاتر و بحث پایه‌های جواب آن

معادله دیفرانسیل مرتبه nام خطی همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$a(x)\,y^{(n)} + b(x)\,y^{(n-1)} + \dots + c(x)\,y = 0$$

چنانچه توابع $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ جواب‌هایی از این معادله دیفرانسیل باشند که استقلال خطی نیز دارند (پایه‌های جواب این معادله دیفرانسیل)، آنگاه هر ترکیب خطی این توابع نیز جوابی از معادله دیفرانسیل مذکور خواهد بود و به تعبیری جواب عمومی به صورت :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

خواهد بود که در آن $C_1, C_2, \dots, C_n$ ثابت‌هایی اختیاری (پارامتر آزاد) می‌باشند.

یادآوری:

توابع $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ را دارای وابستگی خطی می‌گوئیم، هرگاه بتوان ثابت‌های $K_1, K_2, \dots, K_n$ را به‌گونه‌ای یافت که:

$$K_1 f_1(x) + K_2 f_2(x) + \dots + K_n f_n(x) = 0$$

($K_1, K_2, \dots, K_n$ نمی‌توانند همگی همزمان صفر باشند)

و برای این منظور باید داشته باشیم:

$$f_1, \dots, f_n \text{ رونسکین توابع } : W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots\cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots\cdots & f'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots\cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

روش‌هایی در تعیین پایه‌های جواب معادلات دیفرانسیل خطی همگن

الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دو همگن با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل $a y'' + b y' + cy = 0$ که در آن a, b, c اعداد ثابت حقیقی‌اند را در نظر بگیرید. معادله $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ را معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل می‌گویند.

۱) اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی λ_1, λ_2 باشد، پایه‌های جواب عبارتند از:

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$$

۲) اگر معادله مشخصه دارای یک ریشه مضاعف λ_1 باشد، پایه‌های جواب عبارتند از:

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}$$

۳) اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد، پایه‌های جواب عبارتند از:

$$e^{px} \sin qx, e^{px} \cos qx$$

توجه:

در معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت دارای مراتب بالاتر نیز کافی است با تبدیلات $\begin{cases} y \to 1 \\ y' \to \lambda \\ y'' \to \lambda^2 \\ y''' \to \lambda^3 \\ \vdots \end{cases}$ معادله مشخصه را تشکیل داده و پس از یافتن تمام ریشه‌های آن (که دقیقاً باید به تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل باشد)، پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل را مشخص می‌کنیم.

به عنوان مثال فرض کنید برای یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت همگن مرتبه 10 ریشه‌های معادله مشخصه را به صورت زیر به‌دست آورده باشیم:

$1 \pm 3i\,,\, 1 \pm 3i\,,\, -1 \pm 3i\,,\, 2\,,\, 2\,,\, 2\,,\, 2$

در این حالت پایه‌های جواب معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} e^{1x}\sin 3x \\ e^{1x}\cos 3x \\ x\,e^{1x}\sin 3x \\ x\,e^{1x}\cos 3x \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{-1x}\sin 3x \\ e^{-1x}\cos 3x \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{2x} \\ x\,e^{2x} \\ x^2 e^{2x} \\ x^3\, e^{2x} \end{cases}$$

توجه: در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت بدیهی است

۱) اگر ریشه‌های معادله مشخصه مختلط باشد، پایه‌های جواب طبیعت نوسانی پیدا می‌کند زیرا برای ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $p \pm iq$ پایه‌های جواب $e^{px}\cos qx$ و $e^{px}\sin qx$ خواهد شد.

طبیعی است اگر $p > 0$ باشد دامنه نوسانات برای $x \to +\infty$ به بی‌نهایت می‌گراید و اگر $p < 0$ باشد دامنه نوسانات برای $x \to +\infty$ به صفر می‌گراید.

در حالتی که $p = 0$ باشد پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $\cos qx$ و $\sin qx$ خواهد شد که توابعی متناوب می‌باشند.

۲) اگر بخواهیم پایه‌های جواب در $x \to +\infty$ به صفر بگرایند باید در معادله مشخصه یعنی $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ داشته باشیم:

مجموع دو ریشه $< 0 \;\Rightarrow\; -\dfrac{b}{a} < 0$

حاصلضرب دو ریشه $> 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{c}{a} > 0$

مثال : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

۱) $\mathbf{y^{(4)} + 4y = 0}$

حل : معادله مشخصه:

$\lambda^4 + 4 = 0$

$\left(\lambda^2 + 2\right)^2 - 4\lambda^2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \left(\left(\lambda^2+2\right) - 2\lambda\right)\left(\left(\lambda^2+2\right) + 2\lambda\right) = 0$

$$\to \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i \\ \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i \end{cases}$$

$y = A\,e^{1x}\sin 1x + B\,e^{1x}\cos 1x + C\,e^{-1x}\sin 1x + D\,e^{-1x}\cos 1x$

۲) $2y''' + 7y'' + y' - 4y = 0$

حل : معادله مشخصه:

$$2\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$$

جمع ضرایب با توان‌های زوج برابر جمع ضرایب با توان‌های فرد پس یکی از ریشه‌ها $\lambda = -1$ است و داریم:

$$\begin{array}{l|l}
2\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4 & \lambda + 1 \\ \cline{2-2}
2\lambda^3 + 2\lambda^2 & 2\lambda^2 + 5\lambda - 4 \\ \cline{1-1}
5\lambda^2 + \lambda - 4 & \\
5\lambda^2 + 5\lambda & \\ \cline{1-1}
-4\lambda - 4 & \\
4\lambda + 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

پس دو ریشه دیگر چنین است:

$$2\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25+32}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{4}$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$y = A\,e^{-1x} + B\,e^{\frac{-5+\sqrt{57}}{4}x} + C\,e^{\frac{-5-\sqrt{57}}{4}x}$$

مثال : معادله دیفرانسیل $y''' + 8y = 0$ مفروض است. پایه‌های جواب‌های نوسانی این معادله دیفرانسیل:

۱) متناوب هستند.

۲) وقتی $x \to +\infty$ دامنه نوساناتشان به بی‌نهایت می‌گراید.

۳) وقتی $x \to +\infty$ دامنه نوساناتشان به صفر می‌گراید.

۴) اساساً جواب نوسانی ندارد.

حل : معادله مشخصه:

$$\lambda^3 + 8 = 0$$

$$(\lambda+2)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 4\right) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} \lambda + 2 = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm \sqrt{3}\,i \end{cases}$$

بنابراین پایه‌های جواب عبارتند از:

$$\overbrace{e^{-2x}}^{\text{پایه جواب غیرنوسانی}} \;,\;\; \underbrace{e^{1x}\sin\sqrt{3}\,x \;\;,\;\; e^{1x}\cos\sqrt{3}\,x}_{\text{پایه‌های جواب نوسانی}}$$

بدیهی است از آن‌جا که:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

لذا پایه‌های جواب نوسانی معادله برای $x \to +\infty$ دامنه نوساناتشان به ∞ می‌گراید و البته این پایه‌های جواب طبیعت متناوب ندارند. لذا گزینه ۲ صحیح است.

