خلاصه نکات روش‌های تحلیل سازه‌ها

گردآوری، ترجمه و تالیف: بهزاد شیرانی 09134083271

تلگرام: @DaneshAmoudCivil

اینستاگرام: @DaneshAmoud

(در صورت مشاهده غلط در روابط یا درس‌نامه به صفحات بالا اطلاع دهید تا مورد ویرایش قرار گیرد)

فهرست موضوعات

موضوع	شماره صفحه
مبحث معینی و نامعینی	۳
مبحث پایداری و ناپایداری	۴
نکاتی درباره‌ی به دست آوردن نیروهای داخلی اعضا	۵
اعضای صفر نیرویی در خرپاها	۶
نکات ترسیم دیاگرام‌های خمش و برش	۷
روش کار مجازی برای خرپاها (اعضای محوری)	۸
روش کار مجازی در قاب‌ها (اعضای چند نیرویی)	۱۰
روش تیر مزدوج	۱۳
روش لنگر سطح	۱۷
موضوعات خاص و تکنیک‌های تحلیل سازه	۲۱
محاسبه انرژی ذخیره شده	۲۲
قضیه کاستلیانو	۲۳
حل سازه‌های نامعین با روش شیب- افت	۲۴
مدل‌سازی با فنر	۲۷
خواص تقارن در سازه‌ها	۲۸
روش پخش لنگر	۳۸
خط تاثیر	۵۳
خلاصه‌ای از روش کانی	۶۲
پیوست: مقادیر و توابع خیز و شیب برای تعدادی از تیرهای متداول	۶۹

مبحث معینی و نامعینی

- به تفاضل تعداد مجهولات و معادلات در یک سازه درجه نامعینی گفته می‌شود.
- درجه نامعینی در سازه‌های دو بعدی (قاب‌ها) $DI=(r+3k)-(C+3)$
- درجه نامعینی یک خرپا $DI=(m+r)-2n$
- درجه نامعینی قاب فضایی $DI=(6m+r)-(6n+C)$

کلیه فنرهای انتقالی تکیه‌گاهی و فنرهای دورانی را حذف نموده و در انتها به تعداد درجات نامعینی می‌افزاییم.

فنر انتقالی داخلی را به یک عضو دو سر مفصل جایگزین می‌کنیم.

با کابل‌ها مانند فنر انتقالی برخورد می‌کنیم.

جهت شمارش کادر بسته اعضایی که در یک نقطه از روی یکدیگر عبور کرده‌اند $N_F-(N_m-1)$

K تعداد کادر بسته در سازه (کادر بسته شده با زمین حساب نیست)

C تعداد واکنش‌های آزاده شده ناشی از مفاصل داخلی

N_F تعداد کادرهای بسته　　m تعداد اعضا　　n تعداد مفاصل

N_m تعداد اعضایی که از روی هم عبور کرده‌اند　　r تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی

J تعداد گره‌های قاب (گره‌ی تکیه‌گاه‌ها هم مورد شمارش قرار گیرد

نکات اضافی:

تعداد معادلات شرط مفصل داخلی سه‌بعدی ۳ × (۱- تعداد اعضای متصل به مفصل)

فرمول دیگر درجه نامعینی قاب فضایی $(r+6k)-(6+C)$

فرمول دیگر برای درجه نامعینی قاب‌ها $(r+3m)-(3j+C)$

مبحث پایداری و ناپایداری

- اگر نامعینی سازه‌ای منفی شد آن سازه ناپایدار است.
- برای اتصال صحیح عضوی که خود پایدار و پیوسته است به حداقل سه عکس‌العمل به صورت سه عکس‌العمل نیرویی غیرموازی و غیرهمرس یا دو عکس‌العمل ناموازی و یک لنگر نیازمندیم.
- جهت حساب کردن درجه نامعینی داخلی از رابطه $3k - C$ استفاده می‌کنیم، اگر منفی شد این سازه ناپایدار است، در چنین حالتی این سازه به بیش‌از ۳ عکس‌العمل تکیه‌گاهی نیاز دارد.
- اگر سه مفصل در یک راستا داشته باشیم که مفصل سوم هیچ نوع قیدی نداشته باشد، این سازه ناپایدار است.
- گسترش و توسعه یک سازه پایدار و پیوسته یا سه جسم صلب می‌تواند به وسیله‌ی دو میله‌ی دو سر مفصل غیر همراستا و یک مفصل انجام گیرد.
- برای بررسی پایداری، قسمتی از سازه که خود پایدار است و به گونه‌ای مناسب به زمین متصل است را جدا می‌کنیم و فرض می‌کنیم بقیه‌ی سازه به زمین متصل است (با همان اتصالی که به قسمت جدا شده داشته است).
- اگر دو قسمت از یک سازه از طریق جسم صلب دو سر مفصل (خرپا یا میله‌ی خم شده) به هم متصل شده باشند، این جسم صلب را می‌توان به صورت یک میله‌ی دو سر مفصل در امتدادی که از دو انتهای جسم صلب بگذرد در نظر گرفت.
- دو جسم صلب برای اتصال پایدار به یکدیگر احتیاج به حداقل سه مولفه نیرویی به صورت: اتصال دو جسم به صورت گیردار، اتصال دو جسم از طریق یک مفصل و یک میله که از مفصل عبور نکند، اتصال دو جسم از طریق سه میله غیر موازی و غیر همرس، دارد. (یعنی اتصال دو جسم صلب با یک مفصل، دو میله، سه میله موازی، سه میله همرس، ناپایداری ایجاد می‌کند)
- جهت اتصال سه جسم صلب احتیاج به شش مولفه به صورت: سه مفصل غیر همراستا، دو مفصل به همراه دو میله که نقطه برخورد امتداد دو میله با دو مفصل دیگر در یک امتداد نباشد، یک مفصل و چهار میله، شش میله که دو به دو غیر موازی و غیر همرس باشند، داریم (در کل در محل برخورد امتداد هر دو میله یک مفصل مجازی تشکیل می‌شود و از آن‌جایی که نباید سه مفصل در یک راستا قرار گیرند پس مفاصل مجازی تشکیل شده نباید در یک راستا قرار گیرند.) بدین ترتیب ۴ میله موازی و یک مفصل، دو میله موازی به همراه دو مفصل که خطی که از دو مفصل می‌گذرد با دو میله دیگر موازی باشد و شش میله موازی ناپایدار هستند.

نکاتی درباره‌ی به دست آوردن نیروهای داخلی اعضا

- در صورت اعمال یک نیروی متمرکز بر روی یک مفصل خمشی، پس از جداسازی سازه از قسمت مفصل خمشی می‌توان نیروی متمرکز را به دلخواه در سمت چپ یا راست مفصل قرار داد اما اگر لنگر متمرکز در یک سمت از مفصل خمشی داشتیم نمی‌توانیم آن را جابه‌جا کنیم.
- در صورت اعمال یک لنگر متمرکز بر روی یک مفصل برشی، پس از جداسازی سازه از قسمت مفصل برشی می‌توان لنگر متمرکز را به دلخواه در سمت چپ یا راست مفصل قرار داد اما اگر نیروی متمرکز در یک سمت از مفصل برشی داشتیم نمی‌توانیم آن را جابه‌جا کنیم.
- اعضای پیوسته‌ی دو سر مفصلی که هیچ نیرویی در طول خود تحمل نمی‌کنند را می‌توان با یک نیرو در امتدادی که از دو انتهای عضو گذر کند مدلسازی کرد (نیرو در محل مفصل اشکال ندارد).
- در صورت بارگذاری نیروی گسترده خارجی عمود بر کمان یک قوس، می‌توان آن را با نیروی متمرکزی به اندازه‌ی $2qr\sin\frac{\alpha}{2}$ جایگزین نمود، α زاویه کمان قوس است.
- هنگامی که به گره‌ای سه عضو متصل باشد می‌توان نیروی این سه عضو را به صورت مثلث ترسیم کرد و می‌توان از نسبت نیروها به سینوس زوایا برای پیدا کردن نیروها استفاده نمود.

اعضای صفر نیرویی در خرپاها

- در صورت وجود فقط دو عضو غیر همراستا با هر زاویه‌ای در یک گره (به شرط اعمال نشدن هیچ نیروی خارجی به گره) هر دو عضو صفر نیرویی هستند.
- وجود فقط دو عضو غیر همراستا در یک گره و اعمال یک نیروی خارجی در راستای یکی از اعضا، عضو دیگر صفر نیرویی است (چنانچه دو نیروی خارجی اعمال شود که هر نیرو در راستای یکی از اعضا باشد، نیروی هر عضو برابر نیروی خارجی است که در آن راستا اعمال شده است).
- در صورت وجود سه عضو در یک گره، اگر دو عضو در یک راستا باشند، عضو سوم با هر زاویه‌ای صفر نیرویی است (به شرط اعمال نشدن هیچ نیروی خارجی به گره).
- اگر سازه‌ای متقارن باشد، روی محور تقارن مفصل وجود داشته باشد، بر مفصل بارگذاری خارجی وجود نداشته باشد، به مفصل چهار عضو متصل باشد که دو عضو عمود بر محور تقارن و آن دو عضو دیگر در یک راستا با هر زاویه‌ای باشند، این دو عضو دیگر صفر نیرویی هستند.

نکات ترسیم دیاگرام

- لنگر خمشی ایجاد شده درعضو زمانی مثبت است که تار پایین مقطع عضو را به کشش بیندازد.
- در انتهای آزاد اعضا در صورتی که لنگر خمشی متمرکزی وجود نداشته باشد، خمش داخلی صفر است (در صورت وجود لنگر متمرکز در انتهای آزاد عضو مقدار لنگر داخلی برابر همان لنگر متمرکز است)
- در انتهای آزاد اعضا در صورتی که نیروی متمرکزی وجود نداشته باشد، برش داخلی صفر است (در صورت وجود نیروی متمرکز در انتهای آزاد عضو مقدار برش داخلی برابر همان نیروی متمرکز است)
- در محل مفاصل و غلتک‌های داخلی در صورتی که لنگر متمرکز اثر نکند خمش داخلی صفر است و در صورتی که لنگر متمرکز داشته باشیم مقدار خمش داخلی برابر لنگر متمرکز است.
- در محل اتصال دو عضو به یکدیگر به صورت صلب (گیردار) با هر زاویه‌ای در صورتی که لنگر متمرکز اثر نکند، مقدار لنگر در دو طرف گره برابر است.
- مقدار خمش داخلی در دو طرف یک لنگر متمرکز یکسان نیست (اختلاف خمش دو طرف برابر با لنگر متمرکز است)
- برای ترسیم دیاگرام‌های خمش و برش در سازه‌های معین می‌توان فنرهای تکیه‌گاهی را به عنون تکیه‌گاه در نظر گرفت (در سازه‌های معین نیروی داخلی اعضا از سختی آن‌ها مستقل است)

روش کار مجازی برای خرپاها (اعضای محوری)

رابطه کلی برای تعیین تغییرشکل‌ها به روش کار مجازی در خرپاهای معین (نکات و تعریف پارامترها در صفحه بعد):

$$\Delta_i + W_R = \sum \frac{PL}{AE}\bar{P} + \sum \bar{P}.\alpha.L.\Delta T + \sum \bar{N}.\delta + \sum \frac{P}{k_\Delta}\bar{P}$$

Δ_i تغییرمکان در نقطه‌ی i

برای محاسبه **جابه‌جایی نسبی دو نقطه دلخواه** از یک خرپای معین، **دو بار واحد را همزمان به سمت یکدیگر یا به خلاف جهت یکدیگر به دو نقطه‌ی مربوطه در راستایی که از این دو نقطه می‌گذرد** اعمال کرده و روند کلی ذکر شده را طی می‌کنیم، Δ_i به‌دست آمده جابه‌جایی نسبی دو نقطه خواهد بود.

برای محاسبه **جابه‌جایی** یک گره از خرپا در یک راستای دلخواه، **یک بار واحد** در نقطه‌ی i **در راستایی که تغییرمکان نقطه‌ی i را در آن راستا می‌خواهیم** اعمال می‌کنیم، Δ_i به دست آمده جابه‌جایی گره مورد نظر در راستای مورد نظر

برای محاسبه **مقدار چرخش یک عضو از خرپا**، یک **زوج نیرو** عمود بر محور طولی عضو در دو انتهای آن به گونه‌ای اعمال می‌کنیم که **لنگر حاصل از این زوج نیرو واحد باشد**، Δ_i به‌دست آمده میزان چرخش عضو است.

روند حل مسئله به روش کار مجازی برای خرپاها:

۱- خرپا را تحت بارگذاری واقعی موجود حل کرده و نیروی کلیه‌ی اعضا را به‌دست می‌آوریم، نیروی اعضا را با P نمایش می‌دهیم.

۲- بارهای واقعی موجود را از روی سازه حذف کرده، بار یا بارهای واحد در نقاط مورد نظر در راستاهای مورد نظر اعمال می‌کنیم (مطابق صفحه قبل بسته به این که تغییرمکان، تغییرمکان نسبی یا دوران یک عضو از خرپا را بخواهیم تعداد، نوع و راستای بار واحد فرق می‌کند)، خرپا را تحت این نیرو یا نیروهای واحد حل کرده و نیروی اعضا در این حالت را با $\bar{P}$ یا $\bar{N}$ نمایش می‌دهیم.

۳- پارامترها در روابط مربوطه جایگذاری می‌کنیم و مقدار Δ_i را به دست می‌آوریم.

W_R مربوط به نشست‌های تکیه‌گاهی (اگر جهت نشست تکیه‌گاه هم‌جهت با عکس‌العمل تکیه‌گاه باشد، عبارت مربوطه مثبت است).

$\sum \frac{PL}{AE}\bar{P}$ مربوط به نیروی محوری در اعضای اعضا (نیروهای $P, \bar{P}$ هنگامی مثبت است که در عضو کشش ایجاد کند).

$\sum \bar{P}.\alpha.L.\Delta T$ مربوط به تغییر دمای اعضا (تغییر دما (ΔT) هنگامی مثبت است که دما افزایش داشته باشد و نیروی $\bar{P}$ هنگامی مثبت است که در عضو کشش ایجاد کند).

$\sum \bar{N}.\delta$ مربوط به نقص عضو اعضای اعضا (نقص عضو δ هنگامی مثبت است که عضو افزایش طول داشته باشد و نیروی $\bar{N}$ هنگامی مثبت است که در عضو کشش ایجاد کند).

$\sum \frac{P}{k_\Delta}\bar{P}$ مربوط به فنرهای انتقالی (اگر نیروی واقعی و مجازی در فنرها هم‌جهت بودند ضرب آن‌ها دارای علامت مثبت است).

عبارت $\sum \frac{PL}{AE}\bar{P}$ برای **عضو صفر نیرویی**، **عضو صلب** $(EA = \infty)$ و در **خرپاهای معین هنگامی که نیروی خارجی بر آن اثر نکند و فقط تحت بارگذاری‌های غیر مستقیم مانند تغییر دما، نشست یا نقص عضو باشند**، **صفر** به‌دست می‌آید (مورد آخر یعنی بارگذاری‌های غیر مستقیم برای عبارت $\sum \frac{P}{k_\Delta}\bar{P}$ نیز صادق است).

روش کار مجازی در قاب‌ها (اعضای چند نیرویی)

رابطه‌ی کلی محاسبه تغییرشکل‌ها در یک قاب معین :

$$\Delta_i + W_R = \int_0^L \frac{M\bar{M}}{EI}dx + \int_0^L \frac{V\bar{V}}{GA_s}dx + \int_0^L \frac{N\bar{N}}{AE}dx + \int_0^L \frac{T\bar{T}}{GJ}dx + \sum \frac{P\bar{P}}{k_\Delta} + \sum \frac{m\bar{m}}{k_\theta} + \sum \bar{N}\,\delta + \int_0^L \bar{N}\,.\alpha.\Delta T\,.dx$$

Δ_i تغییرمکان در نقطه‌ی i

- برای یافتن **اختلاف خیز دو طرف یک مفصل برشی** دو نیروی واحد مختلف‌الجهت دو طرف مفصل برشی وارد می‌کنیم. Δ_i به دست آمده اختلاف خیز دو طرف مفصل برشی است.
- برای یافتن **اختلاف شیب دو طرف مفصل خمشی** دو لنگر واحد مختلف‌الجهت دو طرف مفصل خمشی اعمال می‌کنیم، Δ_i به دست آمده اختلاف شیب دو طرف مفصل خمشی است.
- برای یافتن **تغییرمکان در یک نقطه**، یک بار واحد در راستای مورد نظر در آن نقطه اعمال می‌کنیم، Δ_i به دست آمده جابه‌جایی گره مورد نظر در راستای مورد نظر است.
- برای یافتن **دوران در یک نقطه** یک لنگر واحد در آن نقطه اعمال می‌کنیم، Δ_i به‌دست آمده میزان چرخش گره است.

روند حل مسئله به روش کار مجازی برای قاب‌ها:

۱- قاب را تحت بارگذاری واقعی موجود حل کرده و دیاگرام تلاش‌های داخلی (نیروی محوری، لنگر خمشی، لنگر پیچشی و نیروی برشی) کلیه‌ی اعضا را ترسیم می‌کنیم

۲- بارهای واقعی موجود را از روی قاب حذف کرده، بار یا بارهای واحد در نقاط مورد نظر در راستاهای مورد نظر اعمال می‌کنیم (مطابق بالا بسته به این که تغییرمکان، دوران، یا اختلاف شیب یا اختلاف خیز را بخواهیم تعداد، نوع و راستای بار واحد فرق می‌کند)، قاب را تحت این نیرو یا نیروهای واحد حل کرده و دیاگرام تلاش‌های داخلی را ترسیم می‌کنیم.

۳- هر کدام از عبارات موجود در رابطه‌ی کلی را که در مساله موجود بود حساب می‌کنیم.

W_R مربوط به نشست‌های تکیه‌گاهی (اگر جهت نشست تکیه‌گاه هم‌جهت با عکس‌العمل تکیه‌گاه باشد، عبارت مربوطه مثبت است).

$\int_0^L \frac{N\bar{N}}{AE}dx$ مربوط به نیروی محوری در اعضا (ضرب دیاگرام نیروی محوری واقعی در نیروی محوری مجازی تقسیم بر AE).

$\int_0^L \frac{M\bar{M}}{EI}dx$ مربوط به لنگر خمشی در اعضا (ضرب دیاگرام لنگر خمشی واقعی در لنگر خمشی مجازی تقسیم بر EI).

$\int_0^L \frac{V\bar{V}}{GA_s}dx$ مربوط به نیروی برشی در اعضا، برای مقطع مستطیل $A_s = \frac{5}{6}bh$ و برای مقطع دایره. $A_s = 0.9\pi r^2$ (ضرب دیاگرام نیروی برشی واقعی در نیروی برشی مجازی تقسیم بر GA_S).

$\int_0^L \frac{T\bar{T}}{GJ}dx$ مربوط به لنگر پیچشی در اعضا (ضرب دیاگرام لنگر پیچشی واقعی در لنگر پیچشی مجازی تقسیم بر GJ).

$\sum \bar{N}.\delta$ مربوط به نقص عضو اعضای اعضا (نقص عضو δ هنگامی مثبت است که عضو افزایش طول داشته باشد و نیروی $\bar{N}$ هنگامی مثبت است که در عضو کشش ایجاد کند).

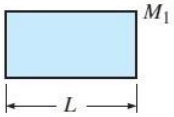
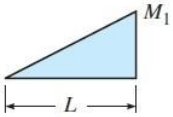
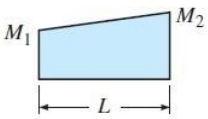
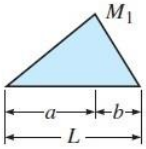
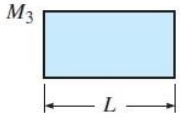
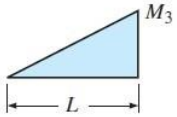
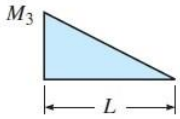
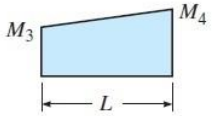
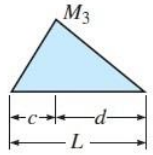
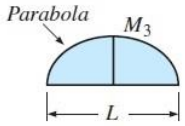
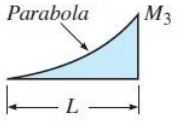
در عبارات $\sum \frac{P\bar{P}}{k_\Delta} + \sum \frac{m\bar{m}}{k_\theta}$ اگر نیروها و لنگرهای واقعی و مجازی در فنرها هم‌جهت بودند ضرب آن‌ها دارای علامت مثبت است.

اثر گرادیان حرارتی $\int_0^L \bar{M}.\alpha \frac{T_b - T_t}{h}dx + \int_0^L \bar{N}.\alpha.(T_{N.A} - T_0)\,dx$

نشست‌های تکیه‌گاهی، اثر تغییر حرارت، گرادیان حرارتی و نقص عضو در دسته بارگذاری‌های غیرمستقیم قرار می‌گیرند.

در قوس‌ها پس از به دست آوردن معادلات، برای انتگرال‌گیری dx تبدیل به $R.d\theta$ می‌شود.

Table A.2: Values of Product Integrals $\int_{x=0}^{x=L} M_Q M_P dx$

M_Q / M_P				
	M_1M_3L	$\frac{1}{2}M_1M_3L$	$\frac{1}{2}(M_1+M_2)M_3L$	$\frac{1}{2}M_1M_3L$
	$\frac{1}{2}M_1M_3L$	$\frac{1}{3}M_1M_3L$	$\frac{1}{6}(M_1+2M_2)M_3L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+a)$
	$\frac{1}{2}M_1M_3L$	$\frac{1}{6}M_1M_3L$	$\frac{1}{6}(2M_1+M_2)M_3L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+b)$
	$\frac{1}{2}M_1(M_3+M_4)L$	$\frac{1}{6}M_1(M_3+2M_4)L$	$\frac{1}{6}M_1(2M_3+M_4)L$ $+\frac{1}{6}M_2(M_3+2M_4)L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+b)$ $+\frac{1}{6}M_1M_4(L+a)$
	$\frac{1}{2}M_1M_3L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+c)$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+d)$ $+\frac{1}{6}M_2M_3(L+c)$	for $c \le a$: $\left(\frac{1}{3}-\frac{(a-c)^2}{6ad}\right)M_1M_3L$
	$\frac{2}{3}M_1M_3L$	$\frac{1}{3}M_1M_3L$	$\frac{1}{3}(M_1+M_2)M_3L$	$\frac{1}{3}M_1M_3\left(L+\frac{ab}{L}\right)$
	$\frac{1}{3}M_1M_3L$	$\frac{1}{4}M_1M_3L$	$\frac{1}{12}(M_1+3M_2)M_3L$	$\frac{1}{12}M_1M_3\left(3a+\frac{a^2}{L}\right)$

روش تیر مزدوج

جهت ترسیم تیر مزدوج ابتدا چهار ویژگی یک نقطه را مشخص می‌کنیم (Δ, θ, M, V) سپس آن‌ها را طبق الگوی زیر به ویژگی‌های متناظر تغییر می‌دهیم و نقطه‌ای را رسم می‌کنیم که مشخصات تغییریافته متناظر را داشته باشد (بارگذاری روی تیر تاثیری در ترسیم تیر مزدوج ندارد)

ویژگی‌های متناظر در تیر اصلی و تیر مزدوج
خمش در تیر اصلی ⟵ تغییرمکان در تیر مزدوج
برش در تیر اصلی ⟵ دوران در تیر مزدوج
دوران در تیر اصلی ⟵ برش در تیر مزدوج
تغییرمکان در تیر اصلی ⟵ خمش در تیر مزدوج

روند حل مسئله به روش تیر مزدوج:

۱- جهت محاسبه تغییرشکل‌های خمشی ابتدا تیر مزدوج را ترسیم می‌کنیم، سپس دیاگرام خمش تقسیم بر EI را به عنوان بارگذاری روی تیر مزدوج قرار می‌دهیم.

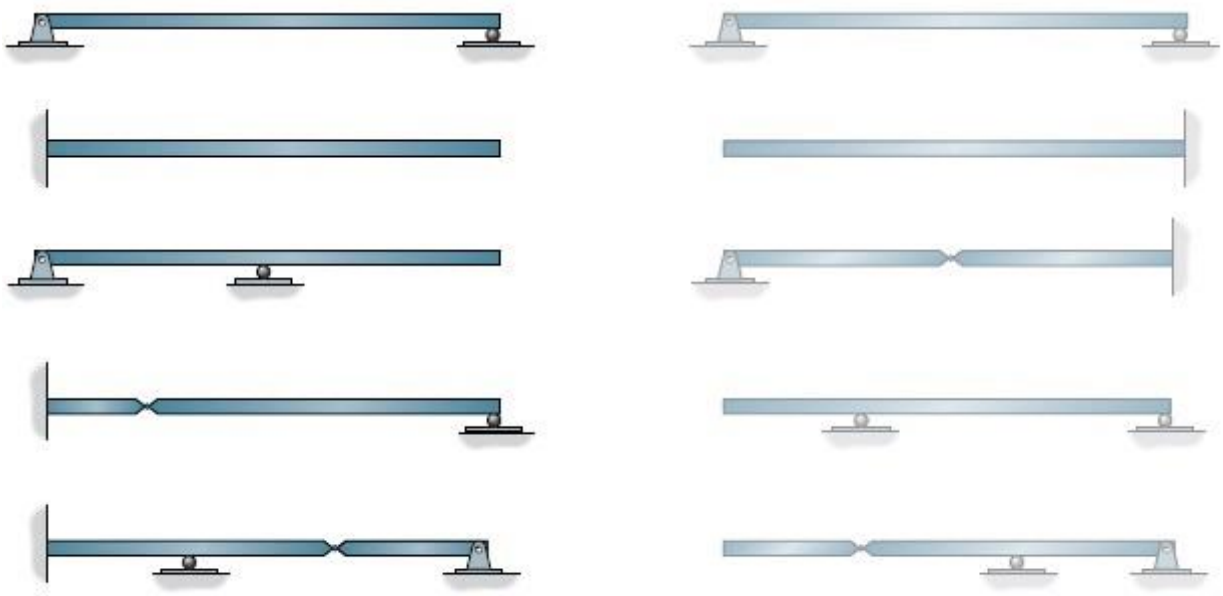
۲- هنگام بارگذاری دیاگرام $\frac{M}{EI}$ بر تیر مزدوج، نواحی مثبت دیاگرام با نیروی رو به بالا و نواحی منفی دیاگرام با نیروی رو به پایین نمایش داده می‌شود.

۳- تیر مزدوج را تحلیل می‌کنیم، خمش و برش در تیر مزدوج به ترتیب برابر است با تغییرمکان و شیب در تیر اصلی.

نکات روش تیر مزدوج

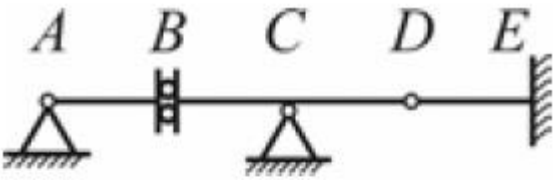
- در تیر مزدوج **لنگر مثبت یعنی تغییرمکان تیر اصلی رو به بالا** و لنگر منفی تغییرمکان رو به پایین. **برش مثبت (که تیر را ساعتگرد بچرخاند) برابر با شیب پادساعتگرد** در تیر اصلی می‌باشد.
- **اختلاف برش** در دو طرف یک نقطه در تیر مزدوج برابر **اختلاف شیب** در همان نقطه در تیر اصلی است.
- **اختلاف لنگر** در دو طرف یک نقطه در تیر مزدوج برابر با **اختلاف خیز** در دو طرف همان نقطه در تیر اصلی است.
- برای یافتن محل تغییرمکان حداکثر در تیر اصلی، معادله برش در تیر مزدوج را برابر با صفر قرار می‌دهیم.
- **نشست تکیه‌گاهی** در تیر اصلی را با **لنگر متمرکز** در تیر مزدوج نشان می‌دهیم (خیز رو به پایین در تیر اصلی باعث لنگر متمرکز منفی در تیر مزدوج می‌شود) دقت شود که در فنرهای سازه‌های معین در صورت بارگذاری غیر مستقیم مثل نشست تکیه‌گاهی نیرویی ایجاد نمی‌شود پس تغییرشکلی ندارند.

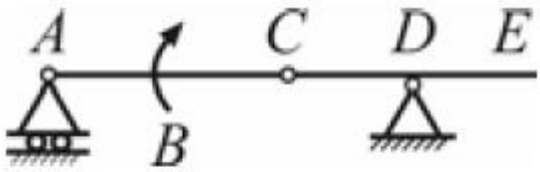
	Real Beam		Conjugate Beam	
1)	θ $\Delta = 0$	pin	V $M = 0$	pin
2)	θ $\Delta = 0$	roller	V $M = 0$	roller
3)	$\theta = 0$ $\Delta = 0$	fixed	$V = 0$ $M = 0$	free
4)	θ Δ	free	V M	fixed
5)	θ $\Delta = 0$	internal pin	V $M = 0$	hinge
6)	θ $\Delta = 0$	internal roller	V $M = 0$	hinge
7)	θ Δ	hinge	V M	internal roller

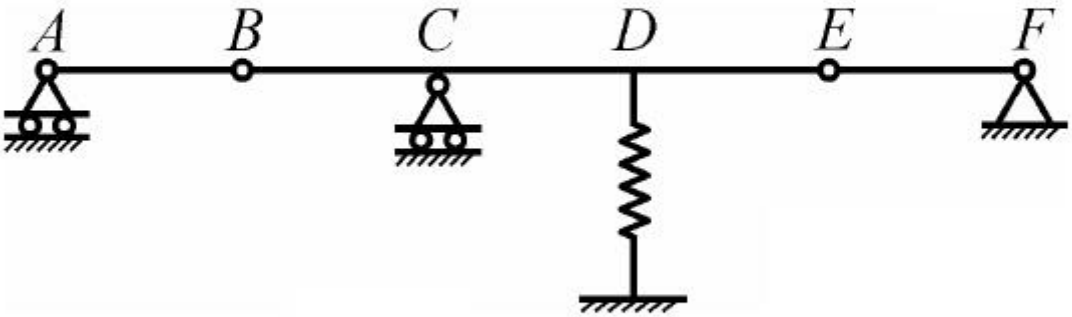


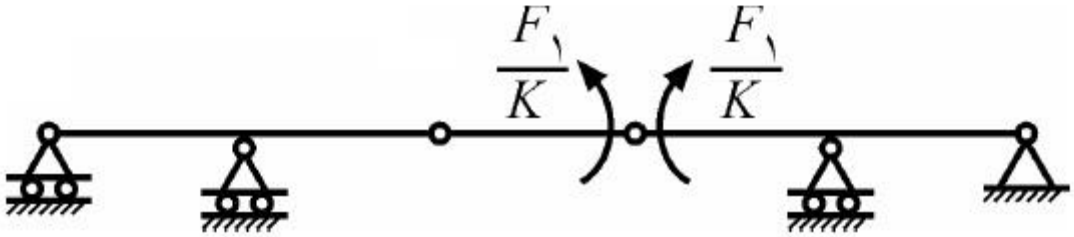
real beam

conjugate beam

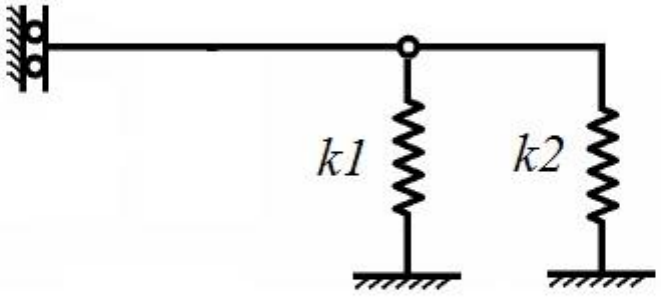


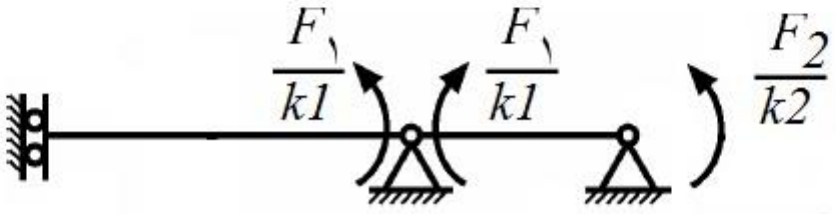


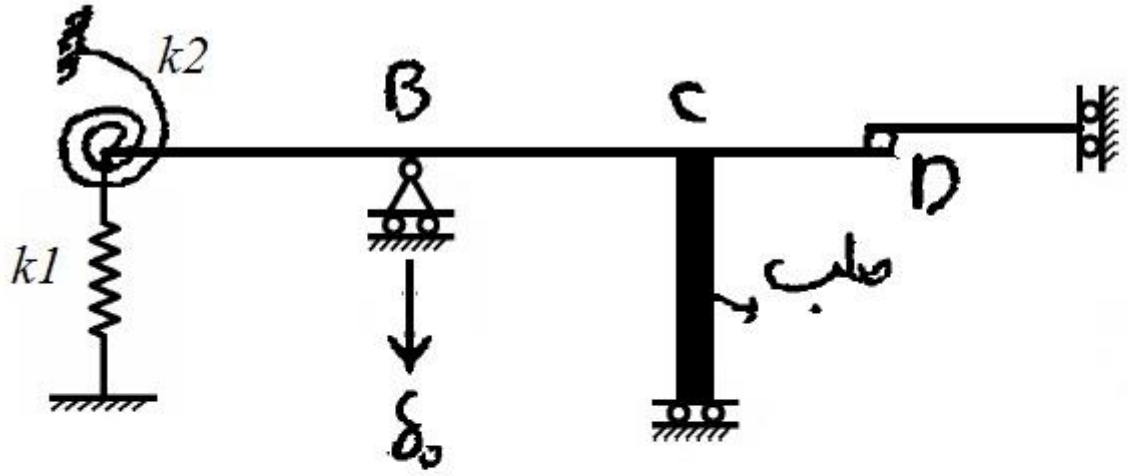


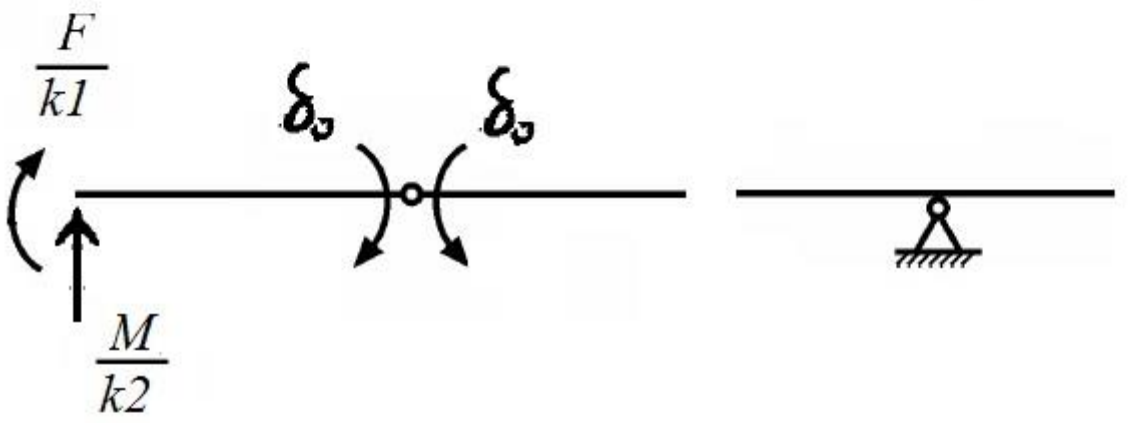


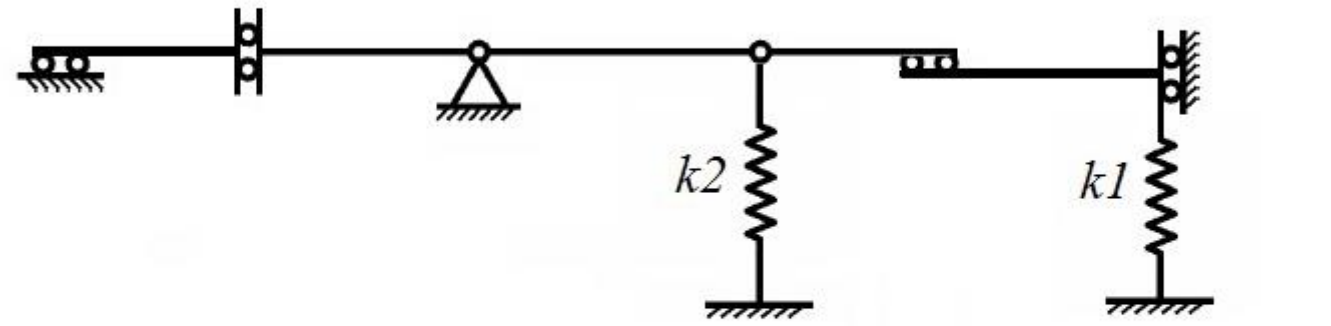
F_1 نیروی فنر است.

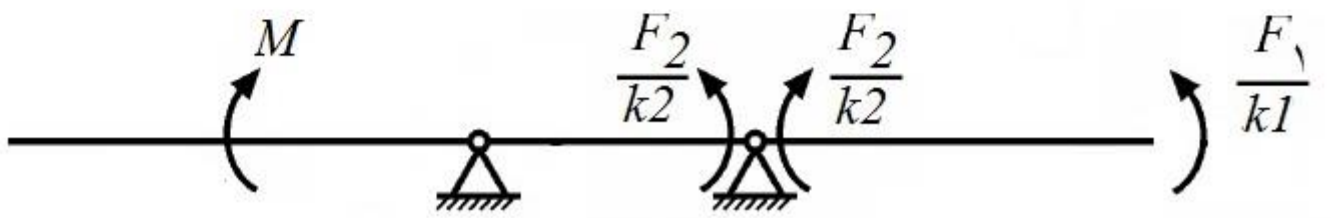





k2
B
C
D
k1
طلب
δ_B


$\frac{F}{k1}$
δ_B
δ_B
$\frac{M}{k2}$


k2
k1


M
$\frac{F_2}{k2}$
$\frac{F_2}{k2}$
$\frac{F_1}{k1}$

روش لنگر سطح

- کاربرد اصلی لنگر سطح برای تعیین معادله خیز و شیب در طول تیر می‌باشد. در این روش شیب منحنی تغییرشکل در جهت مثلثاتی (پادساعتگرد) مثبت و خیز رو به بالا مثبت فرض می‌شود.
- قضایای لنگر سطح در تیرهای پیوسته به کار می‌رود (در صورت وجود مفصل برشی یا خمشی کاربرد ندارد).