مثال : معادله دیفرانسیل همراه با شرایط کمکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \mathbf{y'' + 3y' - 10y = 0} \\ \mathbf{y(0) = 4 \quad , \quad y'(0) = \alpha} \end{cases}$$

اگر بخواهیم حد جواب مسئله در $x \to +\infty$ به صفر بگراید ثابت α را بیابید؟

حل : معادله مشخصه:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \to \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = 2\,,\,-5$$

بنابراین پایه‌های جواب عبارتند از:

$$e^{+2x} \quad , \quad e^{-5x}$$

ما می‌دانیم:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-5x} = 0$$

پس اگر بخواهیم $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$ باشد، حتماً باید جواب را به صورت زیر بنویسیم:

$$y = C\,e^{-5x}$$

با اعمال شرط $y(0) = 4$ به‌دست می‌آید.

$$y = 4e^{-5x} \to y' = -20\,e^{-5x} \to y'(0) = -20 \to \alpha = -20$$

مثال : معادله دیفرانسیل حاصل از حذف $A\,,\,B\,,\,C\,,\,D$ در رابطه زیر را به‌دست آورید.

$$\mathbf{y = A\,e^{3x} + B\,e^{-x} + C\,x\,e^{-x} + D\,x^2\,e^{-x}}$$

مثال : ملاحظه می‌شود معادله نوشته شده یک معادله دیفرانسیل مرتبه 4 با ضرایب ثابت می‌باشد که ریشه‌های معادله مشخصه $(3\,,-1\,,-1\,,-1)$ است. پس معادله مشخصه چنین است:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1)^3 = 0 \to (\lambda - 3)\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) = 0 \to \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0$$

پس معادله دیفرانسیل مورد نظر چنین است:

$$y^{(4)} - 6y'' - 8y' - 3y = 0$$

مثال : معادله دیفرانسیل مرتبه چهارمی با ضرایب ثابتی تشکیل دهید که یک پایه جواب آن $x\,e^{-2x}\cos x$ باشد.

حل : طبیعتاً داشتن یک پایه جواب به صورت گفته شده وجود سه پایه جواب دیگر به‌صورت:

$$\begin{cases} x\,e^{-2x}\sin x \\ e^{-2x}\sin x \\ e^{-2x}\cos x \end{cases}$$

را قطعی می‌کند و به تعبیری ریشه‌های معادله مشخصه $-2 \pm 1i$ و $-2 \pm 1\,i$ بوده است.

معادله درجه دومی که ریشه هایش $-2 \pm i$ باشد چنین است:

$$(\lambda - (-2+i))(\lambda - (-2-i)) = 0 \quad \to$$
$$((\lambda + 2) - i)((\lambda + 2) + i) = 0 \to (\lambda + 2)^2 + 1 = 0 \to \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

پس معادله مشخصه معادله دیفرانسیل ما چنین بوده است:

$$\left(\lambda^2+4\lambda+5\right)^2=0\to\lambda^4+16\lambda^2+25+8\lambda^3+10\lambda^2+40\lambda=0$$

پس معادله چنین بوده است:

$$y^{(4)}+8\,y^{(3)}+26\,y''+40\,y'+25\,y=0$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دو همگن کوشی ـ اویلر

معادله دیفرانسیل $a x^2 y''+b x y'+c y=0$ که در آن a , b , c اعداد ثابت حقیقی‌اند را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد با تغییر متغیر $t=\ln x$ $\left(x=e^t\right)$ ، معادله کوشی مذکور به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت به صورت $a\dfrac{d^2 y}{dt^2}+(b-a)\dfrac{dy}{dt}+cy=0$ تبدیل می‌شود که دارای معادله مشخصه $a\lambda^2+(b-a)\lambda+c=0$ می‌باشد که می‌توان آن را به صورت $a\lambda(\lambda-1)+b\lambda+c=0$ بیان نمود و ما همین معادله را معادله مشخصه معادله کوشی نیز می‌نامیم.

۱) اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی λ_1 , λ_2 باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$x^{\lambda_1} , x^{\lambda_2}$$

۲) اگر معادله مشخصه دارای یک ریشه مضاعف λ_1 باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$x^{\lambda_1} , x^{\lambda_1}\ln x$$

۳) اگر معادله مشخصه دارای دور ریشه مختلط $p\pm iq$ باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$x^p\sin(q\ln x) , x^p\cos(q\ln x)$$

توجه:

در معادلات دیفرانسیل کوشی دارای مراتب بالاتر نیز کافی است با تبدیلات زیر، معادله مشخصه را تشکیل داده و پس از یافتن تمام ریشه‌های آن (که دقیقاً باید به تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل باشد)، پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} y\to 1\\ x y'\to\lambda\\ x^2 y''\to\lambda(\lambda-1)\\ x^3 y'''\to\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\\ \vdots\end{cases}$$

به عنوان مثال فرض کنید برای یک معادله دیفرانسیل کوشی همگن مرتبه 10 ریشه‌های معادله مشخصه را به صورت $1\pm 3i , 1\pm 3i , -1\pm 3i , 2 , 2 , 2 , 2$ به‌دست آورده باشیم، در این حالت پایه‌های جواب معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x^1\sin(3\ln x)\\ x^1\cos(3\ln x)\\ x^1\ln x\sin(3\ln x)\\ x^1\ln x\cos(3\ln x)\end{cases}\qquad \begin{cases} x^{-1}\sin(3\ln x)\\ x^{-1}\cos(3\ln x)\end{cases}\qquad \begin{cases} x^2\\ x^2\ln x\\ x^2(\ln x)^2\\ x^2(\ln x)^3\end{cases}$$

توجه: در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو کوشی بدیهی است:

۱) اگر ریشه‌های معادله مشخصه مختلط باشد، پایه‌های جواب طبیعت نوسانی پیدا می‌کند. زیرا برای ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $p \pm iq$ پایه‌های جواب $x^p \cos(q \ln x)$ و $x^p \sin(q \ln x)$ خواهد شد.

طبیعی است اگر $p > 0$ باشد دامنه نوسانات برای $x \to +\infty$ به بی‌نهایت می‌گراید و اگر $p < 0$ باشد دامنه نوسانات برای $x \to +\infty$ به صفر می‌گراید.

در حالتی که $p = 0$ باشد پایه‌های جواب $\cos(q \ln x)$ و $\sin(q \ln x)$ خواهد شد که دامنه نوساناتشان محدود (در بازه $[-1, 1]$ است) ولی متناوب نمی‌باشند.

۲) اگر بخواهیم پایه‌های جواب در $x \to +\infty$ به صفر بگرایند باید در معادله مشخصه یعنی $a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = 0$ داشته باشیم:

$$0 < \text{حاصلضرب دو ریشه و } 0 > \text{مجموع دو ریشه}$$

۳) اگر بخواهیم پایه‌های جواب در $x \to 0^+$ به صفر بگرایند باید در معادله مشخصه یعنی $a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = 0$ داشته باشیم:

$$0 < \text{حاصلضرب دو ریشه و } 0 < \text{مجموع دو ریشه}$$

مثال : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

۱) $3x^2 y'' - xy' + 2y = 0$

معادله مشخصه:

$$3\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 2 = 0 \to 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \to \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{2}\,i}{3}$$

پس:

$$y = Ax^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \ln x\right) + Bx^{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \ln x\right)$$

۲) $x^3 y''' + 2xy' - 4y = 0$

معادله مشخصه:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 2\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda(\lambda - 1) + 2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 \to \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}\,i}{2} \end{cases}$$

پس:

$$y = A\,x^2 + B\,x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \ln x\right) + C\,x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \ln x\right)$$

مثال : معادله دیفرانسیل مرتبه دومی تشکیل دهید که جواب عمومی آن $y = Ax^4 + Bx^4 Lnx$ باشد.

حل : عبارت داده شده جواب عمومی یک معادله کوشی مرتبه دو همگن می‌باشد که ریشه‌های معادله مشخصه‌اش 4,4 بوده، لذا معادله مشخصه آن چنین بوده است:

$$(\lambda - 4)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

اگر معادله کوشی مورد بحث $x^2 y'' + axy' + by = 0$ باشد، دارای معادله مشخصه زیر خواهد بود:

$$\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$$

پس باید:

$$\begin{cases} a - 1 = -8 \quad \rightarrow \quad a = -7 \\ b = 16 \end{cases}$$

یعنی معادله دیفرانسیل مورد نظر $x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$ می‌باشد.