مشتق دوم تغییرمکان $y'' = \frac{M_{(x)}}{EI}$

مشتق اول تغییرمکان $y' = \theta_{(x)} = \int \frac{M_{(x)}}{EI} dx$

تغییرمکان $y_{(x)} = \int \theta_x dx = \int \left(\int \frac{M_{(x)}}{EI} dx \right) dx$

قضیه اول لنگر سطح: اخلاف شیب بین دو نقطه A و B در یک تیر پیوسته برابر سطح زیر دیاگرام لنگر تقسیم بر صلبیت خمشی $(\frac{M}{EI})$ بین این دو نقطه است.:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

اگر حاصل معادله بالا مثبت باشد، باید از روی مماس A در جهت مثلثاتی به میزان $\theta_{B/A}$ دوران کنیم تا به نقطه B (مماس نقطه B) برسیم.

قضیه دوم لنگر سطح: فاصله نقطه A روی منحنی تغییرشکل از مماس کشیده شده روی منحنی تغییرشکل در نقطه B معادل با لنگر اول سطح زیر دیاگرام $(\frac{M}{EI})$ بین این دو نقطه است.

$$t_{A/B} = \int_A^B \frac{M}{EI} x dx = A_m \bar{x}_A$$

اگر این مقدار مثبت باشد مماس ترسیمی زیر نقطه واقع شده و اگر منفی باشد مماس ترسیمی بالای نقطه واقع شده است.

$\bar{x}$ فاصله مرکز سطح دیاگرام $(\frac{M}{EI})$ تا نقطه‌ایست که فاصله‌اش را می‌خواهیم.

- مقادیر $t_{A/B}$ و $t_{B/A}$ برابر نیستند اما رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$t_{A/B}+t_{B/A}=A_m\bar{x}_A+A_m\bar{x}_B=A_m(\bar{x}_A+\bar{x}_B)=A_mL_{AB}$$

- **<u>در تیرهای کنسول</u>** از آن‌جایی که θ_A صفر و مماس A صفر درجه است می‌توان با کمک این قضایا تغییرمکان و شیب هر نقطه از تیر کنسول را حساب کرد:

$$\theta_{B/A}=\theta_B-\theta_A=\int_A^B\frac{M}{EI}dx\Rightarrow\theta_B=\int_A^B\frac{M}{EI}dx=A_m$$

$$t_{B/A}=y_B=\int_A^B\frac{M}{EI}\bar{x}_Bdx=A_m\bar{x}_B$$

شیب تکیه‌گاه A: $\theta_A=\frac{t_{B/A}}{L_{AB}}$

شیب تکیه‌گاه B: $\theta_B=\frac{t_{A/B}}{L_{AB}}$

خیز انتهای طره‌ی تیر نقطه‌ی C: $y_C=\theta_BL_{BC}+t_{C/B}=\frac{L_{BC}}{L_{AB}}t_{A/B}+t_{C/B}$

شیب انتهای طره‌ی تیر نقطه‌ی C: $\theta_C=\theta_B+\theta_{C/B}=\frac{t_{A/B}}{L_{AB}}+\theta_{C/B}$

- **<u>در تیرهای یک دهانه‌ی متقارن با بارگذاری متقارن:</u>** تغییرمکان ماکزیمم در وسط تیر اتفاق می‌افتد، در این نقطه‌ی مماس منحنی تغییرشکل افقی است بر همین اساس می‌توان گفت:

تغییرمکان ماکزیمم (نقطه‌ی C در وسط دهانه):

$$t_{A/C}=\int_A^C\frac{M}{EI}xdx=A_m\bar{x}_A$$

شیب مفصل A:

$$\theta_{A/C}=\theta_A-\theta_C=\int_A^C\frac{M}{EI}dx$$

- محاسبه‌ی شیب و خیز در هر نقطه از تیر **یک دهانه در وضعیت کلی:**

تغییرمکان نقطه‌ی C:

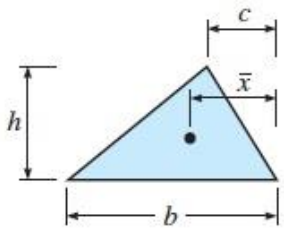
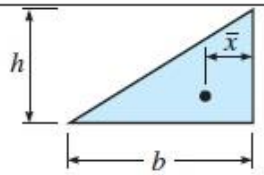
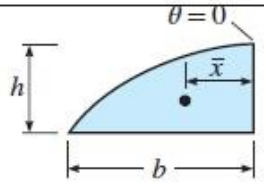
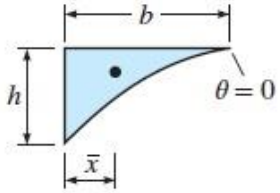
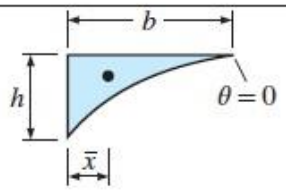
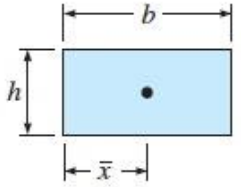
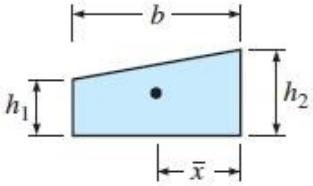
$$y_C = t_{B/A}\frac{x_C}{L_{AB}} - t_{C/A}$$

شیب نقطه‌ی C:

$$\theta_C = \frac{t_{B/A}}{L_{AB}} - \theta_{C/A}$$

- یافتن محل **تغییرمکان ماکزیمم** به صورت معادله‌ی زیر رفتار می‌کنیم:

$$\theta_{M/A} = \theta_A \Rightarrow \int_A^M \frac{M}{EI}dx - \frac{t_{B/A}}{L_{AB}} = 0$$

Shape	Figure	Area	Centroidal Distance $\bar{x}$
(*a*) Triangle		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b+c}{3}$
(*b*) Right triangle		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$
(*c*) Parabola		$\frac{2bh}{3}$	$\frac{3b}{8}$
(*d*) Parabola		$\frac{bh}{3}$	$\frac{b}{4}$
(*e*) Third-degree parabola		$\frac{bh}{4}$	$0.2b$
(*f*) Rectangle		bh	$\frac{b}{2}$
(*g*) Trapezoid		$\frac{b}{2}(h_1+h_2)$	$\frac{b(2h_1+h_2)}{3(h_1+h_2)}$

برخی از موضوعات خاص و تکنیک‌های تحلیل سازه

- در سازه‌هایی که چند قسمت به تنهایی پایدار به هم متصل شده‌اند می‌توان این قسمت‌های به تنهایی پایدار را از بقیه سازه جدا کرد و به تنهایی تحلیل کرد منتها عکس‌العمل بقیه سازه باید روی این قسمت اعمال شود.
- در تیرهای طره‌ای که بار متمرکز در انتهای آن وارد نشده (جایی در میانه‌ی تیر بار متمرکز داریم)، از آن‌جایی که قسمت بدون بار انتهای آزاد تیر دارای خمش صفر است انحنا نداشته و مستقیم می‌ماند بنابراین شیب انتهای تیر برابر شیب نقطه‌ی زیر بار است و تغییرمکان آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta_{end} = \Delta_B + (\theta_B \times x)$$

x فاصله‌ی نقطه‌ی B (که زیر بار متمرکز قرار دارد) تا انتهای تیر طره است.

- برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی می‌توان نیروهای گسترده را با نیروهای متمرکز معادل آن‌ها جایگزین کرد یا نیروی متمرکز را به جای دیگری به همراه لنگر آن منتقل کرد ولی برای محاسبه تغییرشکل‌ها نمی‌توانیم این چنین عمل کنیم و جنس و محل نیرو رو نمی‌توان تغییر داد.
- چنانچه سازه‌ای از چند قسمت به تنهایی پایدار تشکیل شده باشد و سازه معین باشد، با نشست تکیه‌گاه‌های یکی از قسمت‌ها، دیگر قسمت‌های به تنهایی پایدار بدون تغییرشکل باقی می‌مانند.

- با استفاده از **قانون جمع آثار** می‌توان به روش‌های زیر عمل کرد:

۱- تبدیل یک بارگذاری به جمع دو یا چند بارگذاری

۲- تبدیل یک بارگذاری به تفریق چند بارگذاری

۳- تبدیل یک بارگذاری با تحلیل مشکل به یک بارگذاری با تحلیل آسان که نتایج آن α برابر می‌شود. (سازه‌های متقارن که بارگذاری نصفه دارند).

۴- تبدیل یک سازه به چندسازه (در سازه‌هایی که از چند قسمت غیر صلب تشکیل شده است، در هر مرحله به غیر از یکی از قسمت‌ها بقیه را صلب می‌کنیم، سازه را تحلیل می‌کنیم و در انتها پاسخ‌های به دست آمده را جمع جبری می‌کنیم)

۵- در سازه‌های غیر صلبی که نشست تکیه‌گاهی نیز دارند، می‌توان میزان تغییر شکل کل تیر را یکبار با فرض صلب بودن سازه و تحت نشست و یکبار با فرض صلب نبودن سازه و بدون نشست محاسبه و سپس با هم جمع جبری کرد.

محاسبه انرژی ذخیره شده

- کار انجام شده توسط نیروهای داخلی را کار داخلی یا انرژی کرنشی ذخیره شده می‌نامند.
- رابطه محاسبه انرژی کرنشی:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx + \int_0^L \frac{V^2}{2GA_s}dx + \int_0^L \frac{N^2}{2AE}dx + \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}dx + \sum \frac{P^2}{2k_\Delta} + \sum \frac{m^2}{2k_\theta}$$

- استفاده از اصل جمع آثار قوا در محاسبه انرژی کرنشی مجاز نیست (مثلا نمی‌توان برای یک سازه با چند بارگذاری، انرژی کرنشی هر بارگذاری را جدا محاسبه و سپس با هم جمع کرد)
- در خرپاها رابطه کار مجازی به این صورت ساده می‌شود: $U = \sum \frac{P^2 L}{2AE} + \sum \frac{P^2}{2k_\Delta}$
- در سازه‌هایی که تنها یک نیروی متمرکز یا لنگر متمرکز به آن‌ها اعمال شده و تغییرمکان در راستای بارگذاری و دقیقا زیر نقطه بارگذاری معلوم است، انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد:

برای نیروی متمرکز $U = \frac{P \times \Delta}{2}$

برای لنگر متمرکز $U = \frac{M \times \theta}{2}$

- در سازه‌هایی که چندین نیرو یا لنگر متمرکز به سازه وارد می‌شود که تغییرشکل زیر آن نیرو یا لنگر معلوم است (در صورتی که تغییرشکل زیر بار نیرو یا لنگر متمرکز هم‌جهت بود کار انجام شده مثبت است):

$$U = \sum \frac{P_i \times \Delta_i}{2} + \sum \frac{M_i \times \theta_i}{2}$$

- اگر انرژی کرنشی در یک سازه را به صورت تابعی از تغییرشکل‌ها بنویسیم، آن‌گاه مشتق جزئی آن در یک نقطه از سازه در یک راستا برابر مقدار نیروی وارد بر آن نقطه در آن راستا می‌باشد **(قضیه اول کاستلیانو):**

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = M_i$$

- اگر انرژی کرنشی در یک سازه را به صورت تابعی از نیروها بنویسیم، آن‌گاه مشتق جزئی آن در یک نقطه از سازه نسبت به نیرو برابر با تغییرمکان در آن نقطه در همان راستا می‌شود.

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i$$

- چگالی انرژی کرنش:

$$U = \frac{1}{2}[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}]$$

قضیه کاستلیانو

- اگر دو سازه‌ی کاملا یکسان با دو بارگذاری متفاوت داشته باشیم، در حالت الاستیک کار انجام شده توسط بارگذاری سازه‌ی اول و تغییرشکل‌های سازه‌ی دوم برابر است با بارگذاری سازه دوم و تغییرشکل‌های سازه اول. اگر بر دو سازه چندین نیروی متمرکز اثر کند خواهیم داشت:

$$\sum P_1 \Delta_2 + \sum M_1 \theta_2 = \sum P_2 \Delta_1 + \sum M_2 \theta_1$$

- اگر صلبیت خمشی (EI) دو سازه فرق کند باید صلبیت یکی از سازه‌ها را به عنوان صلبیت پایه در نظر گرفت و دیگری را به آن تبدیل کرد ، اما تغییرشکل‌ها را نیز باید به همین مقدار تقسیم کرد یعنی $\frac{\Delta}{EI} \& \frac{\theta}{EI}$

حل سازه‌های نامعین با روش شیب- افت

- به مجموع تعداد دوران‌ها و تغییرمکان‌های مستقل یک سازه تعداد درجات آزادی آن سازه می‌گوییم.
- برای یافتن درجات آزادی انتقالی، ابتدا و انتهای همه‌ی اعضا را مفصلی می‌کنیم و سپس پایداری خرپای به دست آمده را بررسی می‌کنیم، چنانچه پایدار بود درجه آزادی انتقالی صفر است ولی چنانچه ناپایدار بود به تعداد قیدهایی که نیاز دارد تا پایدار شود درجات آزادی انتقالی داریم (تکیه‌گاه گیردار به تکیه‌گاه مفصلی، تکیه‌گاه مفصلی و برشی به تکیه‌گاه غلتکی تغییر می‌یابد).
- در محل تکیه‌گاه‌هایی که دوران صفر دارند درجه آزادی انتقالی نداریم.
- در محل اتصال پیوسته چند عضو به یکدیگر تنها یک درجه آزادی دورانی داریم.
- در محل اتصال چند عضو به یکدیگر به صورت مفصلی به تعداد اعضا درجه آزادی دورانی داریم.
- در محل مفصل برشی داخلی یک درجه آزادی دروانی خواهیم داشت.
- فنرهای انتقالی و دورانی در محاسبه درجه آزادی نقشی ندارند و می‌توان آن‌ها را برای محاسبه درجه آزادی حذف نمود.

- اگر در سازه‌ای درجه آزادی انتقالی صفر باشد و سازه تنها تحت اثر نیروهای متمرکز اعمال شده بر گره‌ها قرار داشته باشد، اعضا سازه مستقیم باقی مانده و برش و خمش در اعضا ایجاد نمی‌شود (یعنی اعضا خرپایی عمل می‌کنند).

روابط شیب- افت

رابطه اصلی $$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B-3\frac{\Delta}{L}\right)+MF_{AB}$$

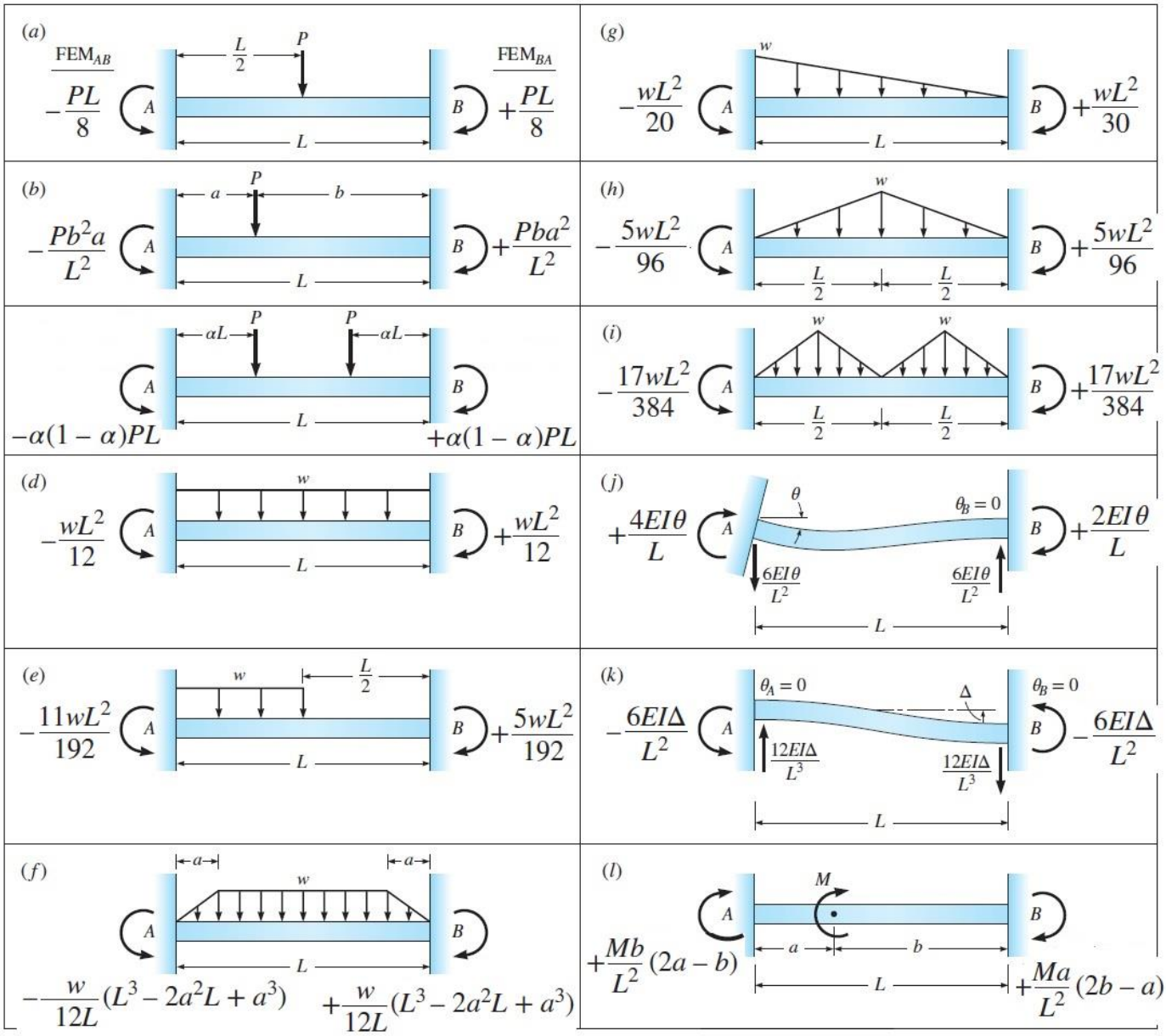
رابطه اصلاح شده برای تکیه‌گاه مفصلی در B $$M_{AB}=\frac{3EI}{L}\left(\theta_A-\frac{\Delta}{L}\right)+MF'_{AB}$$

رابطه اصلاح شده برای تکیه‌گاه برشی در B $$M_{AB}=\frac{EI}{L}\left(\theta_A-\theta_B\right)+MF''_{AB}$$