مثال : معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + axy' + 3y = 0$ مفروض است. ثابت a چگونه باشد تا:

اولاً: پایه‌های جواب، طبیعت نوسانی داشته باشند.

ثانیاً: پایه‌های جواب طبیعت نوسانی داشته باشند طوری که برای $x \rightarrow +\infty$ به صفر بگراید.

ثالثاً: پایه‌های جواب طبیعت نوسانی داشته باشند و متناوب نیز باشند.

حل : معادله مشخصه:

$$\lambda(\lambda - 1) \rightarrow a\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda^2 + (a - 1)\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 12}}{2}$$

اولاً: برای داشتن پایه‌های جواب نوسانی باید ریشه‌های معادله مشخصه، مختلط باشند و این می‌طلبید که:

$$\Delta < 0 \rightarrow (a-1)^2 - 12 < 0 \rightarrow -\sqrt{12} < a - 1 < \sqrt{12} \quad \Rightarrow \quad 1 - \sqrt{12} < a < 1 + \sqrt{12}$$

ثانیاً: اگر ریشه‌های معادله مشخصه مختلط به صورت $p \pm iq$ باشند:

پایه‌های جواب به صورت زیر خواهند بود: $x^p \sin(q \ln x) \qquad x^p \cos(q \ln x)$

که البته نوسانی‌اند و برای آن که وقتی $x \rightarrow \infty$ این‌ها به صفر بگرایند باید $p < 0$

لذا در این قسمت علاوه بر شرط $1 - \sqrt{12} < a < 1 + \sqrt{12}$ باید:

$$\frac{-(a-1)}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad a - 1 > 0 \rightarrow a > 1$$

پس در کل $1 < a < 1 + \sqrt{12}$

ثالثاً: پایه‌های جواب معادله کوشی مذکور هرگز طبیعت متناوب پیدا نمی‌کند حتی اگر ریشه‌های معادله مشخصه موهومی محض باشند $(p = 0)$ داریم: $\sin(q \ln x), \cos(q \ln x)$

که البته توابعی متناوب نمی‌باشند و این توابع نوسانی، با دامنه نوسانات محدود بین $[-1, 1]$ هستند.

مثال : معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + a x y' + b y = 0$ مفروض است.

ثابت‌های b, a را طوری پیدا کنید که وقتی $x \to 0^+$ پایه‌های جواب به صفر بگراید.

حل : معادله مشخصه:

$$\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda^2 + (a - 1)\lambda + b = 0$$

اگر فرض کنیم که ریشه‌های معادله مشخصه λ_1, λ_2 باشد پایه‌های جواب $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}$ و برای آن‌که این‌ها برای $x \to 0^+$ به صفر بگرایند باید $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ باشند.

و این می‌طلبد که:

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 \to \dfrac{b}{1} > 0, \ \to b > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \to \dfrac{-(a-1)}{1} > 0 \to a - 1 < 0 \to a < 1 \end{cases}$$

مثال : معادله دیفرانسیل $x^3 y''' + x^2 y'' - 3y = x \ln x$ را با تغییر متغیر $t = \ln x$ بازنویسی کنیم به چه معادله‌ای می‌رسیم؟

حل : سمت چپ معادله داده شده از جنس کوشی است و ما می‌دانیم معادله کوشی با تغییر متغیر $t = \ln x$ به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود که این‌ها معادله مشخصه‌شان یکی است.

معادله مشخصه: $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + \lambda(\lambda - 1) - 3 = 0$

معادله با ضرایب ثابت حاصله:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

پس در کل به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 2\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 3y = e^t \cdot t$$

۲) معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگن و بحث جواب خصوصی

معادله دیفرانسیل مرتبه nام خطی غیرهمگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + P(x)\, y^{(n-1)} + \dots + Q(x)\, y = R(x)$$

چنانچه $y_1 , y_2 , \dots , y_n$ پایه‌های جواب معادله همگن نظیر معادله دیفرانسیل فوق بوده و y_p جوابی از معادله غیرهمگن اصلی باشد، جواب عمومی این معادله دیفرانسیل غیرهمگن به فرم زیر خواهد بود:

$$y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_p$$

y_h : جواب عمومی معادله همگن متناظر

y_p : جواب خصوصی معادله غیرهمگن

توجه:

اگر در معادله غیرهمگن فوق $R(x) = R_1 + R_2$ باشد و y_{1p} جواب خصوصی مربوط به حالتی باشد که در سمت راست معادله فوق تابع R_1 موجود است و y_{2p} جواب خصوصی مربوط به حالتی باشد که در سمت راست معادله فقط تابع R_2 موجود است، جواب خصوصی کلی به صورت $y_p = y_{1p} + y_{2p}$ خواهد بود.

روش‌هایی در تعیین جواب خصوصی

الف) روش ضرایب نامعین:

معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت از نوع غیرهمگن زیر را در نظر بگیرید.

$$a y^{(n)} + b y^{(n-1)} + \dots + c y = R(x)$$

* اگر $R(x) = e^{px}\ \{x$ از m چند جمله‌ای درجهٔ $\}$ باشد، آن‌گاه ساختار کلی جواب خصوصی چنین پیشنهاد می‌شود:

$$x^t . e^{px} . \underbrace{\left\{ A x^m + B x^{m-1} + \dots + C \right\}}_{\text{چند جمله‌ای کامل از درجهٔ } m}$$

که در آن t تعداد ریشه‌های معادله مشخصه است که برابر عدد p شده و $A , B , \dots , C$ ضرایب نامعینی هستند که وقتی این جواب خصوصی را در معادله غیرهمگن صدق دهیم، مقادیرشان به‌دست می‌آید.

** اگر $R(x) = e^{px} . \left\{ H(x) \sin qx + K(x) \cos qx \right\}$ باشد، که در آن $H(x) , K(x)$ دو چند جمله‌ای از x هستند که درجه چند جمله‌ای قوی‌تر را m نامیده‌ایم، آن‌گاه جواب خصوصی چنین پیشنهاد می‌شود:

$$x^t . e^{px} . \left\{ u(x) \sin qx + v(x) \cos qx \right\}$$

که در آن t تعداد ریشه‌های معادله مشخصه است که برابر عدد $p + iq$ شده و $u(x)$ و $v(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه m می‌باشند.

مثال : جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را چگونه پیشنهاد می‌کنید؟

۱) $y'' + 3y' - 4y = x^2 e^{-x}$

حل : معادله مشخصه:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1, -4$$

مطابق * ، به ازاء $p = -1$ و چون صفر تا از ریشه‌های معادله مشخصه عدد $p = -1$ شده داریم:

$$y_p = x^0 e^{-x} \left(A x^2 + Bx + C \right)$$

۲) $y''' - 4y'' = 2x + 1 + \cos h 4x$

حل :

$$y''' - 4y'' = (2x + 1)e^{0x} + \frac{1}{2}e^{4x} \frac{1}{2}e^{-4x}$$

معادله مشخصه:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda^2(\lambda - 4) = 0 \rightarrow \lambda = 0, 0, 4$$

باید بگوییم:

$$y''' - 4y'' = (2x + 1) e^{0x} \xrightarrow{p=0\ ,*} y_{1p} = x^2 e^{0x} . (Ax + B)$$
$$= \frac{1}{2} e^{4x} \xrightarrow{p=4\ ,*} y_{2p} = x^1 . e^{4x} . (C)$$
$$= \frac{1}{2} e^{-4x} \xrightarrow{p=-4\ ,*} y_{3p} = x^0 . e^{-4x} (D)$$

و در کل:

$$y_p = y_{1p} + y_{2p} + y_{3p}$$

۳) $y'' + 2y' + 5y = e^x . (x \sin 2x - 4 \cos 2x)$

حل : معادله مشخصه:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \pm 2i$$

مطابق **، به ازاء $p = 1, q = 2$ و چون صفر تا از ریشه‌های معادله مشخصه برابر $p + iq = 1 + 2i$ شده است:

پس $(t = 0)$ لذا:

$$y_p = x^0 . e^x \left((Ax + B) \sin 2x + (Cx + D) \cos 2x \right)$$

۴) $y^{(4)} + 2y'' + y = x \cos 2x + \sin x$

حل : معادله مشخصه:

$$\lambda^4 + 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \left(\lambda^2 + 1 \right)^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i, \pm i$$

باید بگویم:

$$y^{(4)}+2y''+y=x\cos 2x \xrightarrow{p=0\,,\,q=2\ ,\ **} y_{1p}=x^0e^{0x}\left((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x\right)$$

$$y^{(4)}+2y''+y=\sin x \xrightarrow{p=0\,,\,q=1\ ,\ **} y_{2p}=x^2e^{0x}\left(E\cos x+F\sin x\right)$$

و در کل:

$$y_p=y_{1p}+y_{2p}$$

۵) $y^{(4)}-16y=e^{2x}(3x+\cos 2x)$

حل : معادله مشخصه:

$$\lambda^4-16=0\to\left(\lambda^2-4\right)\left(\lambda^2+4\right)=0\to\begin{cases}\lambda=\pm 2\\ \lambda=\pm 2i\end{cases}$$

باید بگوییم:

$$y^{(4)}-16y=3xe^{2x}\xrightarrow{p=2,*} y_{1p}=x^1.e^{2x}(Ax+B)$$

$$y^{(4)}-16y=e^{2x}\cos 2x\xrightarrow{p=2\,,\,q=2\ ,\ **} y_{2p}=x^0.e^{2x}(C\sin 2x+D\cos 2x)$$

در کل:

$$y_p=y_{1p}+y_{2p}$$

ب) روش اپراتورهای معکوس برای یافتن جواب خصوصی:

با تعریف اپراتورهای $D=\frac{d}{dx}\,,\,D^2=\frac{d^2}{dx^2},\ldots,D^n=\frac{d^n}{dx^n}$ معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت $y^{(n)}+ay^{(n-1)}+by^{(n-2)}+\ldots+cy=R(x)$ به فرم زیر بازنویسی و حل می‌گردد.

$$\left(D^n+aD^{n-1}+bD^{n-2}+\ldots+c\right)y=R(x)\ \Rightarrow\ y_p=\frac{1}{D^n+aD^{n-1}+bD^{n-2}+\ldots+c}\left(R(x)\right)$$

باتوجه به تعاریف صورت گرفته، وقتی D^n بر تابعی اثر می‌کند، یعنی قرار است n بار متوالی مشتق تابع مذکور گرفته شود و به تبع آن وقتی $\frac{1}{D^n}$ بر تابعی اثر می‌کند، یعنی قرار است n بار متوالی انتگرال تابع مورد نظر محاسبه شود، اما مشکلی که وجود دارد عملکرد تأثیر $\frac{1}{F(D)}$ بر یک تابع است.

✓ چند خاصیت اصلی اپراتور معکوس $\frac{1}{F(D)}$

① $\frac{1}{F(D)}\left(cR(x)+kS(x)\right)=c\frac{1}{F(D)}\left(R(x)\right)+k\frac{1}{F(D)}\left(S(x)\right)$

② $\frac{1}{F(D)}\left(e^{px}\right)=\frac{1}{F(P)}e^{px}$ (با شرط $F(p)\neq 0$)

③ $\frac{1}{(D-P)^k E(D)}\left(e^{px}\right)=\frac{x^k}{k!}\frac{1}{E(P)}e^{px}$ (با شرط $E(P)\neq 0$)

④ $\frac{1}{F(D)}\left(e^{px}.R(x)\right)=e^{px}\frac{1}{F(D+P)}\left(R(x)\right)$

⑤ $\frac{1}{F(D)}\left(xR(x)\right)=x\frac{1}{F(D)}\left(R(x)\right)-\frac{F'(D)}{F^2(D)}\left(R(x)\right)$

مثال : جواب خصوصی معادلات زیر را بیابید.

۱) $y'' + 3y' - y = 5e^{x}$

حل :

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 3D - 1}\left(5e^{x}\right) \xrightarrow{②} y_p = \frac{1}{(1)^2 + 3\times(1) - 1}e^{x} = \frac{1}{3}e^{x}$$

۲) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$

حل :

$$y_p = \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1}\left(e^{-x}\right) \xrightarrow{②}$$

$$y_p = \frac{1}{(-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1}e^{-x} = \frac{1}{0}e^{-x}$$ (با مخرج صفر مواجهیم)

داریم:

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^3}\left(e^{-x}\right) \xrightarrow{③} y_p = \frac{x^3}{3!}e^{-x}$$

۳) $y''' + y'' - 12y = e^{2x} + e^{x}$

حل :

$$y_p = \frac{1}{D^3 + D^2 - 12}\left(e^{2x} + e^{x}\right) = \frac{1}{D^3 + D^2 - 12}\left(e^{2x}\right) + \frac{1}{D^3 + D^2 - 12}\left(e^{x}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$= \left(\frac{1}{0}e^{2x}\right) + \frac{1}{-10}e^{x}$$

برای پیدا کردن y_{1P} (ضریب e^{2x}) می‌نویسیم:

$$\left(D^3 + D^2 - 12 \;\Big|\; \frac{D-2}{D^2 + 3D + 6}\right)$$

$$y_{1P} = \frac{1}{(D-2)\left(D^2 + 3D + 6\right)}\left(e^{2x}\right) \xrightarrow{(3)} \frac{x}{1!}\frac{1}{\left(2^2 + 3(2) + 6\right)}e^{2x} = \frac{x}{16}e^{2x}$$

پس در کل:

$$y_p = y_{1p} + y_{2p} = \frac{x}{16}e^{2x} + \frac{-1}{10}e^{x}$$

✓ چند نکته در رابطه با عملکرد اپراتور معکوس $\frac{1}{F(D)}$

الف) در محاسبه $\left\{ \begin{array}{c} \cos qx \\ \text{یا} \\ \sin qx \end{array} \right\}$ $\frac{1}{F(D)}$ نخست همه D^2ها را در $F(D)$ به $-q^2$ تبدیل می‌کنیم، اگر با انجام این کار دیگر Dای در مخرج باقی نماند،که حاصل کار یافته شده و اگر یک عبارت درجه اول از D باقی ماند ، صورت و مخرج حاصله را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم و مجدداً D^2 ایجاد شده در مخرج را به $-q^2$ تبدیل نموده و باتوجه به این‌که D داخل صورت توصیف عمل مشتق‌گیری است، حاصل کار را محاسبه می‌کنیم.

دقت کنید اگر در ابتدای کار با تبدیل D^2 به $-q^2$ با مخرج صفر مواجه شدیم، به محاسبه عبارت کمکی زیر می‌پردازیم:

$$K = \frac{1}{F(D)}\left(e^{iqx}\right)$$

در محاسبه فوق خاصیت (2) به مشکل برمی‌خورد و حتماً باید از خاصیت (3) استفاده شود.

در انتها از آن‌جا که $e^{iqx} = \cos qx + i \sin qx$ داریم:

$$\frac{1}{F(D)}(\cos qx) = \operatorname{Re}(K) \qquad \frac{1}{F(D)}(\sin qx) = \operatorname{Im}(K)$$

ب) در محاسبه $\frac{1}{F(D)}$ {چند جمله‌ای درجهٔ m از x} نخست $F(D)$ را برحسب توان‌های صعودی مرتب کرده و عمل تقسیم $1 \,\Big|\, F(D)$ را انجام می‌دهیم. تقسیم را تا جایی ادامه می‌دهیم که در خارج قسمت، به عبارت‌های بعد از D^m نرسیم، در انتها با تأثیر خارج قسمت به‌دست آمده بر «چند جمله‌ای درجهٔ m از x» مورد نظر، حاصل کار یافته می‌شود.