مقدار MF' برای رابطه انتها مفصل خمشی $MF_{AB}-\frac{1}{2}MF_{BA}$

مقدار MF'' برای رابطه انتها مفصل برشی $4\times MF_{AB}$

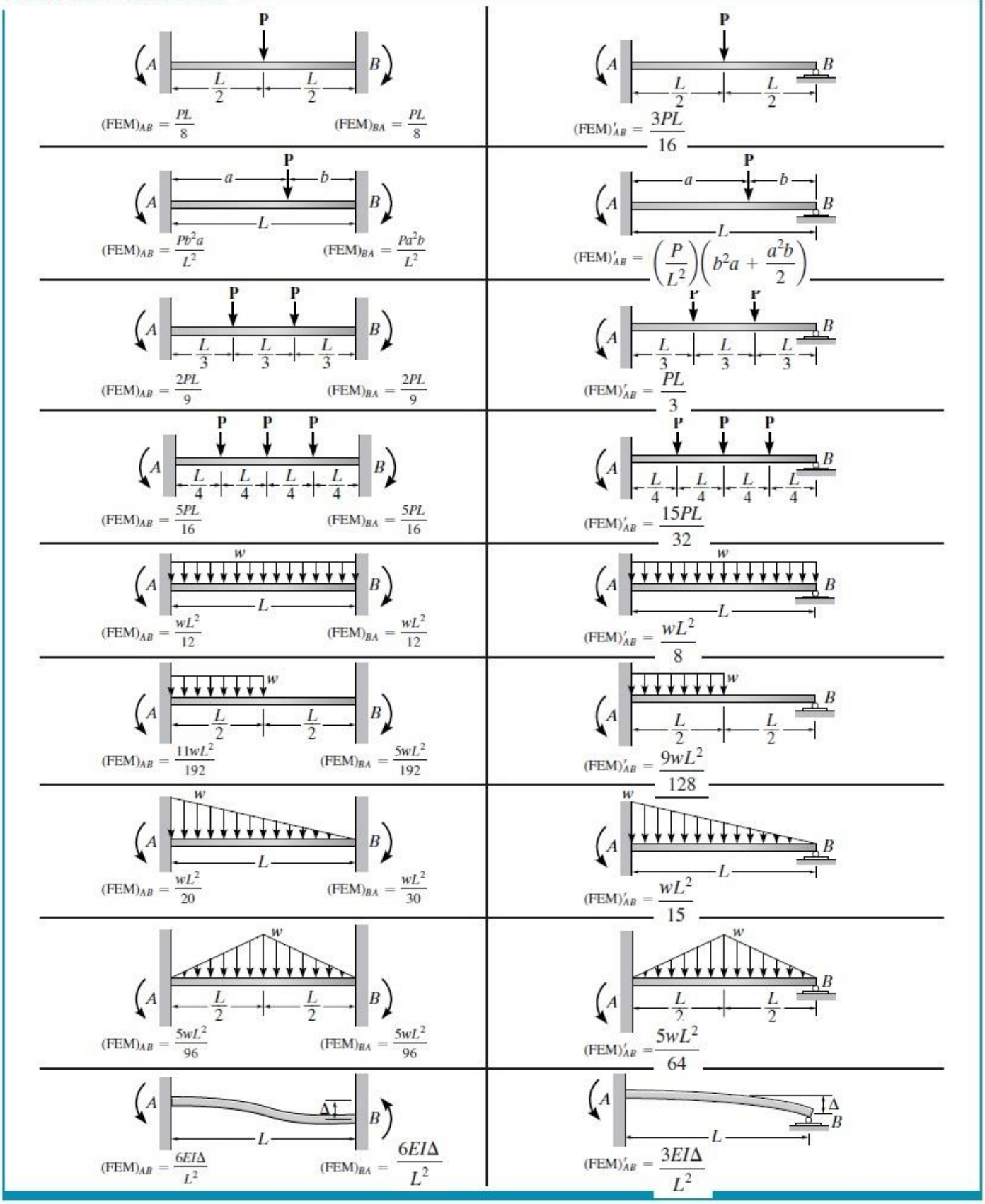
Table A.4: Fixed-End Moments



مقدار MF برای رابطه انتها مفصل خمشی $MF_{AB} - \frac{1}{2}MF_{BA}$

مقدار MF برای رابطه انتها مفصل برشی $4 \times MF_{AB}$

Fixed End Moments



ستون سمت راست مقدار MF برای رابطه انتها مفصل خمشی است.

مدل‌سازی با فنر

سیستم‌های موازی

اگر تغییرطول کلیه فنرها یکسان باشد سیستم فنرهای موازی برقرار است. در این سیستم نیروی وارد شده بر سازه به نسبت سختی بین اعضا تقسیم می‌شود و اگر بخواهیم یک سختی معادل برای سازه در نظر بگیریم باید سختی همه اعضا را با هم جمع کنیم: $k_e = \sum k_i$

سیستم‌های سری

اگر نیروی همه فنرها یکسان باشد ولی تغییرشکل فنرها یکسان نباشد، سیستم‌های سری برقرار است. در این سیستم تغییرمکان نقطه‌ی اعمال بار برابر با جمع تغییرمکان‌های تک تک فنرها است. سختی معادل در این سیستم از جمع معکوس سختی همه‌ی اعضا به دست می‌آید: $\frac{1}{k_e} = \sum \frac{1}{k_i}$

در قاب‌های برشی (قاب‌های با تیرهای صلب):

- کلیه‌ی ستون‌های متصل به یک سقف صلب در یک تراز، با هم تشکیل فنرهای موازی می‌دهند
- کلیه‌ی ستون‌های روی هم بین چند سقف صلب با هم تشکیل فنرهای سری می‌دهند

چند نکته‌ی عمومی در مدل‌سازی با فنر:

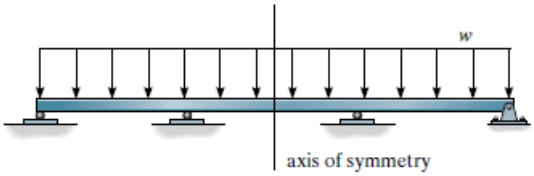
- برای مدل‌سازی سازه‌های پیچیده، ابتدا فنرهای سری را تبدیل به یک فنر معادل کرده و سپس آن را با بقیه‌ی فنرهای موازی به صورت یک فنر موازی معادل مدل می‌کنیم.
- سختی میله‌های مورب برای تبدیل به سختی در یک راستا باید در $\cos^2\theta$ ضرب شود که θ زاویه بین میله مورب و راستای مورد نظر است.

تقارن در سازه‌ها

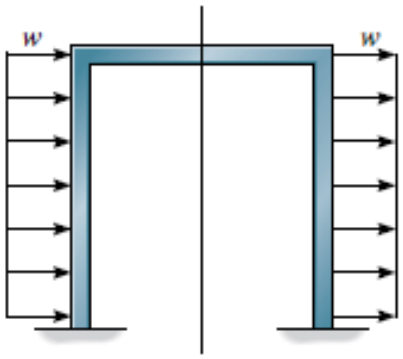
تقارن در سازه‌ها نسبت به سه ویژگی سنجیده می‌شود: ۱- اعضای سازه ۲- تکیه‌گاه‌های سازه ۳- مشخصات مصالح سازه

انواع بارگذاری وارد بر سازه:

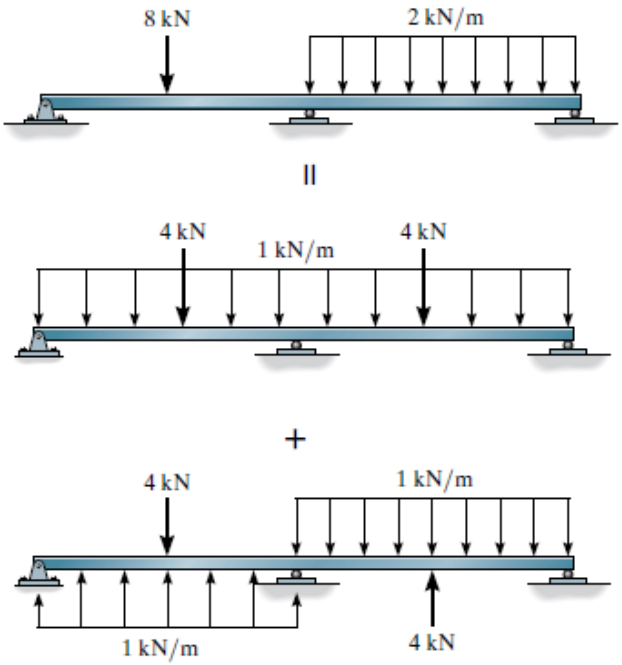
۱- **بارگذاری متقارن:** اگر کاغذ را از روی محور تقارن تا کنیم نیروهای دو طرف هم‌جهت با یکدیگر هستند.



۲- **بارگذاری پادمتقارن:** اگر کاغذ را از روی محور تقارن تا کنیم، نیروهای دو طرف خلاف جهت یکدیگر هستند.



۳- **بارگذاری کلی:** که نه متقارن است و نه پاد متقارن، این نوع بارگذاری را می‌توان به صورت جمع دو بارگذاری متقارن و پادمتقارن تبدیل کرد (شدت بارهای متقارن و پادمتقارن باید نصف شود).



در سازه‌های متقارن با بارگذاری متقارن شرایط زیر برقرار است:

- در زیر محور تقارن θ ,V ,Δ_x صفر هستند
- در سمت چپ و راست محور تقارن θ ,V ,Δ_x قرینه یکدیگر هستند.
- در سمت چپ و راست محور تقارن N ,M ,Δ_y برابر هم هستند.
- در یک سازه‌ی متقارن با بارگذاری متقارن تمامی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی متقارن‌اند، چنانچه عکس‌العملی باعث به هم خوردن تقارن بشود صفر می‌باشد. مانند لنگر و عکس‌العمل افقی تکیه‌گاهی که دقیقا زیر محور تقارن است

در این سازه‌ها می‌توان نیمه‌ای از سازه را تحلیل کرد، برای یافتن سازه‌ی نیمه:

۱- محور تقارن از یک المان افقی بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه لغزنده گیردار

۲- محور تقارن از یک المان افقی پیوسته و یک تکیه‌گاه مفصلی بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه گیردار

۳- محور تقارن از یک المان افقی دارای مفصل خمشی در زیر محور تقارن بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه غلتکی که عکس‌العملش در راستای محور طولی عضو افقی باشد

۴- محور تقارن از یک المان افقی ناپیوسته و تکیه‌گاه مفصلی درست در زیر محور تقارن بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه مفصلی

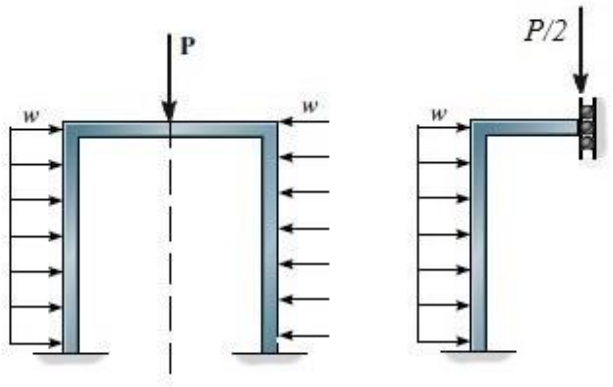
۵- نیروی متمرکز روی محور تقارن $\Longleftarrow$ نصف نیرو نگه داشته می‌شود

۶- محور تقارن از یک المان افقی و یک المان قائم با صلبیت محوری بینهایت $(EA=\infty)$ بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه گیردار

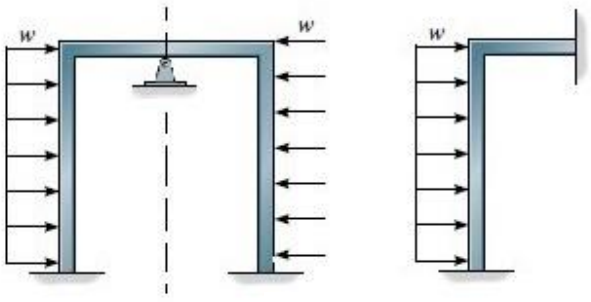
۷- محور تقارن از یک المان افقی و یک المان قائم منعطف (دارای EA) بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه لغزنده گیردار + عضو قائم با نصف سختی محوری خود

۸- محور تقارن از یک المان افقی و یک فنر دورانی بگذرد $\Longleftarrow$ فنر دورانی با سختی دو برابر + غلتک محوری

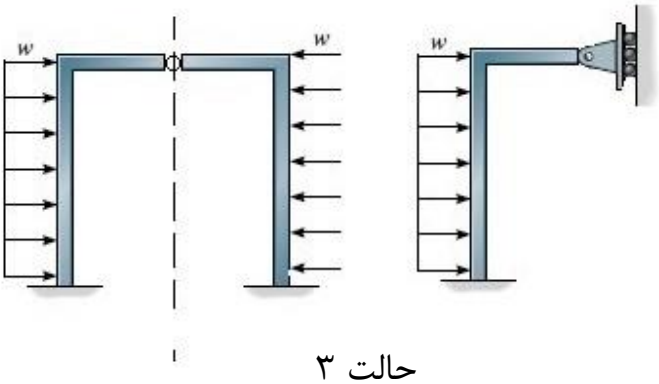
۹- محور تقارن از یک فنر انتقالی افقی بگذرد $\Longleftarrow$ فنر انتقالی که در انتها به تکیه‌گاه گیردار متصل است با سختی دو برابر



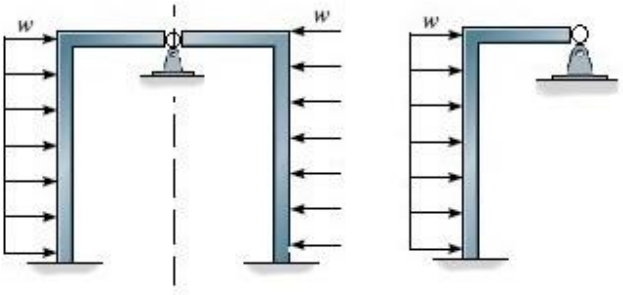
حالت ۱ و ۵



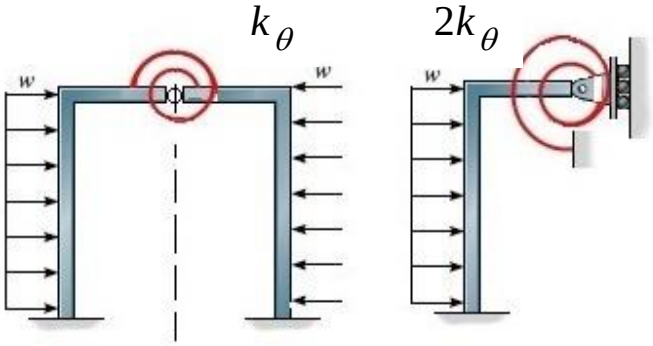
حالت ۲



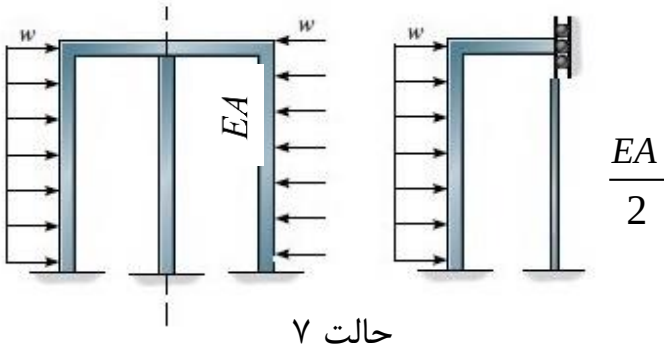
حالت ۳



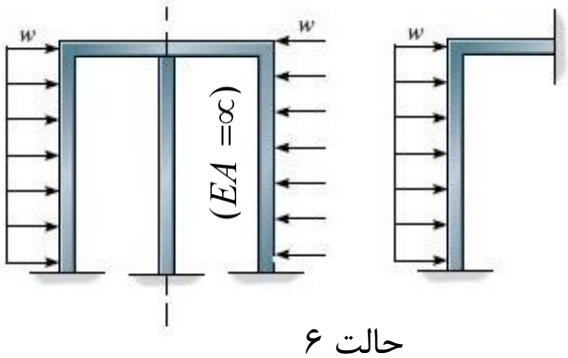
حالت ۴



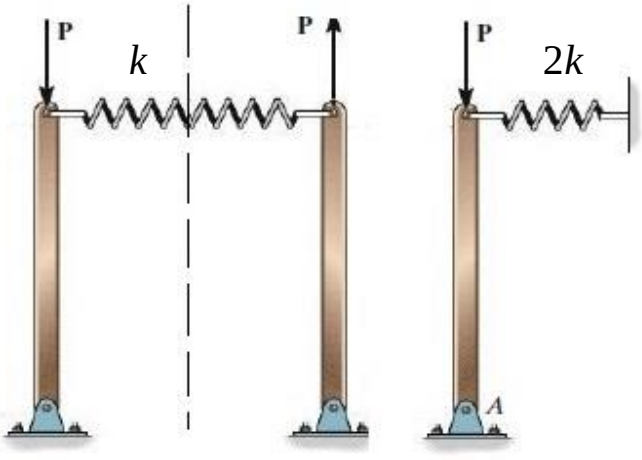
حالت ۸



حالت ۷



حالت ۶



حالت ۹

در سازه‌های متقارن با بارگذاری پادمتقارن شرایط زیر برقرار است:

- در زیر محور تقارن $N\ ,M\ ,\Delta_y$ صفر هستند
- در سمت چپ و راست محور تقارن $N\ ,M\ ,\Delta_y$ قرینه یکدیگر هستند.
- در سمت چپ و راست محور تقارن $\theta ,V\ ,\Delta_x$ برابر هم هستند.
- در یک سازه‌ی متقارن با بارگذاری پاد متقارن در صورتی که عکس‌العمل تکیه‌گاهی باعث تقارن سازه شود، صفر می‌باشد، مانند عکس‌العمل عمودی تکیه‌گاهی زیر محور تقارن.