حالت الف) **۱) $y''' - y'' + 3y' + 2y = \sin 2x$**

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2 + 3D + 2}(\sin 2x) \xrightarrow{D^2 \to -4}$$

$$y_p = \frac{1}{-4D + 4 + 3D + 2}(\sin 2x) = \frac{1}{6 - D} \times \frac{6 + D}{6 + D}(\sin 2x)$$

$$= \frac{6 + D}{36 - D^2}(\sin 2x) \xrightarrow{D^2 \to -4} y_p = \frac{6 + D}{36 + 4}(\sin 2x) = \frac{1}{40}(6 \sin 2x + 2 \cos 2x)$$

حالت الف) **۲) $y^{(4)} - y = \cos x$**

(با مخرج صفر مواجهیم)

$$y_p = \frac{1}{D^4 - 1}(\cos x) \xrightarrow{D^2 \to -1} \frac{1}{(-1)^2 - 1}(\cos x) = \frac{1}{0}(\cos x)$$

به محاسبه عبارت کمکی می‌پردازیم:

$$K = \frac{1}{D^4 - 1}\left(e^{ix}\right) = \frac{1}{\left(D^2 - 1\right)\left(D^2 + 1\right)}\left(e^{ix}\right) = \frac{1}{\left(D^2 - 1\right)(D + 1)(D - 1)}\left(e^{ix}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\frac{x}{1!}\frac{1}{\left(i^2 - 1\right)(i + i)}\left(e^{ix}\right) = \frac{x}{-4i}\left(e^{ix}\right) = \frac{x}{4} i (\cos x + i \sin x) = \frac{x}{4} i \cos x - \frac{x}{4} \sin x$$

در نهایت:

$$y_p = \operatorname{Re}(K) = -\frac{x}{4} \sin x$$

حالت ب)

۳) $y''' - y'' + y = x^2 + x + 1$

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2 + 1}\left(x^2 + x + 1\right)$$

می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - D^2 + D^3 \\ \cline{2-2}
\underline{1 - D^2 + D^3} & 1 + D^2 + \dots \\
D^2 - D^3 & \\
\underline{D^2 - D^4 + D^5} & \\
-D^3 + D^4 - D^5 &
\end{array}$$

حال می‌گوییم:

$$y_p = \left(1 + D^2 + \dots\right)\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right) + (2) = x^2 + x + 3$$

۴) $y''' - y'' + y' + 2y = e^x \cos x$ **قاعده شماره چهار**

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2 + D + 2}\left(e^x \cos x\right) \xrightarrow{(4)} e^x \frac{1}{(D+1)^3 - (D+1)^2 + (D+1) + 2}(\cos x)$$

$$= e^x \frac{1}{D^3 + 2D^2 + 2D + 3}(\cos x) \xrightarrow{D^2 \to -1}$$

$$y_p = e^x \frac{1}{-D - 2 + 2D + 3}(\cos x) = e^x \frac{1}{(D+1)} \cdot \frac{D-1}{D-1}(\cos x)$$

$$= e^x \frac{D - 1}{\underset{-1}{\cancel{D^2}} - 1}(\cos x) = \frac{e^x}{-2}(-\sin x - \cos x)$$

۵) $y^{(6)} + y^{(4)} + y = x \sin 2x$ **قاعده شماره پنج**

$$y_p = \frac{1}{D^6 + D^4 + 1}(x \sin 2x) = x \frac{1}{D^6 + D^4 + 1}(\sin 2x) - \frac{6D^5 + 4D^3}{\left(D^6 + D^4 + 1\right)^2}(\sin 2x) \xrightarrow{D^2 \to -4}$$

$$y_p = x \frac{1}{(-4)^3 + (-4)^2 + 1}(\sin 2x) - \frac{6(-4)^2 D - 16D}{\left\{(-4)^3 + (-4)^2 + 1\right\}^2}(\sin 2x)$$

$$= \frac{x}{-47}(\sin 2x) - \frac{80D}{(-47)^2}(\sin 2x)$$

$$= \frac{-x}{47} \sin 2x - \frac{80}{(47)^2}(2 \cos 2x)$$

ج) روش لاگرانژ:

چنانچه $y_1(x), \dots, y_n(x)$ پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل مرتبه nام خطی همگن $a(x)\,y^{(n)} + \dots + c(x)\,y = 0$ باشند، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیرهمگن $a(x)\,y^{(n)} + \dots + b(x)\,y = R(x)$ به صورت $y_p = f_1(x) + \dots + f_n(x)$ قابل بیان خواهد بود که در آن توابع $f_1, \dots, f_n$ باید به طریقی مناسب به‌دست آیند.

اگر y_1 , y_2 پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)y = 0$ باشند، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن $a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = R(x)$ از رابطه :

$$y_p = -\,y_1 \int \frac{y_2 \cdot \frac{R(x)}{a(x)}}{W(x)}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 \cdot \frac{R(x)}{a(x)}}{W(x)}\,dx$$

به‌دست می‌آید که در آن $W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$ رونسکین پایه‌های جواب معادله همگن نظیر می‌باشد.

مثال : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید:

۱) $\mathbf{x^2\, y'' - 4\,x y' + 4 y = x^3}$

حل : معادله همگن متناظر (معادله مشخصه):

$$\lambda(\lambda - 1) - 4\lambda + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 , 4$$

پایه‌های جواب همگن:

$$y_1 = x^1 ,\ y_2 = x^4$$

رونسکین پایه‌های جواب:

$$w = \begin{vmatrix} x & x^4 \\ 1 & 4x^3 \end{vmatrix} = 3\,x^4$$

طبق فرمول لاگرانژ داریم:

$$y_p = -\,x^1 \int \frac{x^4 \cdot \frac{x^3}{x^2}}{3\,x^4}\,dx + x^4 \int \frac{x^1 \cdot \frac{x^3}{x^2}}{3\,x^4}\,dx = -\frac{x}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^4}{3}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} = -\frac{x^3}{2}$$

جواب عمومی:

$$y = C_1\, x^1 + C_2\, x^4 - \frac{x^3}{2}$$

۲) $\mathbf{y'' + y = \sec x}$

حل : معادله همگن متناظر (معادله مشخصه):

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\, i$$

پایه‌های جواب معادله همگن:

$$y_1 = \cos x ,\ y_2 = \sin x$$

رونکسین پایه‌های جواب:

$$w = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

طبق فرمول لاگرانژ داریم:

$$y_p = -\cos x \,.\int \frac{\sin x \,.\sec x}{1}\,dx + \sin x \int \frac{\cos x \,.\sec x}{1}\,dx = (-\cos x)(-\ln\cos x) + (\sin x)(x)$$

در نهایت داریم:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \,\mathrm{Ln}(\cos x) + x \sin x$$

جمع‌بندی در روش‌های تعیین جواب خصوصی

برخلاف روش ضرایب نامعین و اپراتورهای معکوس که تنها قادرند جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگنی را پیدا کنند که:

اولاً: ضرایب معادله اعداد ثابت هستند.

ثانیاً: طرف ثانی معادله دیفرانیسل از جنس جمع و یا ضرب توابع $\left\{\begin{matrix} \sin qx \\ \cos qx \end{matrix}\right.$ و e^{px} و $\left(Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + C\right)$ می‌باشد.

روش لاگرانژ دو محدودیت فوق را لازم ندارد، البته در روش لاگرانژ باید پایه‌های جواب معادله همگن متناظر قابل محاسبه باشد.

اما چون ما روش لاگرانژ را تنها برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دو دنبال کرده‌ایم (و برای آن فرمولی در اختیار داریم)، لذا محدودیت مرتبه دو بودن معادله را لازم داریم.

به هر حال به خاطر داشته باشید وقتی روش اپراتورهای معکوس قابل استفاده می‌باشد، بهترین روال برای یافتن جواب کلی، یافتن پایه‌های جواب، یافتن جواب خصوصی، بیان جواب عمومی معادله و احتمالاً اعمال شرایط کمکی برای یافتن ثابت‌های جواب عمومی است.

چند بحث خاص

۱) یافتن یک پایه جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی همگن از روی پایه جواب دیگر

اگر $y_1(x)$ یک پایه جواب معادله دیفرانسیل $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ باشد، پایه جواب دیگر معادله به صورت $y_2(x) = u(x)\,y_1(x)$ خواهد بود که در آن $u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\,dx$ می‌باشد.

مثال : معادله دیفرانسیل $(1+x^2)\,y'' + 2xy' - 2y = 0$ مفروض است. چنانچه بدانیم یک پایه جواب این معادله دیفرانسیل $y_1 = x$ است، پایه جواب دیگر را بیابید.

$$u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\,.dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,.\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2}\,.\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$$

بنابراین پایه جواب دوم چنین است:

$$y_2 = y_1\,.\,u(x) = x\left(-\frac{1}{x} - \tan^{-1}x\right) = -1 - x\tan^{-1}x \quad \text{یا} \quad y_2 = 1 + x\tan^{-1}x$$

۲) روش‌های کاهش مرتبه در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دو

الف) اگر معادله دیفرانسیل مرتبه دومی در قالب $F(x, y', y'')=0$ نوشته شود، (فاقد تابع یعنی y باشد) آنگاه با جانشینی $y'=v(x) \rightarrow y''=v'(x)$ معادله تبدیل به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای $v(x)$ خواهد شد.

ب) اگر معادله دیفرانسیل مرتبه دومی در قالب $F(y, y', y'')=0$ نوشته شود، (فاقد متغیر یعنی x باشد) آنگاه با جانشینی $y'=v(y) \rightarrow y''=v'(y)v(y)$ معادله تبدیل به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای $v(y)$ خواهد شد.

توجه:

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه دومی در قالب $F(y', y'')=0$ نوشته شود، (فاقد متغیر و تابع باشد) آنگاه هر دو روال فوق قابل استفاده است و ساده‌تر خواهد بود که روال الف به کار برده شود.

مثال : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

۱) $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3$

حل : معادله فاقد تابع y است لذا با جانشینی $y'=v(x) \rightarrow y''=v'(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\left(1+x^2\right)v'(x)+2x\,v(x)=x^3 \quad \Rightarrow \quad v'+\frac{2x}{1+x^2}v=\frac{x^3}{1+x^2} \quad \longrightarrow$$

معادله از نوع مرتبه اول خطی است و داریم:

$$v(x)=e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\cdot\left\{\int \frac{x^3}{1+x^2}\cdot e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}dx+c\right\}$$

$$=e^{-\ln\left(1+x^2\right)}\cdot\left\{\int \frac{x^3}{1+x^2}\cdot e^{\ln\left(1+x^2\right)}dx+c\right\}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\left\{\int \frac{x^3}{1+x^2}\left(1+x^2\right)dx+c\right\} \quad \longrightarrow$$

$$v(x)=\frac{1}{1+x^2}\left\{\frac{x^4}{4}+c\right\}=\frac{1}{4}\frac{x^4}{1+x^2}+\frac{c}{1+x^2}$$

$$y'(x)=\frac{1}{4}\frac{x^4-1+1}{1+x^2}+\frac{c}{1+x^2}=\frac{1}{4}\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)+\frac{c}{1+x^2} \quad \xrightarrow{\int}$$

$$y(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x\right)+c\tan^{-1}x+K$$

۲) $y''+y'^3y^2=0$

حل : معادله فاقد x است لذا با تغییرات

$$y'=v(y) \rightarrow y''=v'(y)\,v(y)$$

به‌دست می‌آید:

$$v'(y)\,v(y)+v^3(y)\,y^2=0 \quad \rightarrow \quad v'(y)+v^2(y)\,y^2=0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{dv}{dy}=-y^2\ v^2(y)\rightarrow\frac{dv}{-v^2(y)}=y^2\ dy\ \xrightarrow{\int}$$

$$\frac{1}{v(y)}=\frac{y^3}{3}+c\rightarrow dx=\left(\frac{y^3}{3}+c\right)dy\ \xrightarrow{\int}\ x=\frac{y^4}{12}+cy+k$$

۳) نوشتن دوجمله معادله دیفرانسیل در قالب مشتق یک حاصلضرب

گاهی می‌توان دوجمله یک معادله دیفرانسیل را به صورت مشتق حاصلضرب دو عبارت نوشته و با انتگرال‌گیری از معادله بازنویسی شده، مرتبه معادله را تقلیل داده و حل را ادامه داد.

مثال : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

۱) $\boldsymbol{\left(x^2+x\right)y''+(2x+1)y'=1}$

حل : معادله فاقد y است لذا با روش‌های کاهش مرتبه قابل حل است اما با کمی دقت می‌توان دید:

$$\left\{\left(x^2+x\right)y'\right\}'=1\ \xrightarrow{\int}\ \left(x^2+x\right)y'=x+C$$

$$y'=\frac{x}{x^2+x}+\frac{c}{\underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}}\rightarrow y'=\frac{1}{x+1}+c\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\ \xrightarrow{\int}$$

$$y=\ln(x+1)+c\left(\ln x-\ln(x+1)\right)+K$$

۲) $\boldsymbol{y^2\ y''+2yy'^2=x}$

حل : با کمی دقت ملاحظه می‌شود:

$$\left(y^2y'\right)'=x\ \xrightarrow{\int}\ y^2y'=\frac{x^2}{2}+c$$

$$y^2\ dy=\left(\frac{x^2}{2}+c\right)dx\ \xrightarrow{\int}\ \frac{1}{3}y^3=\frac{x^3}{6}+cx+K$$

۴) صدق کردن تفاضل دو جواب یک معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن در معادله همگن متناظر

چنانچه y_1, y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن زیر باشند:

$$a(x)\,y^{(n)}+b(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+c(x)\,y=R(x)$$

آنگاه y_1-y_2 در معادله دیفرانسیل همگن زیر صدق می‌کند.

$$a(x)\,y^{(n)}+b(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+c(x)\,y=0$$

و به تعبیری کلی‌ترین بیان y_1-y_2، همان جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن اخیر خواهد بود.

مثال : معادله دیفرانسیل $2y'' + y' - 3y = R(x)$ دارای دو جواب y_1 , y_2 می‌باشد. به‌طوری که $\lim\limits_{x \to \infty} y_1 , y_2 = 0$ است کلی‌ترین بیان $(y_1 - y_2)$ چگونه است؟

حل : کلی‌ترین بیان $(y_1 - y_2)$ همان جواب عمومی معادله همگن متناظر است.

معادله مشخصه:

$$2\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 , -\frac{3}{2}$$

یعنی:

$$y_1 - y_2 = Ce^x + Ke^{-\frac{3}{2}x}$$

چون طبق فرض:

$$\lim_{x \to \infty} y_1 , y_2 = 0 \to \lim_{x \to \infty} (y_1 - y_2) = 0$$

این می‌طلبد که $C = 0$، پس :

$$y_1 - y_2 = Ke^{-\frac{3}{2}x}$$

تعریف:

نقطه x_0 را یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ می‌گویند هرگاه توابع $P(x), Q(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی باشند و به تعبیری تقریباً متناظر هرگاه $Q(x)$ و $P(x)$ در نقطه x_0 دارای حد باشند.