در این سازه‌ها می‌توان نیمه‌ای از سازه‌ها را تحلیل کرد، برای یافتن سازه‌ی نیمه:

۱- محور تقارن از یک المان افقی بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه غلتکی

۲- محور تقارن از یک المان افقی پیوسته و یک تکیه‌گاه مفصلی بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه مفصلی

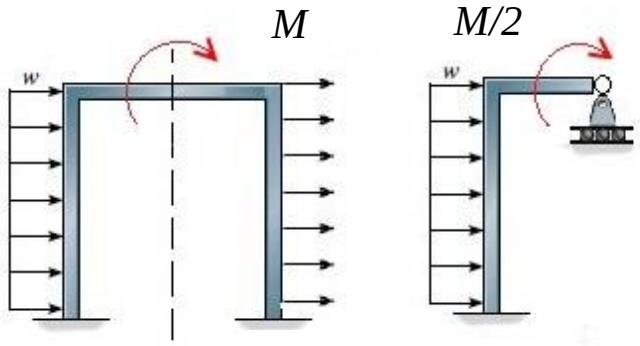
۳- محور تقارن از یک المان افقی دارای مفصل برشی در زیر محور تقارن بگذرد $\Longleftarrow$ تیر سر آزاد

۴- لنگر متمرکز روی محور تقارن $\Longleftarrow$ نصف لنگر نگه داشته می‌شود

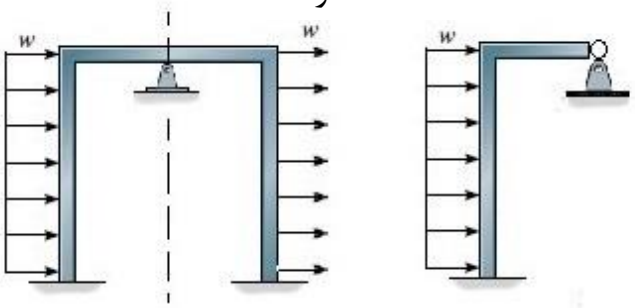
۵- محور تقارن از یک المان افقی و یک المان قائم (دارای EI) بگذرد $\Longleftarrow$ عضو قائم با نصف سختی خمشی خود

۶- محور تقارن از یک المان افقی و یک فنر دورانی بگذرد $\Longleftarrow$ فنر دورانی حذف می‌شود و تکیه‌گاه غلتکی اضافه می‌شود

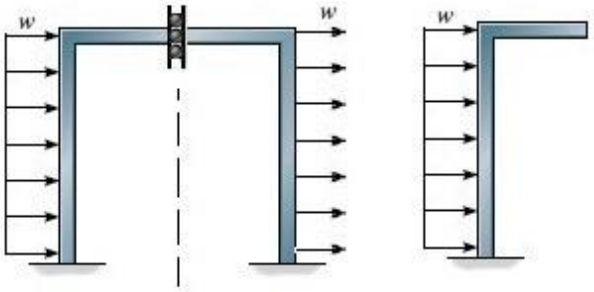
۷- محور تقارن از یک فنر انتقالی عمودی بگذرد $\Longleftarrow$ فنر حذف می‌شود و تکیه‌گاه غلتکی اضافه می‌شود



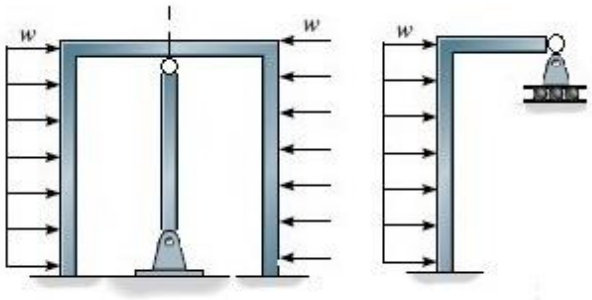
حالت ۱ و ۴

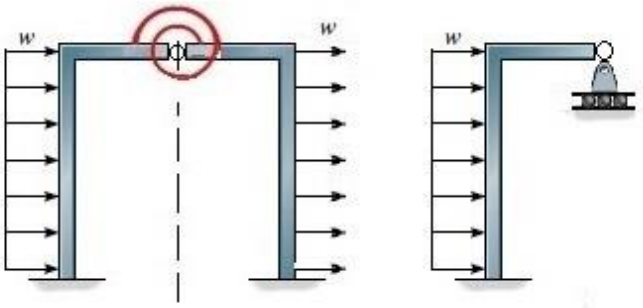


حالت ۲

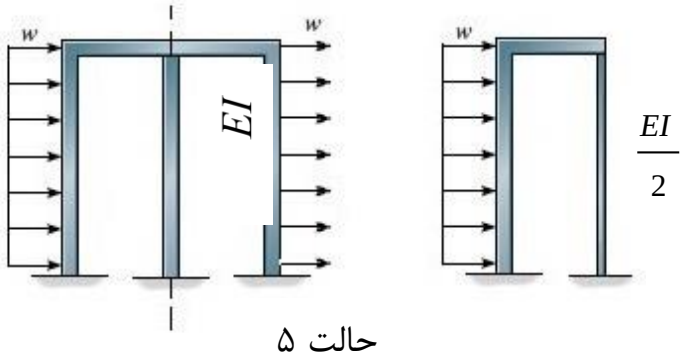


حالت ۳

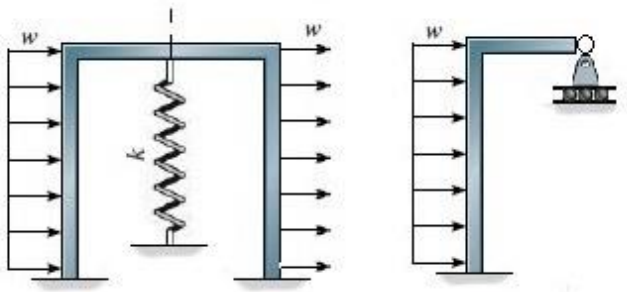




حالت ۶

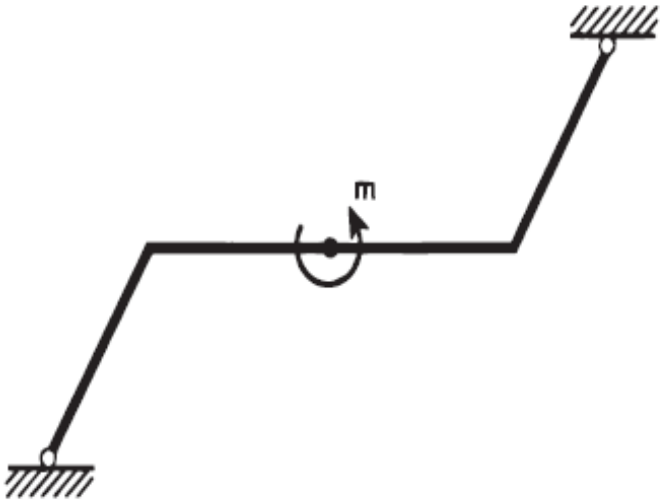


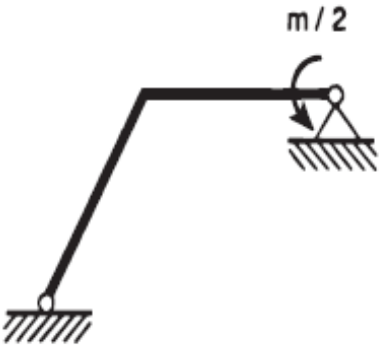
حالت ۵

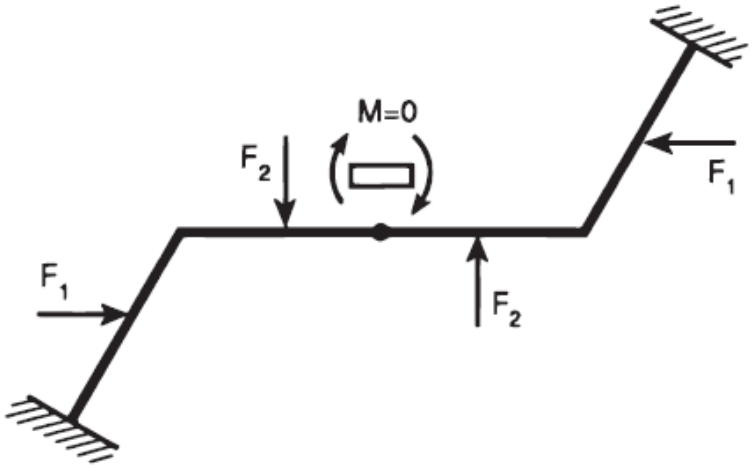


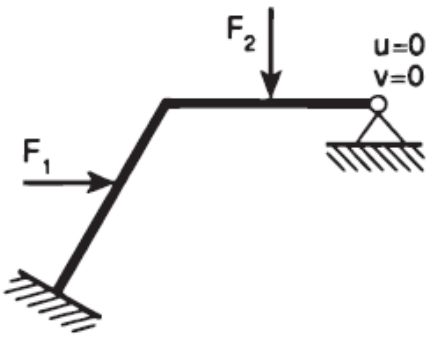
حالت ۷

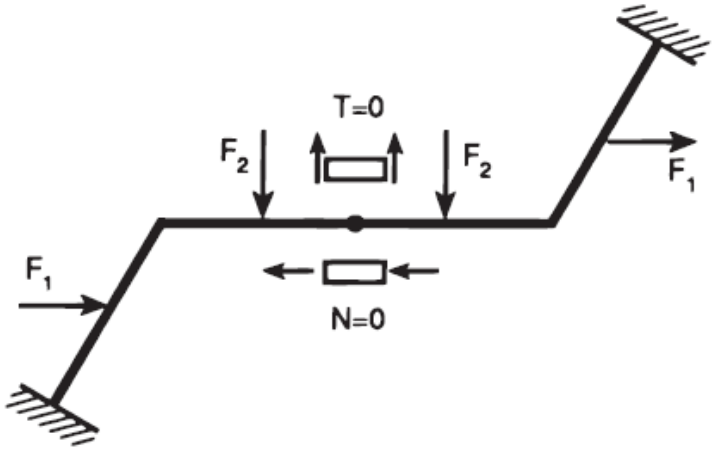
تقارن قطبی

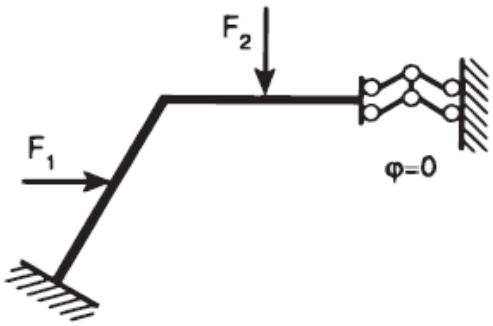


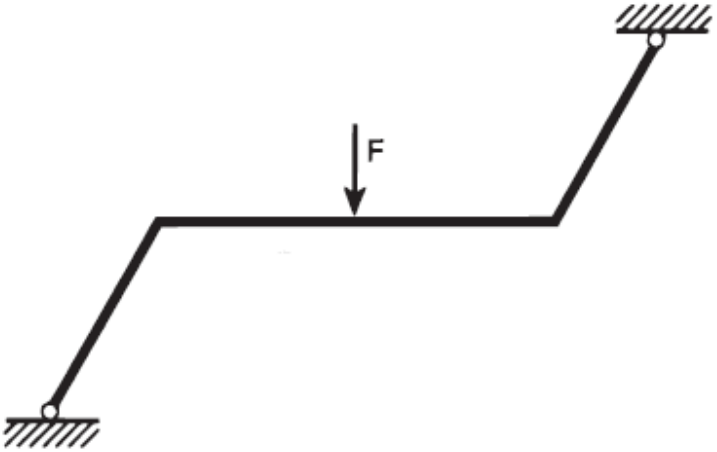


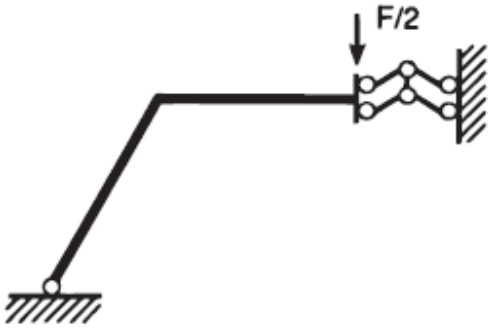


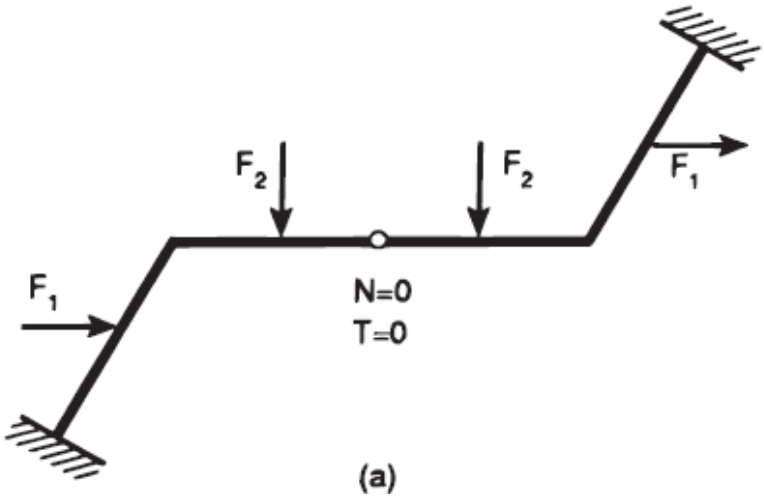




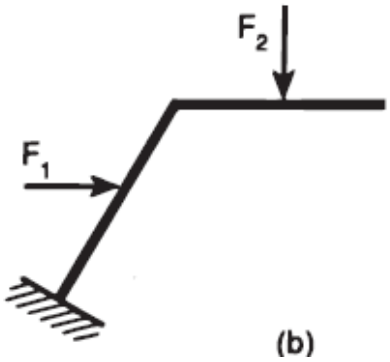








(a)

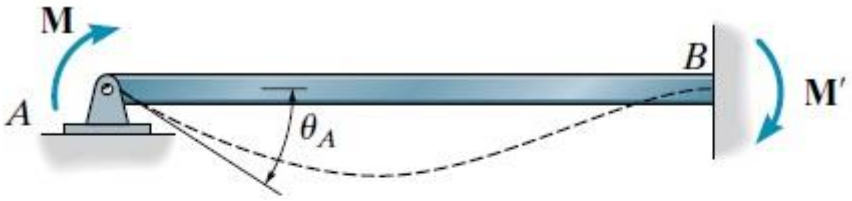


(b)

روش پخش لنگر

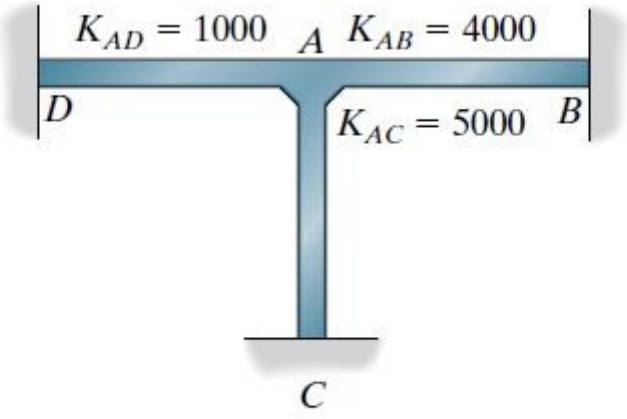
قراردادهای علامتی همانند روش شیب افت است (لنگر و چرخش ساعتگرد مثبت است).

ضریب سختی عضو A: مقدار لنگر مورد نیاز در انتهای A برای آنکه دوران $\theta = 1$ را ایجاد کند.



$$K = \frac{4EI}{L}$$
Far End Fixed

ضریب سختی گره: اگر تعدادی عضو در یک نقطه به هم به صورت گیردار متصل شده باشند و انتهای دور هر عضو نیز گیردار باشد، ضریب سختی در گره‌ی مربوطه برابر جمع ضرایب سختی انتهای نزدیک تک تک اعضایی است که به گره متصل هستند. این مقداری سختی، نشان دهنده‌ی مقدار لنگر مورد نیاز برای ایجاد $\theta = 1$ در آن گره است.



$$K_T = \Sigma K = 4000 + 5000 + 1000 = 10\,000.$$

ضریب توزیع DF: کسری از لنگر مقاوم کل که توسط یک عضو در یک گره تامین می‌شود را ضریب توزیع یا ضریب پخش می‌گویند. بدین ترتیب میزان لنگر در انتهای نزدیک عضو متصل به گره برابر است با $M_{AB} = DF_{AB} \times M_u$

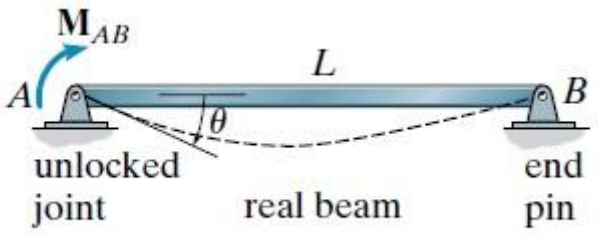
$$\mathrm{DF} = \frac{K}{\Sigma K}$$

ضریب سختی نسبی عضو K_R: اگر تمامی سازه از یک نوع مصالح ساخته شده باشد، یعنی کل اعضا دارای E یکسان باشند، مقدار 4E از صورت ضریب سختی عضو حذف می‌شود و ضریب سختی نسبی عضو به صورت $K_R = \frac{I_i}{L_i}$ تعریف می‌شود و از این ضریب برای محاسبه‌ی DF اعضا استفاده می‌کنیم.

$$K_R = \frac{I}{L}$$
Far End Fixed

ضریب حمل بار: کسری از لنگر اعمال شده بر تکیه‌گاه نزدیک A که به تکیه‌گاه دور B می‌رسد (حمل می‌شود) که در حالت کلی برابر با ۰/۵ است.