اگر x_0 یک نقطه غیرعادی معادله باشد ولی توابع $(x - x_0)P(x)$ و $(x - x_0)^2 Q(x)$ در x_0 دارای حد باشند آنگاه x_0 را یک نقطه غیرعادی از نوع منظم گفته و در غیر این صورت x_0 را یک نقطه غیرعادی از نوع نامنظم می‌گویند.

مثال : معادله دیفرانسیل $\left(e^{3x} - 1\right) y'' - 4xy' + (\cos x - 1) y = 0$ مفروض است. نقطه $x = 0$ چگونه نقطه‌ای برای این معادله دیفرانسیل است؟

حل : اگر ضریب y'' را (1) کنیم داریم:

$$P(x) = -\frac{4x}{e^{3x} - 1} \qquad Q(x) = \frac{\cos x - 1}{e^{3x} - 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-4x}{e^{3x} - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \to 0} \frac{-4}{3e^{3x}} = \frac{-4}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^{3x} - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{H0P}} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{3e^{3x}} = 0$$

پس $x = 0$ نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل مذکور است.

یک قضیه

اگر x_0 یک نقطه عادی معادله مذکور باشد جواب معادله حول x_0 دارای بسط تیلور بوده و به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ نوشته می‌شود که در آن $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ضرایب جملات سری فوریه بوده و شعاع همگرایی این جواب برابر min فاصله x_0 تا تمامی تکین‌های معادله اعم از حقیقی و مختلط خواهد بود.

مثال : معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y'' - e^x y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2 \end{cases}$ مفروض است. در بسط مک لوران جواب این معادله ضریب جمله x^3 را بیابید.

حل : بسط مک لوران جواب به‌صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد که در آن:

$$a_0 = \frac{y(0)}{0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = \frac{2}{1!} = 2$$

$$\xrightarrow{x=0} y''(0) - e^0 y'(0) + 2y(0) = 0 \to y''(0) = 0 \to a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = 0$$

از معادله مشتق می‌گیریم و در $x=0$ داریم:

$$y''' - e^x\, y' - e^x\, y'' + 2y' = 0 \xrightarrow{x=0} y'''(0) - e^0 \underset{2}{\cancel{y'(0)}} - e^0 \underset{0}{\cancel{y''(0)}} + 2\underset{2}{\cancel{y'(0)}} = 0 \to y'''(0) = -2$$

$$\to a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{-1}{3}$$

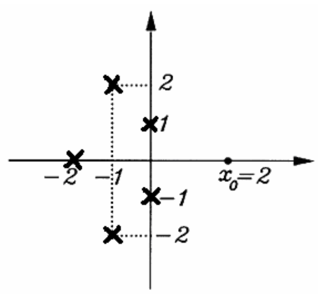
پس در حقیقت داریم:

$$y = 1 + 2x + 0x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \ldots$$

مثال : معادله دیفرانسیل $y=0$ $(x^2+1)y'' + \frac{1}{x^2+2x+5}y' + \frac{1}{x+2}$ مفروض است. چنانچه جواب این معادله را به صورت سری توانی و به فرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ بنویسیم، شعاع همگرایی این جواب چقدر است؟

حل :

$$\text{نقاط تکین معادله}\begin{cases} x^2+1=0 \to x=\pm i \\ x^2+2x+5=0 \to x=-1\pm 2i \\ x+2=0 \to x=-2 \end{cases}$$



ما بسط جواب را حول نقطه $x_0 = 2$ می‌خواهیم.

فاصله x_0 تا نقاط تکین 4 ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{5}$ می‌باشد.

$\min =$ اعداد فوق = شعاع همگرایی $\sqrt{5}$

(نقاط تکین با $\times$ نشان داده شده)

مثال : معادله دیفرانسیل $y'' - xy = 0$ مفروض است اگر جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بنویسیم، رابطه بازگشتی مربوط به a_nها را بیابید.

حل :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \to y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

کاری می‌کنیم که توان x در همه $\sum$ها یکسان شود.

$$\longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{N=3}^{\infty} a_{N-3}\, x^{N-2} = 0$$

با بسط چند جمله اول از بعضی $\sum$ ها کاری می‌کنیم حد پایین همه‌شان یکسان شود و سپس همه را در یک $\sum$ می‌نویسیم.

$$(2)(1)a_2 x^0+\sum_{n=3}^{\infty}\left(n(n-1)a_n-a_{n-3}\right)x^{n-2}=0 \xrightarrow{\text{متحد با صفر}}$$

$$2a_2=0\rightarrow a_2=0$$

رابطه بازگشتی:

$$\forall\, n\geq 3: n(n-1)a_n-a_{n-3}=0\rightarrow a_n=\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}$$

یعنی:

$$a_3=\frac{a_0}{6},\ a_4=\frac{a_1}{12},\ a_5=\frac{\overset{0}{\cancel{a_2}}}{20},\ a_6=\frac{a_3}{30},\ \ldots$$

جواب عمومی:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots$$

$$y=a_0\overbrace{\left(1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6+\ldots\right)}^{\text{بسط مک لورن پایه جواب اول}}+a_1\underbrace{\left(x+\frac{1}{12}x^4+\ldots\right)}_{\text{بسط مک لورن پایه جواب دوم}}$$

روش فروبینیوس

اگر x_0 یک نقطه غیرعادی از نوع منظم معادله باشد، و

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)=A \qquad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)=B$$

معادله مشخصه $r^2+(A-1)r+B=0$ را حل و ریشه‌های $r_1>r_2$ آن را پیدا می‌کنیم، در این صورت پایه‌های جواب عبارتند از:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r_1}\quad,\quad y_2=Ky_1\ln(x-x_0)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r_2}$$

اگر r_1-r_2 عددی صحیح نباشد $K=0$ می‌شود.

اگر $r_1-r_2=0$، $K=1$ می‌شود.

اگر r_1-r_2 عددی صحیح باشد K در ضمن حل مساله پیدا می‌شود.

مثال : معادله دیفرانسیل $xy''+\left(3x^2+4\right)y'+(2x-1)y=0$ مفروض است. ساختار پایه‌های جواب این معادله دیفرانسیل به صورت سری حول نقطه $x=0$ چگونه خواهد بود؟

حل :

$$P(x)=\frac{3x^2+4}{x}\quad,\quad Q(x)=\frac{2x-1}{x}$$

بدیهی است در $x = 0$ نقطه غیرعادی است البته از نوع منظم زیرا:

$$\lim_{x \to 0} x\, P(x) = \lim_{x \to 0} \left(3x^2 + 4\right) = 4 = A$$

$$\lim_{x \to 0} x^2\, Q(x) = \lim_{x \to 0} x\,(2x - 1) = 0 = B$$

معادله مشخصه طبق روش فروبینیوس چنین است.

$$r^2 + (A - 1)\, r + B = 0$$

$$r^2 + 3r = 0 \rightarrow r = 0\,,\, -3$$

چون تفاضل دو ریشه عدد صحیح شده و ریشه بزرگتر $r = 0$ است پس:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+0}$$

$$y_2 = K\, y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^{n-3}$$

معادله دیفرانسیل لژاندر

یک معادله لژاندر به صورت $\left(1 - x^2\right) y'' - 2x\,y' + m(m+1)\, y = 0$ نوشته می‌شود و نقطه $x = 0$ برای آن یک نقطه عادی است. (m عدد ثابت نا منفی است)

چنانچه جواب معادله را به فرم یک سری توانی حول $x = 0$ بنویسیم، $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ ساختار قابل قبول برای جواب بوده، که در نهایت، جواب عمومی چنین خواهد شد:

$$y = C_0\left(1 - \frac{m(m+1)}{2!}\, x^2 + \frac{(m-2)\, m(m+1)(m+3)}{4!}\, x^4 - + \ldots\right) + C_1\left(x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}\, x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}\, x^5 - + \ldots\right)$$

و شعاع همگرائی این جواب $R = 1$ می‌باشد.

آنچه اهمیت دارد این است که:

وقتی m زوج باشد، پایه جواب اول از فرم سری توانی نامتناهی خارج شده و به یک چند جمله‌ای درجه m تبدیل می‌شود که فقط شامل توان‌های زوج x است.

وقتی m فرد باشد، پایه جواب دوم از فرم سری توانی نامتناهی خارج شده و به یک چند جمله‌ای درجه m تبدیل می‌شود که فقط شامل توان‌های فرد x است.

لذا در کل برای هر عدد صحیح نامنفی m، یکی از پایه‌های جواب معادله لژاندر، یک چند جمله‌ای درجه m خواهد شد و چنانچه آن‌ها را در اعداد ثابتی ضرب کنیم تا به ازاء $x = 1$ حاصلی برابر 1 داشته باشند، به آن‌ها چند جمله‌ای‌های لژاندر گفته و با $P_m(x)$ نمایش می‌دهیم.

چند جمله‌ای‌های لژاندر از رابطه زیر قابل حصول‌اند:

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m\, m!}\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2-1\right)^m$$

مثلاً داریم:

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

بدیهی است، $P_{2K}(x)$ توابعی زوج و P_{2K+1} توابعی فرد می‌باشند می‌توان نشان داد:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad \text{اگر} \\ \dfrac{2}{2m+1} & m = n \quad \text{اگر} \end{cases}$$

که به خاصیت تعامد چند جمله‌ای‌های لژاندر موسوم است.

مثلاً معادله دیفرانسیل

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + 72y = 0$$

یک معادله لژندار است به ازاء $m = 8$ لذا یکی از پایه‌های جواب یک سری توانی نامتناهی است که فقط شامل توان‌های فرد x است. و پایه جواب دیگر یک چند جمله‌ای درجه هشتم $(P_8(x))$ است که فقط شامل توان‌های زوج x است.

مثال : حاصل انتگرال‌های زیر چیست؟

$$\mathbf{1)}\ I = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sin^2 x \,.\, P_3(x)\,dx$$

حل : $\sin^2 x$ تابعی زوج است.

$P_3(x)$ تابعی فرد است.

$\sin^2 x \,.\, P_3(x)$ تابعی فرد و انتگرال آن در بازه متقارن $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ صفر خواهد بود.

$$\mathbf{2)}\ I = \int_{0}^{\pi} P_4^2(\cos x)\sin x\,dx$$

حل : با تغییر متغیر $\cos x = t$ داریم:

$$-\sin x\,dx = dt$$

$$x = 0 \to t = 1$$

$$x = \pi \to t = -1$$

به‌دست می‌آید:

$$I = \int_{1}^{-1} P_4^2(t)(-dt) = \int_{-1}^{1} P_4^2(t)\,dt = \frac{2}{2(4)+1} = \frac{2}{9}$$

معادله دیفرانسیل بسل

یک معادله بسل به صورت $x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$ نوشته می‌شود و نقطه $x = 0$ برای آن یک نقطه غیرعادی منظم است. (ν عدد ثابت نا منفی است)

چنانچه جواب معادله را به فرم یک سری توانی حول $x = 0$ بنویسیم، $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ ساختار قابل قبول برای جواب بوده و $r = \pm \nu$ به‌دست خواهد آمد.

جوابی که برای همه مقادیر ν بتواند به عنوان جواب عمومی مطرح شود به صورت زیر خواهد بود:

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

$J_\nu(x)$ تابع بسل نوع اول از مرتبه ν

$Y_\nu(x)$ تابع بسل نوع دوم از مرتبه ν

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\, m!\,\Gamma(\nu + m + 1)} x^{2m}$$

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left(J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)\right) \qquad \nu \neq 0, 1, 2, \ldots$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \text{عبارت فوق} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

به خاطر داشته باشید:

۱)

$$\begin{cases} J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x) & \nu \in N \text{ اگر} \\ \nu \notin N \text{ اگر} & \end{cases}$$

اگر $\nu \notin N$: $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ مستقل خطی بوده و می‌توانند به عنوان پایه‌های جواب معادله بسل انتخاب شوند.

۲)

$$\int x^\nu J_{\nu-1}(x)\, dx = x^\nu J_\nu(x) + C$$

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\, dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C$$

۳) توابع بسل نوع اول در $x = 0$ کراندار و توابع بسل نوع دوم در $x = 0$ بی‌کرانند و هر دو برای $x \to +\infty$ به صورت نوسانی به صفر میل می‌کنند.

۴) در معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + (2k+1) x y' + \left(m^2 x^{2r} + n^2\right) y = 0$ که در آن k, m, n, r اعداد ثابتی هستند با فرض $s = \sqrt{k^2 - n^2}$ جواب عمومی چنین خواهد شد:

$$y = x^{-k}\left(c_1 J_{\frac{s}{r}}\left(\frac{m x^r}{r}\right) + c_2 Y_{\frac{s}{r}}\left(\frac{m x^r}{r}\right)\right)$$

۵) معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + x y' + \left(-x^2 - \nu^2\right) = 0$ را معادله بسل اصلاح شده می‌گویند و جواب آن را به جای $y = c_1 J_\nu(ix) + c_2 Y_\nu(ix)$ به صورت $y = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x)$ نمایش می‌دهند.

مثال : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

۱) $9x^2y'' + 27xy' + (x-4)y = 0$

حل : می‌نویسیم:

$$x^2y'' + 3xy' + \left(\frac{x}{9} - \frac{4}{9}\right)y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2k+1 = 3 \rightarrow k = 1 \\ m^2 = \frac{1}{9} \rightarrow m = \frac{1}{3} \\ 2r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{2} \\ n^2 = -\frac{4}{9} \end{array}\right\} s = \sqrt{k^2 - n^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

لذا داریم:

$$y = x^{-1}\left(C_1 J_{\frac{2\sqrt{13}}{3}}\left(\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C_2 Y_{\frac{2\sqrt{13}}{3}}\left(\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

۲) $xy'' + y' = 9y$

حل : می‌نویسیم:

$$x^2y'' + xy' - 9xy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2k+1 = 1 \rightarrow k = 0 \\ m^2 = -9 \rightarrow m = 3i \\ 2r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{2} \\ n^2 = 0 \end{array}\right\} s = \sqrt{k^2 - n^2} = 0$$

$$y = x^{-0}\left(C_1 J_{\frac{0}{\frac{1}{2}}}\left(\frac{3ix^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C_2 Y_{\frac{0}{\frac{1}{2}}}\left(\frac{3ix^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right) = C_1 \underbrace{J_0\left(6i\sqrt{x}\right)}_{I_0\left(6\sqrt{x}\right)} + C_2 \underbrace{Y_0\left(6i\sqrt{x}\right)}_{K_0\left(6\sqrt{x}\right)}$$

توابع بسل اصلاح شده

توجه: در این نوع مسائل:

(Y , J با هم می‌آیند با یک اندیس و آرگومان)

(K , I با هم می‌آیند با یک اندیس و آرگومان)

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I_1 = \int x^4 J_1(x)dx$$

حل :

$$\int x^4 J_1(x)dx = \int \underbrace{x^2}_{u}.\underbrace{x^2.J_1(x).dx}_{dv}$$

با اعمال روش جز به جز خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 = u \\ x^2J_1(x).dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 2x \\ v = \int x^2J_1(x)dx \end{cases} \rightarrow \quad v = x^2J_2(x)$$

$$I_1 = u.v - \int v.du = x^4J_2(x) - \int 2x^3J_2(x) \quad \rightarrow \quad I_1 = x^4J_2(x) - 2x^3J_3(x) + c$$