سختی اصلاح شده انتها مفصلی: اگر انتهای دور عضو مفصلی باشد می‌توان از سختی کاهش یافته استفاده کرد و ضریب انتقال به آن را به جای ۰/۵، صفر درنظر گرفت.



$$K = \frac{3EI}{L}$$
Far End Pinned or Roller Supported

اصلاح سختی سازه‌های متقارن با بارگذاری متقارن:

$$K = \frac{2EI}{L}$$
Symmetric Beam and Loading

اصلاح سختی سازه‌های متقارن با بارگذاری پادمتقارن:

$$K = \frac{6EI}{L}$$

Symmetric Beam with Antisymmetric Loading

گام‌های روش پخش لنگر برای تیرها:

۱- تعیین ضرایب توزیع برای هر دو انتهای هر دهانه از تیر (ضرایب توزیع برای تکیه‌گاه‌های مفصلی ۱ و گیردار صفر است و جمع DF ها به جز در تکیه‌گاه‌ها برابر یک می‌باشد)

۲- تعیین M^{FX} یا لنگرهای گیرداری دو انتهای هر دهانه

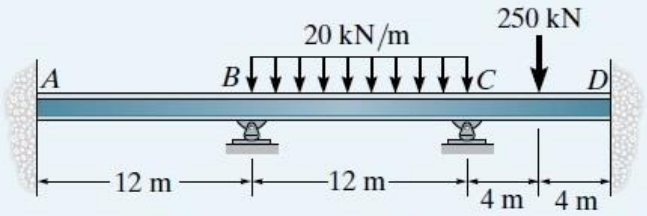
۳- جمع لنگرهای هر گره

۴- توزیع منفی جمع لنگرهای هر گره به نسبت DF انتهای هر عضو

۵- انتقال لنگر به انتهای دور هر عضو با ضریب ۰/۵

۶- تکرار مراحل از مرحله ۳ تا ۵

مثال ۱



$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \qquad K_{BC} = \frac{4EI}{12} \qquad K_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

$$\mathrm{DF}_{AB} = \mathrm{DF}_{DC} = 0 \qquad \mathrm{DF}_{BA} = \mathrm{DF}_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0.5$$

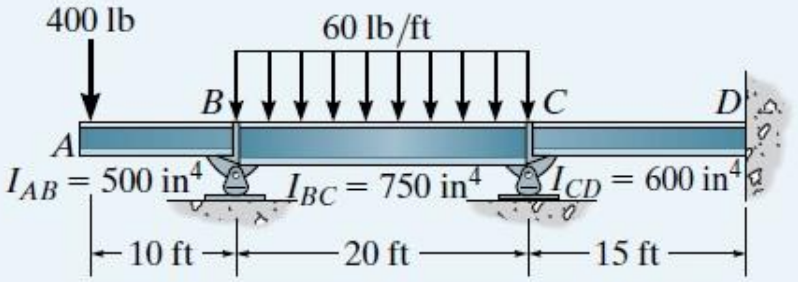
$$\mathrm{DF}_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.4 \qquad \mathrm{DF}_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.6$$

$$(\mathrm{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-20(12)^2}{12} = -240\ \mathrm{kN \cdot m} \qquad (\mathrm{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240\ \mathrm{kN \cdot m}$$

$$(\mathrm{FEM})_{CD} = -\frac{PL}{8} = \frac{-250(8)}{8} = -250\ \mathrm{kN \cdot m} \qquad (\mathrm{FEM})_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250\ \mathrm{kN \cdot m}$$

گره	A			B			C			D		
انتهاهای متصل به گره	تکیه‌گاه	AB		BA	BC		CB	CD		DC	تکیه‌گاه	
DF	**1**	**0**		**0.5**	**0.5**		**0.4**	**0.6**		**0**	**1**	
M^{FX}	0	0		0	-240		240	-250		250	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0	0	0	120	240	120	4	10	6	0	-250	-250
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	60		0	2		60	0		3	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	-60	-60	0	-1	-2	-1	-24	-60	-36	0	-3	-3
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	-0.5		0	-12		-0.5	0		-18	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0.5	0.5	0	6	12	6	0.2	0.5	0.3	0	18	18
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	3		0	0.1		3	0		0.15	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	-3	-3	0	-0.05	-0.1	-0.05	-1.2	-3	-1.8	0	-0.15	-0.15
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	-0.025		0	-0.6		-0.025	0		-0.9	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0.025	0.025	0	0.3	0.6	0.3	0.01	0.025	0.015	0	0.9	0.9
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	0.15		0	0.005		0.15	0		0.0075	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	-0.15	-0.15	0	-0.0025	-0.005	-0.0025	-0.06	-0.15	-0.09	0	-0.0075	-0.0075
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	-0.00125		0	-0.03		-0.00125	0		-.045	0	
جمع لنگر	-62.625	62.625		125.25	-125.25		281.5	-281.5		234.3	-234.3	

مثال ۲:



$$K_{BC} = \frac{4E(750)}{20} = 150E \qquad K_{CD} = \frac{4E(600)}{15} = 160E$$

$$\text{DF}_{BC} = 1 - (\text{DF})_{BA} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{DF}_{CB} = \frac{150E}{150E + 160E} = 0.484$$

$$\text{DF}_{CD} = \frac{160E}{150E + 160E} = 0.516$$

$$\text{DF}_{DC} = \frac{160E}{\infty + 160E} = 0$$

$$(\text{FEM})_{BA} = 400\ \text{lb}(10\ \text{ft}) = 4000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

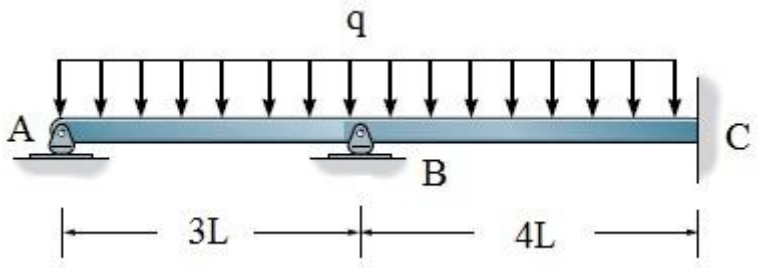
$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{60(20)^2}{12} = -2000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{60(20)^2}{12} = 2000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

گره	A		B		C		D	
انتهاهای متصل به گره	تکیه‌گاه	AB	BA	BC	CB	CD	DC	تکیه‌گاه
DF			**0**	**1**	**0.484**	**0.516**	**0**	**1**
M^{FX}			4000	-2000	2000	0	0	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			0	-2000	-2000	-968	-2000	-1032	0	0	0
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	-484	-1000	0	516	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			0	484	484	484	1000	516	0	-516	-516
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	242	242	0	258	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			0	-242	-242	-117.128	-242	-124.872	0	-258	-258
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	-58.564	-121	0	-62.436	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			0	58.564	58.564	58.564	121	62.436	0	62.436	62.436
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	29.282	29.282	0	31.218	0
جمع لنگر			4000	-3970.7	608.25	-578.4	742.8	-711.6

.

مثال ۳:



$$k_{BA}=\frac{3EI}{3L}\Rightarrow DF_{BA}=0.5 \qquad k_A=0\Rightarrow DF_A=0$$

گره B:

$$k_{BC}=\frac{4EI}{4L}\Rightarrow DF_{BC}=0.5$$

گره A :

$$k_{AB}=\frac{4EI}{3L}\Rightarrow DF_A=1$$

$$k_C=\infty\Rightarrow DF_{BA}=1$$

گره C:

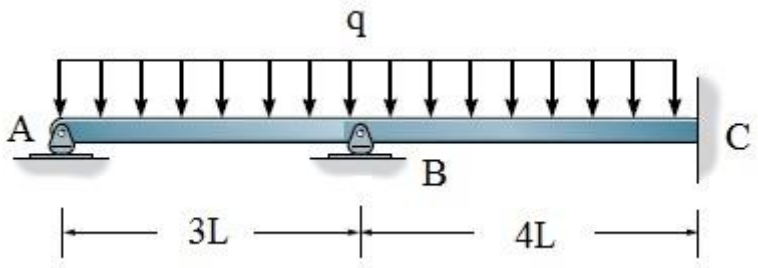
$$k_{CB}=\frac{4EI}{4L}\Rightarrow DF_{BC}=0$$

$$M^{F}_{AB}=-\frac{q(3L)^2}{12}=-0.75qL^2 \quad\therefore\quad M^{F}_{BA}=\frac{q(3L)^2}{12}=0.75qL^2$$

$$M^{F}_{BC}=-\frac{q(4L)^2}{12}=-1.33qL^2 \quad\therefore\quad M^{F}_{BA}=\frac{q(4L)^2}{12}=1.33qL^2$$

گره	A		B		C			
انتهاهای متصل به گره	تکیه‌گاه	AB	BA	BC	CB	تکیه‌گاه		
DF	**0**	**1**	**0.5**	**0.5**	**0**	**1**		
M^{FX}	0	-0.75	0.75	-1.33	1.33			
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0	0.75	0.75	0.29	0.58	0.29	0	-1.33	-1.33		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	0		0.375	0		0.145	0		
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0	0	0	-0.1875	-0.375	-0.1875	0	-0.145	-0145		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	0		0	0		-0.0937	0		
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0	0	0	0	0	0	0	0.0937	-0.0937		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0		0	0		0	0		
جمع لنگر	0	0		1.22	-1.22		1.38	-1.38		

مثال ۴



$$k_{BA}=\frac{3EI}{3L}\Rightarrow DF_{BA}=0.5 \qquad k_{A}=0\Rightarrow DF_{A}=0$$

گره B:

$$k_{BC}=\frac{4EI}{4L}\Rightarrow DF_{BC}=0.5 \qquad k_{AB}=\frac{4EI}{3L}\Rightarrow DF_{A}=1$$

گره A :

$$k_{C}=\infty\Rightarrow DF_{BA}=1$$

گره C:

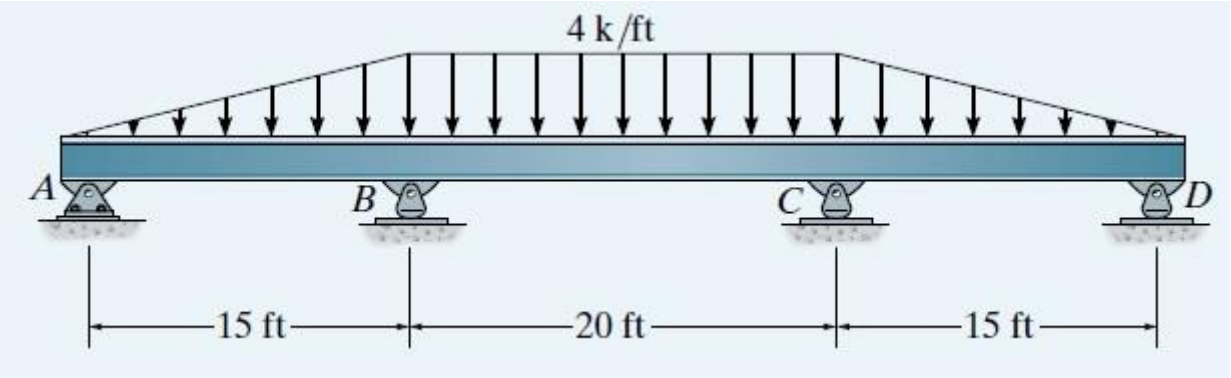
$$k_{CB}=\frac{4EI}{4L}\Rightarrow DF_{BC}=0$$

$$M^{F}_{AB}=-\frac{q(3L)^2}{12}=-0.75qL^2 \quad\therefore\quad M^{F}_{BA}=0.75qL^2-(\frac{-0.75qL^2}{2})=1.125qL^2$$

$$M^{F}_{BC}=-\frac{q(4L)^2}{12}=-1.33qL^2 \quad\therefore\quad M^{F}_{BA}=\frac{q(4L)^2}{12}=1.33qL^2$$

گره		B		C		
انتهاهای متصل به گره		BA	BC	CB	تکیه‌گاه	
DF		**0.5**	**0.5**	**0**	**1**	
M^{FX}		1.125	-1.33	1.33	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0.1025	0.205	0.1025	0	-1.33	-1.33
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	0	0.0512	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0	0	0	0	-0.0512	-0.0512
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	0	0	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره						
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر						
جمع لنگر		1.2275	-1.2275	1.3812	-1.3812	

مثال۵



$$k_A = 0 \quad \Rightarrow \quad DF_A = 0$$

گره A:

$$k_{AB} = \frac{4EI}{15} \quad \Rightarrow \quad DF_{AB} = 1$$

$$k_{BA} = \frac{3EI}{15} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{BA} = 0.5$$

گره B:

$$k_{BC} = \frac{4EI}{20} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{BC} = 0.5$$

$$k_{CB} = \frac{4EI}{20} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{CB} = 0.5$$

گره C:

$$k_{CD} = \frac{3EI}{15} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{CD} = 0.5$$

$$k_D = 0 \quad \Rightarrow \quad DF_D = 0$$

گره D:

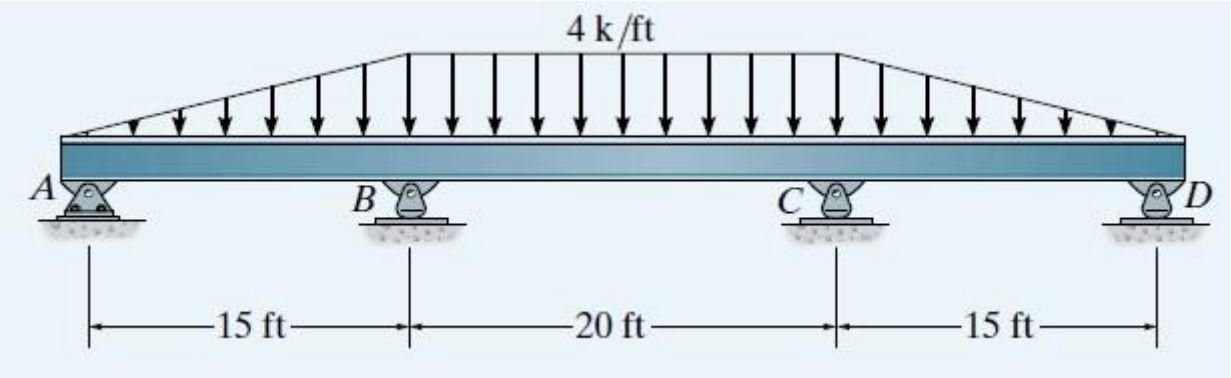
$$k_{DC} = \frac{3EI}{15} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{DC} = 1$$

$$M^F_{AB} = -\frac{4(15)^2}{30} = -30 \qquad \therefore \quad M^F_{BA} = \frac{4(15)^2}{20} = 45$$

$$M^F_{BC} = -\frac{4(20)^2}{12} = -133.333 \quad \therefore \quad M^F_{CB} = \frac{4(20)^2}{12} = 133.333$$

$$M^F_{CD} = -\frac{4(15)^2}{20} = -45 \qquad \therefore \quad M^F_{DC} = \frac{4(15)^2}{30} = 30$$

مثال۶



$$M_{AB}^{F} = -\frac{4(15)^2}{30} = -30 \qquad \therefore \quad M_{BA}^{F} = \frac{4(15)^2}{20} + \frac{4(15)^2}{2\times 30} = 60$$

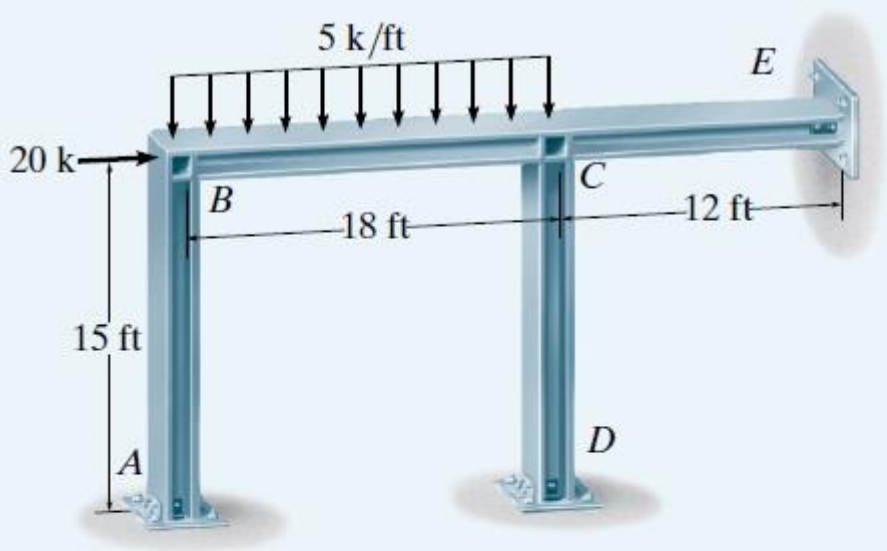
$$M_{BC}^{F} = -\frac{4(20)^2}{12} = -133.333 \quad \therefore \quad M_{CB}^{F} = \frac{4(20)^2}{12} = 133.333$$

$$M_{CD}^{F} = -\frac{4(15)^2}{20} - \frac{4(15)^2}{2\times 30} = -60 \qquad \therefore \quad M_{DC}^{F} = \frac{4(15)^2}{30} = 30$$

..

گره		B		C	
انتهاهای متصل به گره		BA	BC	CB	CD
DF		**0.5**	**0.5**	**0.5**	**0.5**
M^{FX}		60	-133.333	133.33	-60
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		36.66	73.33	36.66	-36.66	-73.33	-36.66
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-18.33	18.33	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		9.16	18.33	9.16	-9.16	-18.33	-9.16
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-4.58	4.58	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		2.29	4.58	2.29	-2.29	-4.58	-2.29
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-1.14	1.14	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0.57	1.14	0.57	-0.57	-1.14	-0.57
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-0.28	0.28	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0.14	0.28	0.14	-0.14	-.28	-0.14
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-0.07	0.07	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0.035	0.07	0.035	-0.035	-0.07	-.035
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-0.017	0.017	0
جمع لنگر		108.8	-108.8	108.8	-108.8

مثال۶: تکیه‌گاه‌های E و D را مفصلی و تکیه‌گاه A را گیردار فرض کنید.



$$K_{AB} = \frac{4EI}{15} \qquad K_{BC} = \frac{4EI}{18} \qquad K_{CD} = \frac{3EI}{15} \qquad K_{CE} = \frac{3EI}{12}$$

$$\mathrm{DF}_{AB} = 0$$

$$\mathrm{DF}_{BA} = \frac{4EI/15}{4EI/15 + 4EI/18} = 0.545$$

$$\mathrm{DF}_{BC} = 1 - 0.545 = 0.455$$

$$\mathrm{DF}_{CB} = \frac{4EI/18}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.330$$

$$\mathrm{DF}_{CD} = \frac{3EI/15}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.298$$

$$\mathrm{DF}_{CE} = 1 - 0.330 - 0.298 = 0.372$$

$$\mathrm{DF}_{DC} = 1 \qquad \mathrm{DF}_{EC} = 1$$

$$(\mathrm{FEM})_{BC} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-5(18)^2}{12} = -135 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$(\mathrm{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{5(18)^2}{12} = 135 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

گره	A		B		C			E	D
اعضا	تکیه‌گاه	AB	BA	BC	CB	CD	CE	EC	DC
DF	1	0	0.545	0.455	0.33	0.298	0.372	1	1
MF	0	0	0	-135	135	0	0	0	0
منفی مجموع لنگر	0		135		-135			0	0
توزیع لنگر اعضا	0	0	73.575	61.425	-44.55	-40.25	-50.22	0	0
انتقال به انتهای دور	0	36.7875	0	-22.275	30.7125	0	0	0	0
منفی مجموع لنگر	-36.7875		22.275		-30.7125			0	0
توزیع لنگر اعضا	-36.7875	0	12.1398	10.1351	-10.1351	-9.1523	-11425	0	0
انتقال به انتهای دور	0	6.0699	0	-5.0675	5.0675	0	0	0	0
منفی مجموع لنگر	6.0699		5.0675		-5.0675			0	0
توزیع لنگر اعضا	-6.0699	0	2.7617	2.3057	-1.6722	-1.5101	-1.8851	0	0
انتقال به انتهای دور	0	1.3808	0	-0.8361	1.1528	0	0	0	0
منفی مجموع لنگر	-1.3808		0.8361		-1.1528			0	0
توزیع لنگر اعضا	-1.3808	0	0.4556	0.3804	-0.3804	-0.3435	-0.4288	0	0
انتقال به انتهای دور	0	0.2278	0	-0.1902	0.1902	0	0	0	0
جمع لنگر	-42.23	44.46	89	-89	115	-51	-64		

مثال۷: مثال قبل را با فرض اینکه همه‌ی تکیه‌گاه‌ها گیردار باشند حل کنید.

$$k_{AB} = k_{BA} = \frac{4EI}{15} = 0.267EI$$

$$k_{BC} = k_{CB} = \frac{4EI}{18} = 0.222EI$$

$$k_{CD} = k_{DC} = \frac{4EI}{15} = 0.267EI$$

$$k_{CE} = k_{EC} = \frac{4EI}{12} = 0.333EI$$

$$DF_{AB} = DF_{DC} = DF_{EC} = 0 \quad \therefore \quad DF_A = DF_D = DF_E = 1$$

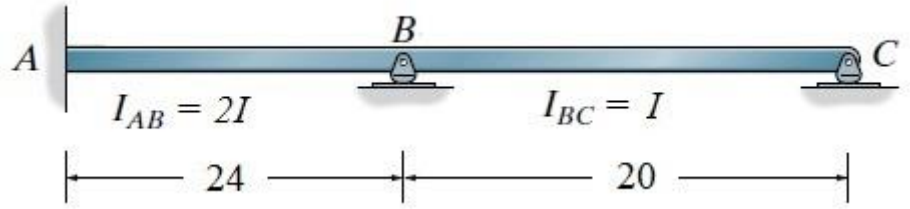
$$DF_{BA} = \frac{0.267}{0.267 + 0.222} = 0.545 \quad \therefore \quad DF_{BC} = \frac{0.222}{0.267 + 0.222} = 0.455$$

$$DF_{CB} = \frac{0.222}{0.267 + 0.222 + 0.333} = 0.27 \quad \therefore \quad DF_{CD} = 0.325 \quad \therefore \quad DF_{CE} = 0.405$$

گره	A		B		C			D		E	
اعضا	A	AB	BA	BC	CB	CD	CE	DC	D	EC	E
DF	1	0	0.545	0.455	0.27	0.325	0.405	0	1	0	1
MF	0	0	0	-135	135	0	0	0	0	0	0
مجموع لنگر	-43	43	86.15	-86.15	124.8	-55.5	-69.3	-27.7	27.7	-34.6	34.6

صفحه۵۰

مثال ۸: اگر تکیه‌گاه B به اندازه‌ی 2.65 cm به طرف پایین نشست کند و تکیه‌گاه A به اندازه‌ی 9.94×10^{-4} Rad به صورت ساعتگرد دوران داشته باشد، تیر را با استفاده از روش پخش لنگر تحلیل کنید.



$$k_C = 0 \quad \Rightarrow \quad DF_{BA} = 0 \qquad\qquad k_A = \infty \quad \Rightarrow \quad DF_A = 1$$

گره C:

$$k_{CB} = \frac{4EI}{20} \quad \Rightarrow \quad DF_{BC} = 1$$

گره A:

$$k_{AB} = \frac{8EI}{24} \quad \Rightarrow \quad DF_A = 0$$

گره B:

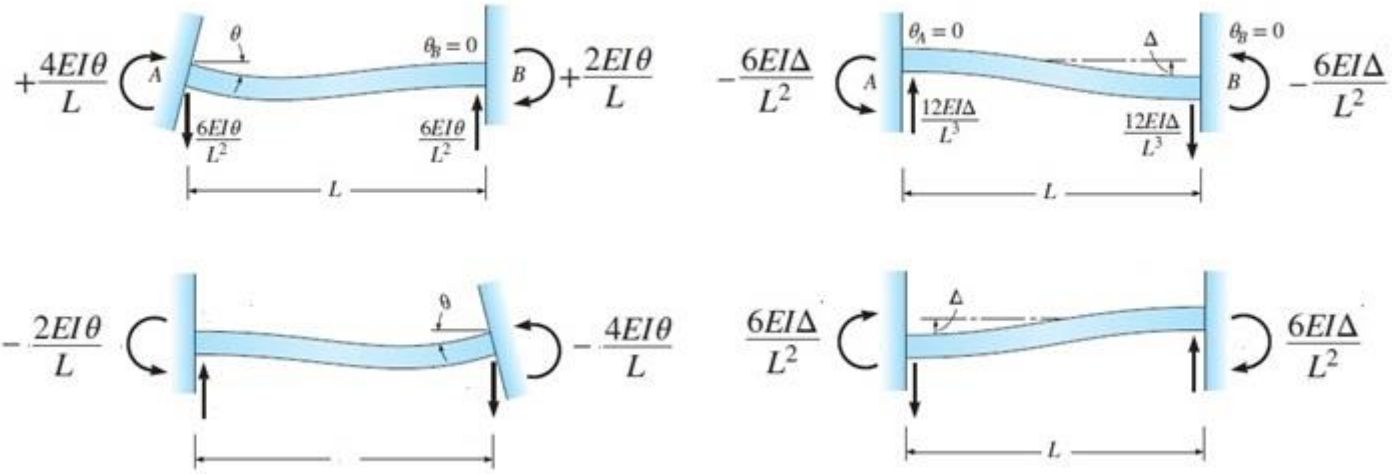
$$k_{BA} = \frac{8EI}{24L} = 0.333EI \quad \Rightarrow \quad DF_{BA} = 0.625$$

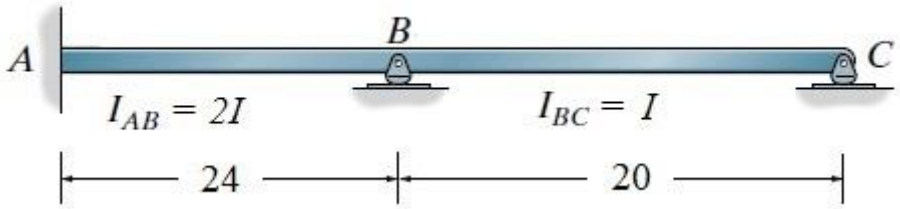
$$k_{BC} = \frac{4EI}{20} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{BC} = 0.375$$

$$M^{F}_{AB} = \frac{4E(2I)\theta}{24} - \frac{6E(2I)\Delta}{24^2} = \frac{2.1\times10^6(2\times599000)}{2400}\left(\frac{4\times9.94}{10^4} - \frac{6\times2.65}{2400}\right) = -27.77t.m$$

$$M^{F}_{BA} = \frac{2E(2I)\theta}{24} - \frac{6E(2I)\Delta}{24^2} = \frac{2.1\times10^6(2\times599000)}{2400}\left(\frac{2\times9.94}{10^4} - \frac{6\times2.65}{2400}\right) = -48.6t.m$$

$$M^{F}_{BC} = M^{F}_{CB} = \frac{6EI\Delta}{20^2} = \frac{6\times2.1\times10^6\times599000\times2.65}{2000^2} = 50t.m$$





گره A :

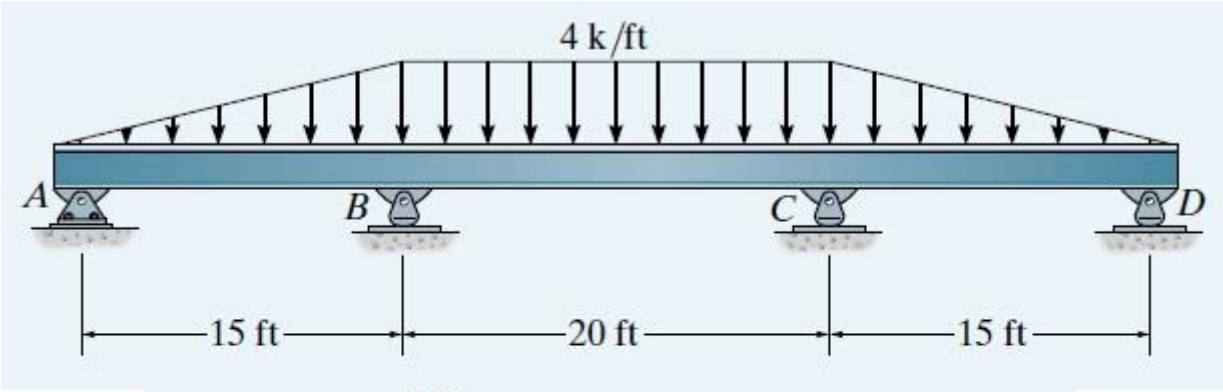
$$M^{F}_{AB} = \frac{4E(2I)\theta}{24} - \frac{6E(2I)\Delta}{24^2} = \frac{2.1\times10^6(2\times599000)}{2400}\left(\frac{4\times9.94}{10^4} - \frac{6\times2.65}{2400}\right) = -27.77t.m$$

$$M^{F}_{BA} = \frac{2E(2I)\theta}{24} - \frac{6E(2I)\Delta}{24^2} = \frac{2.1\times10^6(2\times599000)}{2400}\left(\frac{2\times9.94}{10^4} - \frac{6\times2.65}{2400}\right) = -48.6t.m$$

$$M^{F}_{BC} = M^{F}_{CB} = \frac{6EI\Delta}{20^2} = \frac{6\times2.1\times10^6\times599000\times2.65}{2000^2} = 50t.m$$

گره	A			B			C				
انتهاهای متصل به گره	گیردار A	AB		BA	BC		CB	مفصل C			
DF	**1**	**0**		**0.625**	**0.375**		**1**	**0**			
M^{FX}	0	-27.77		-48.6	50		50	0			
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	27.77	27.77	0	-0.875	-1.4	-0.525	-50	-50	0		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	-0.4375		0	-25		-0.2625	0			
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0.4375	0.4375	0	15.625	25	9.375	0.2625	0.2625	0		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	7.8125		0	0.1312		4.6875	0			
جمع لنگر	19.63	-19.63		-32.3	32.3		0	0			

مثال۹: با سختی اصلاح شده سازه متقارن و بارگذاری متقارن حل شود



$$K_{AB} = \frac{3EI}{15}$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{20}$$

$$\mathrm{DF}_{AB} = \frac{3EI/15}{3EI/15} = 1$$

$$\mathrm{DF}_{BA} = \frac{3EI/15}{3EI/15 + 2EI/20} = 0.667$$

$$\mathrm{DF}_{BC} = \frac{2EI/20}{3EI/15 + 2EI/20} = 0.333$$

$$(\mathrm{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{15} = \frac{4(15)^2}{15} = 60\ \mathrm{k \cdot ft}$$

$$(\mathrm{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{4(20)^2}{12} = -133.3\ \mathrm{k \cdot ft}$$

گره			B					
انتهاهای متصل به گره			BA	BC				
DF			**0.667**	**0.333**				
M^{FX}			60	-133.33				
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			48.91	73.33	24.42			
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	0				
جمع لنگر			108.9	-108.9				

خط تاثیر

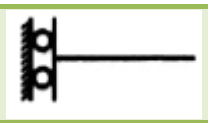
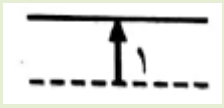
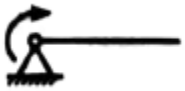
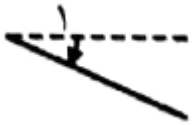
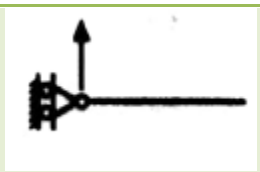
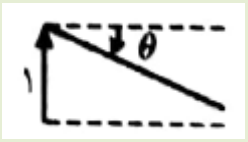
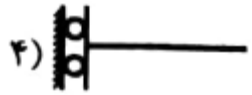
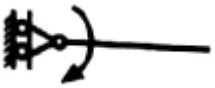
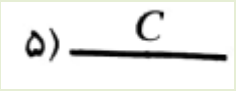
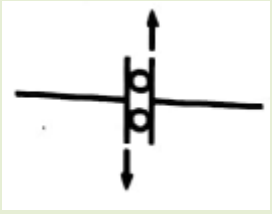
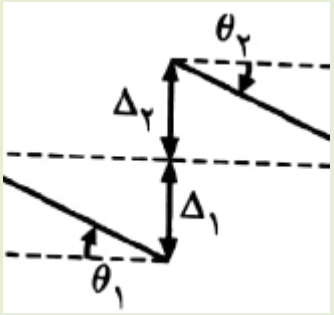
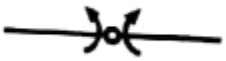
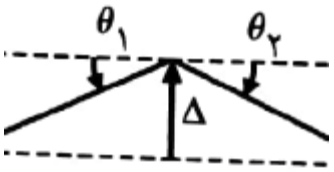
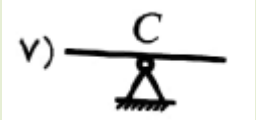
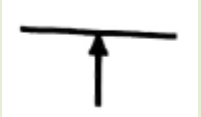
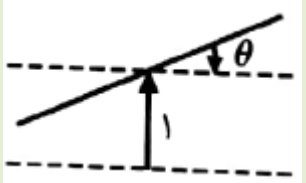
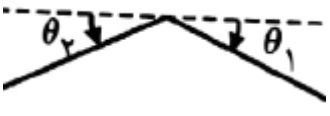
- تعریف خط تاثیر: خط تاثیر یک عکس‌العمل، مقدار نیرویی است که در اثر عبور بار واحد متحرک از روی سازه در آن عکس‌العمل ایجاد می‌شود.

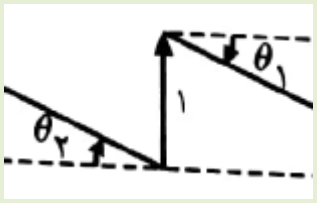
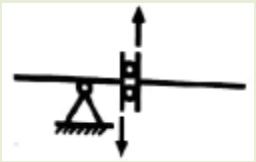
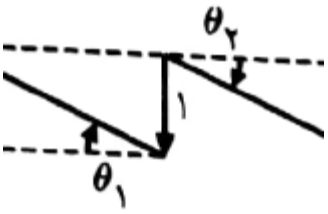
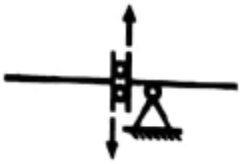
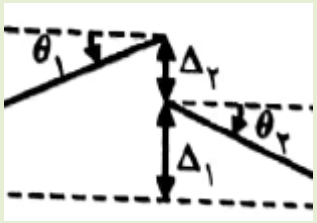
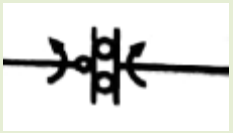
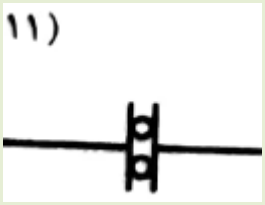
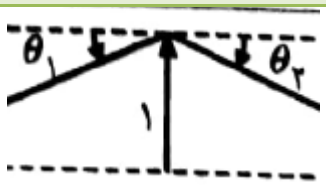
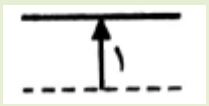
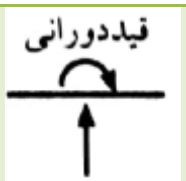
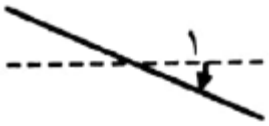
گام ۱: قید یا عاملی که قصد ترسیم خط ترسیم آن را داریم از سازه حذف می‌کنیم.

گام ۲: تغییرمکان واحد در محل قید مورد نظر بر سازه اعمال می‌کنیم.

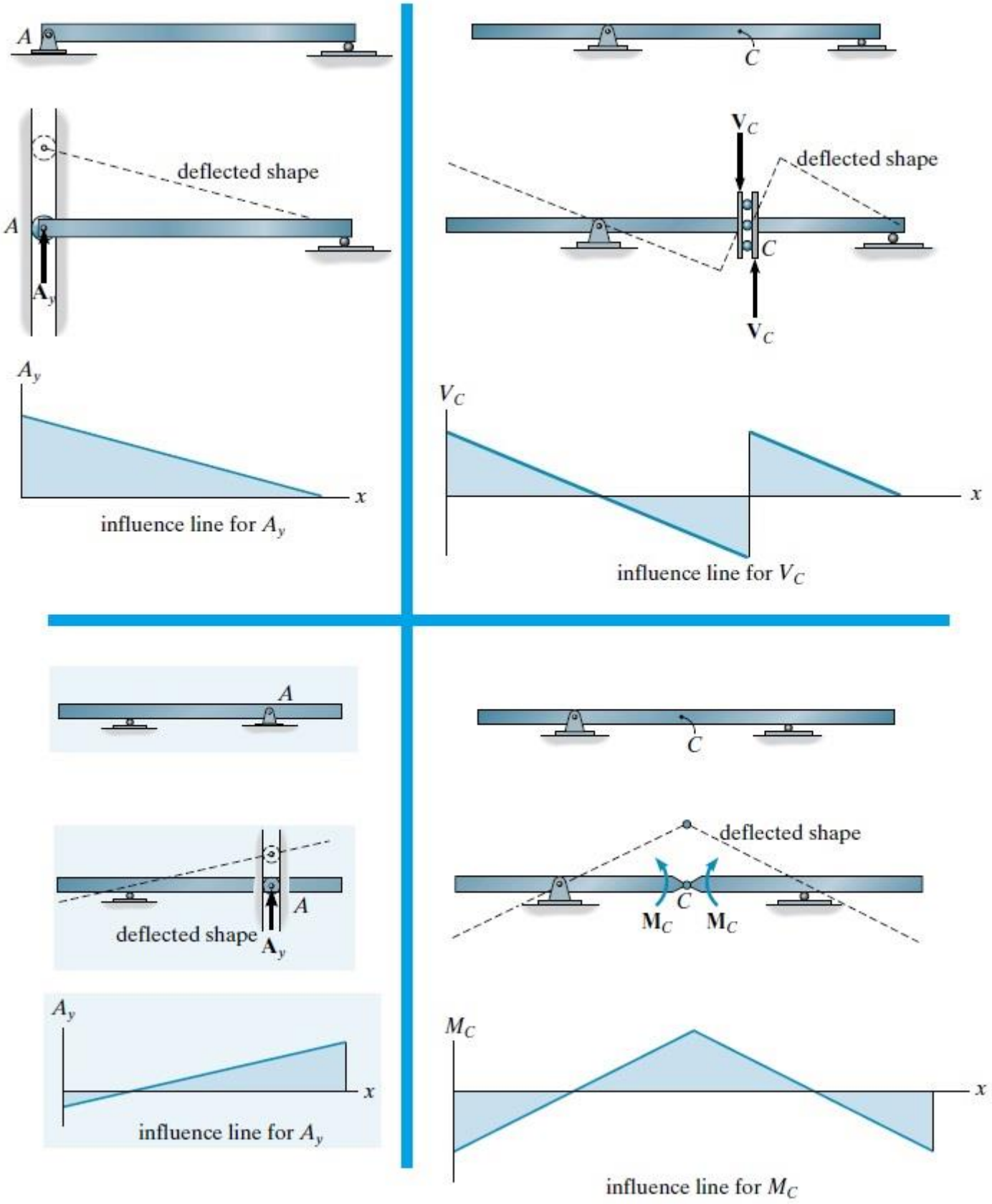
گام ۳: وضعیت تغییرشکل یافته‌ی سازه در این حالت، همان خط تاثیر قید یا عامل مورد نظر می‌باشد.

- اگر پس از حذف قید مورد نظر، قسمت‌هایی از سازه کماکان با تعداد قیدهای مناسب به زمین متصل شده باشند (پایدار باشند) تغییرشکلی در این قسمت‌ها ایجاد نشده و ارتفاع خط تاثیر در آن‌ها صفر است.
- خط تاثیر در سازه‌های معین همواره از خطوط راست تشکیل می‌شود (اعضا صلب در نظر گرفته می‌شوند).
- در مفاصل برشی، دوران دو طرف یک اندازه است، بنابراین تقسیم مقدار تغییرمکان واحد بین قسمت چپ و راست به نسبت طول چپ و راست انجام می‌گیرد (طرف راست رو به بالا و طرف چپ را رو به پایین میکشیم).
- در سازه‌های معین، سختی فنرهای انتقالی و پیچشی را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم سپس سازه جایگزین را می‌کشیم و خط تاثیر آن سازه‌ی جایگزین را ترسیم می‌کنیم (بر اساس این تئوری که در سازه‌های معین سختی فنرها تاثیری در نیروهای داخلی اعضا ندارد).

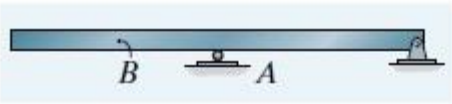
تکیه‌گاه یا اتصال	قید مورد نظر	شکل تکیه‌گاه بعد از آزادسازی قید مورد نظر	شکل تغییرشکل یافته‌ی عضو	توضیحات
۱) 	نیروی برشی در تکیه‌گاه			**شیب عضو صفر باقی می‌ماند**
۲) 	لنگر خمشی در تکیه‌گاه			-
۳) 	عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه			**θ با توجه به هندسه بقیه اعضا به دست می‌آید.**
۴) 	لنگر خمشی در تکیه‌گاه			**Δ با توجه به هندسه بقیه اجزای تیر به دست می‌آید.**
۵) 	نیروی برشی در نقطه C			$\Delta_1+\Delta_2=1$ $\theta_1=\theta_2$ **شیب دو طرف مفصل برشی با هم برابر است و با توجه به بقیه‌ی اعضا مشخص می‌شود**
۶) 	لنگر خمشی در نقطه‌ی C			$\theta_1+\theta_2=1$ **Δ با توجه به هندسه بقیه اعضا مشخص می‌شود**
۷) 	عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه			**θ با توجه به هندسه بقیه اعضا به دست می‌آید.**
۸) 	لنگر خمشی در نقطه C			$\theta_1+\theta_2=1$ **شیب دو طرف با توجه به هندسه بقیه اعضا مشخص می‌شود**

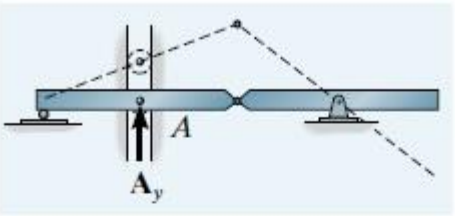
$\theta_1 = \theta_2$ و با توجه به بقیه اعضا مشخص می‌شود			برش سمت راست تکیه‌گاه C	۹) 
$\theta_1 = \theta_2$ و با توجه به بقیه اعضا مشخص می‌شود			برش سمت چپ تکیه‌گاه C	۱۰) 
$\theta_1 + \theta_2 = 1$ با $\theta_1, \theta_2, \Delta_1, \Delta_2$ توجه به هندسه بقیه اعضا مشخص می‌شود.			لنگر خمشی در مفصل برشی	۱۱) 
θ_1, θ_2 با توجه به هندسه بقیه اعضا مشخص می‌شود.			عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه	۱۲) 
به علت قید دورانی موجود، تیر افقی باقی می‌ماند.			عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه	۱۳) 
-			لنگر خمشی تکیه‌گاه	۱۴) 

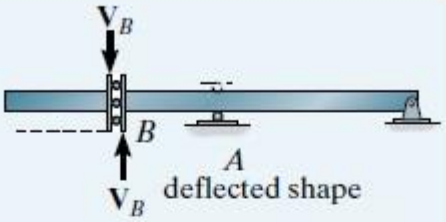
...


A
C
deflected shape
A
A_y
V_C
deflected shape
C
V_C
A_y
x
influence line for A_y
V_C
x
influence line for V_C
A
C
deflected shape
A
deflected shape
A_y
C
M_C
M_C
A_y
x
influence line for A_y
M_C
x
influence line for M_C

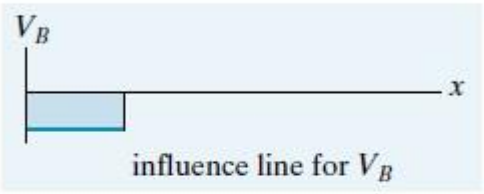

A

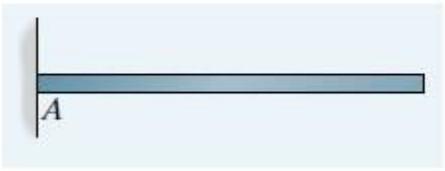

B
A


A
$\mathbf{A}_y$

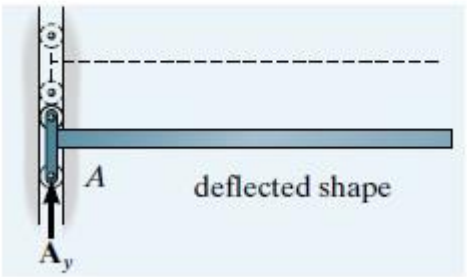

$\mathbf{V}_B$
B
A
$\mathbf{V}_B$
deflected shape

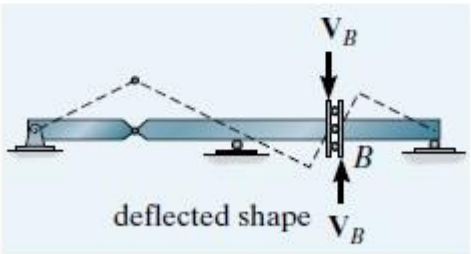

A_y
x
influence line for A_y

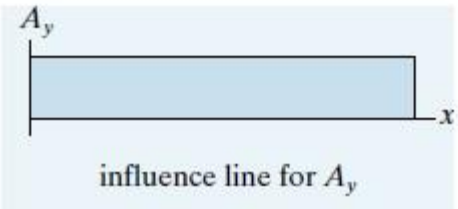

V_B
x
influence line for V_B

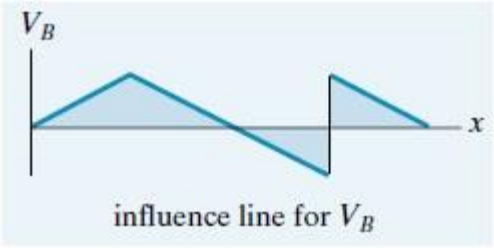

A

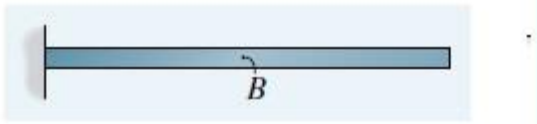

B

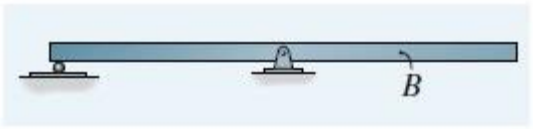

A
deflected shape
$\mathbf{A}_y$

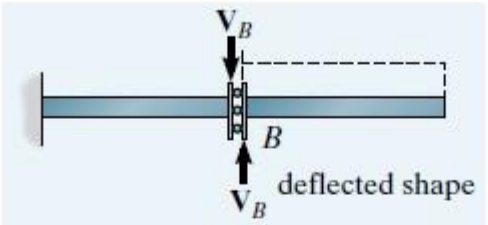

$\mathbf{V}_B$
B
deflected shape
$\mathbf{V}_B$

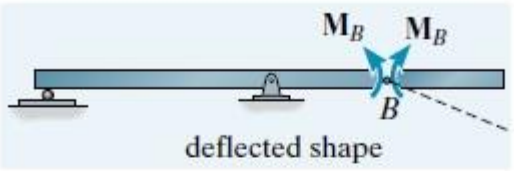

A_y
x
influence line for A_y

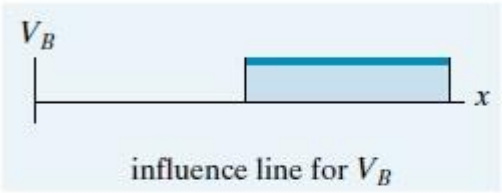

V_B
x
influence line for V_B

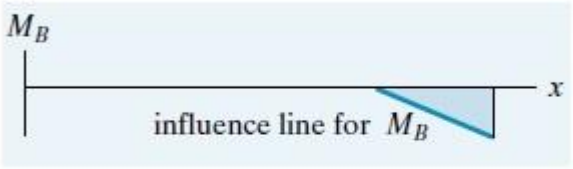

B

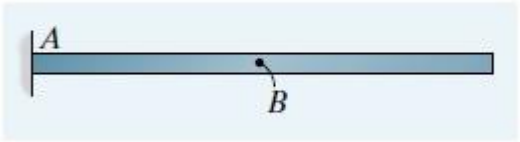

B

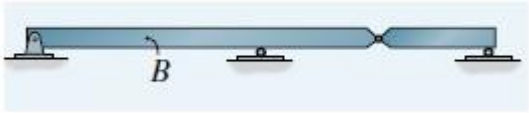

V_B
B
V_B
deflected shape

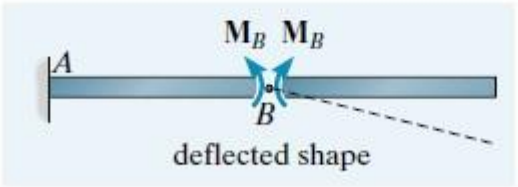

M_B
M_B
B
deflected shape

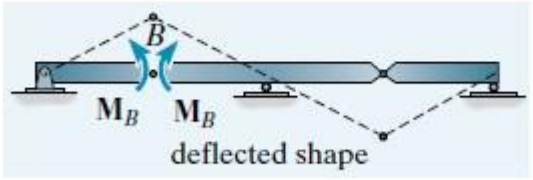

V_B
x
influence line for V_B

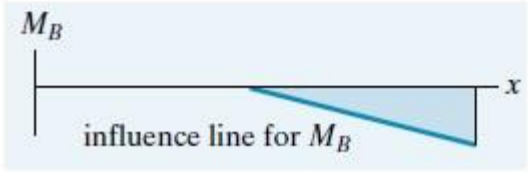

M_B
x
influence line for M_B

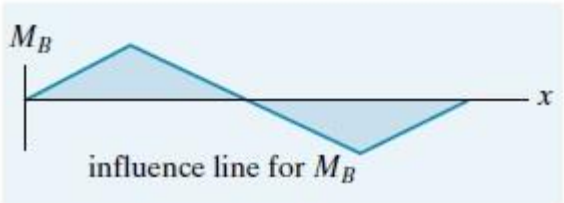

A
B

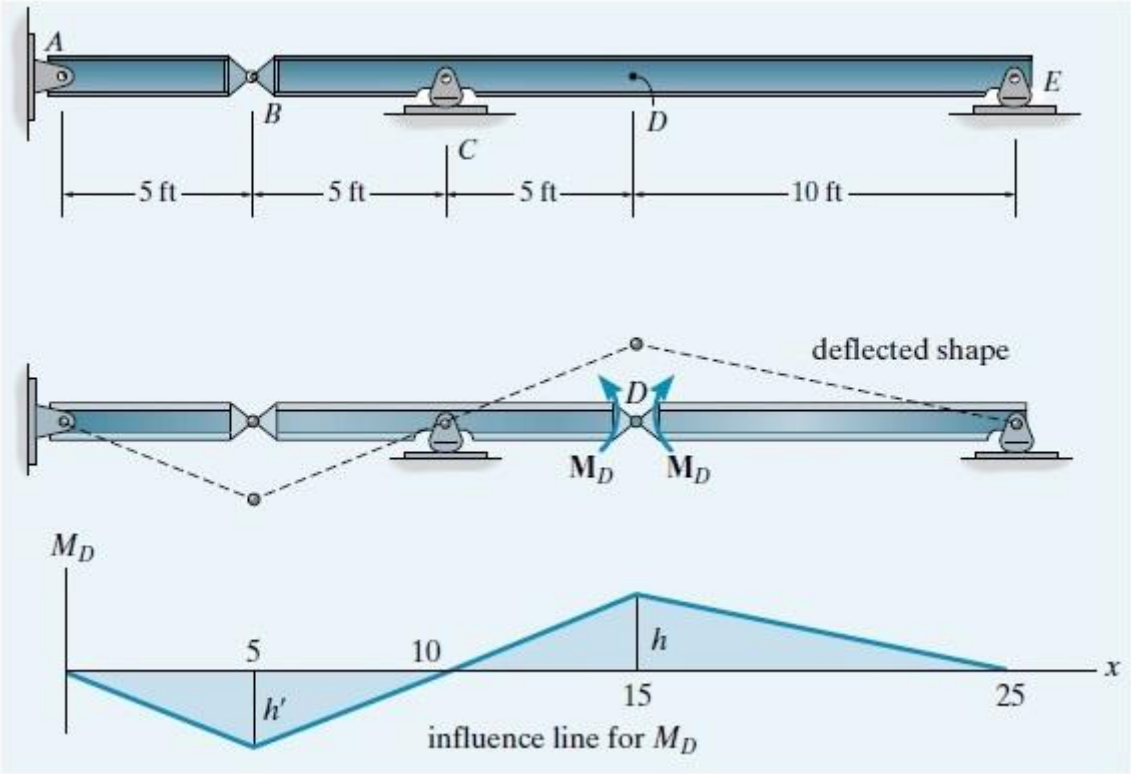

B


M_B
M_B
A
B
deflected shape


B
M_B
M_B
deflected shape

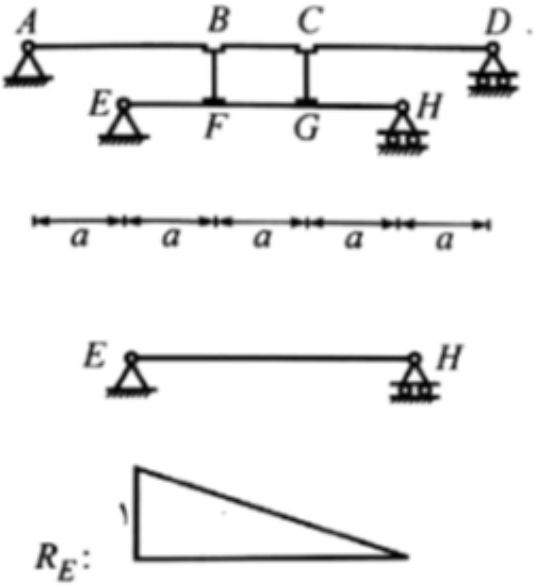

M_B
x
influence line for M_B


M_B
x
influence line for M_B

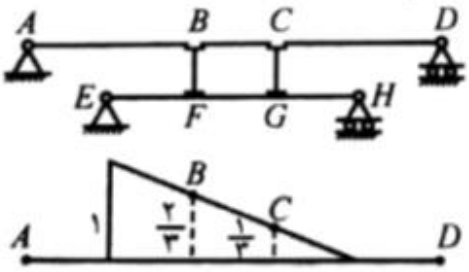

A
B
C
D
E
5 ft
5 ft
5 ft
10 ft
deflected shape
D
$\mathbf{M}_D$
$\mathbf{M}_D$
M_D
5
10
h
x
h′
15
25
influence line for M_D

خط تاثیر در تیرهای پانل دار

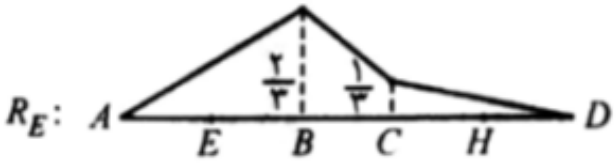
در تیر زیر بار از مسیر ABCD گذر می‌کند و از طریق دو تیر فرعی بر نقاط F و G انتقال داده می‌شوند. برای ترسیم خط تاثیر چنین تیرهایی در گام اول در تیر اصلی EH خط تاثیر کنش مورد نظر را (فرض کنیم عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه E) بدون توجه به وجود تیرهای فرعی و پانل‌ها ترسیم می‌کنیم.



در گام دوم، نقاط زیر ابتدا و انتهای هر پانل را روی خط تاثیر رسم شده در مرحله‌ی قبل را مشخص می‌کنیم.



در گام سوم با متصل کردن نقاطی که در مرحله‌ی قبل مشخص شده‌اند خط تاثیر تیر پانل‌دار به دست می‌آید.



خط تاثیر خرپاها

برای رسم خط تاثیر یک عضو خرپایی، نیروی محوری ایجاد شده در آن عضو خرپایی هنگامی که بار واحد از روی قسمت‌های پایینی یا بالایی خرپا عبور می‌کند را به دست می‌آوریم. برای این منظور دو روش کلی وجود دارد:

روش اول: بار واحد را روی گره‌های خرپا قرار داده و با تحلیل خرپا نیروی داخلی در عضو مورد نظر را به دست می‌آوریم.

روش دوم: با توجه به روش مولر برسلاو، عضو مورد نظر را از خرپا حذف کرده و با اعمال دو نیرو در راستای عضو دو گره را به اندازه‌ی واحد به یک‌دیگر نزدیک کرده و سپس تغییرشکل سازه را ترسیم می‌کنیم، تغییرشکل قسمتی که بار واحد روی آن حرکت می‌کند معادل خط تاثیر عضو مورد نظر است. در این روش پس از حذف عضو مورد نظر، تمامی چشمه‌های خرپا که صلب باشند (تشکیل مثلث دهند) و به هم متصل باقی بمانند مثل یک جسم صلب یکپارچه تغییرشکل می‌دهند و خط تاثیر در این قسمت‌ها دچار شکستگی نخواهد بود. اگر جسم صلبی با قیدی مانند یک تکیه‌گاه مفصلی به زمین متصل شود برای رسم تغییرشکل این جسم در مجموعه، آن را حول نقطه اتصال به زمین دوران می‌دهیم.

- در رسم خط تاثیر نیروی داخلی هر عضو خرپایی با روش مولر برسلاو، شناسایی قسمت‌های صلب تشکیل شده از مثلث‌های مبنا بسیار مفید است. باید دقت شود که هر یک از این قسمت‌ها در رسم تغییرشکل خرپا به صورت یکپارچه تغییرشکل می‌دهند.
- در خرپاهای معین و نامعین، منحنی خط تاثیر لزوما از خطوط راست تشکیل می‌شود.
- با استفاده از مولربرسلاو معمولا شکل کیفی خط تاثیر خرپاها به دست می‌آید. برای به دست آوردن مقادیر دقیق نمودار باید روش محاسباتی دنبال شود.
- اگر نیروی عضو فشاری باشد، ارتفاع خط تاثیر منفی و در حالت کششی ارتفاع خط تاثیر مثبت فرض می‌شود.

کاربرد خط تاثیر در به دست آوردن حداکثر یک کنش تحت بارگذاری متحرک

برای بارهای متمرکز متحرک: خط تاثیر قید مربوطه را رسم کرده و بار متمرکز را در محل حداکثر ارتفاع خط تاثیر قرار می‌دهیم، از حاصل‌ضرب حداکثر مقدار خط تاثیر در مقدار نیرو، حداکثر مقدار قید مورد نظر به دست می‌آید.

برای بارهای گسترده یکنواخت: در صورت عبور بار گسترده و ثابت q از روی سازه، ابتدا ناحیه‌ای که مساحت زیر منحنی خط تاثیر بیشینه است را به دست می‌آوریم، اگر بار گسترده در این ناحیه قرار گیرد قید مورد نظر بیش‌ترین مقدار را دارد (مقدار آن برابر ضرب شدت بار گسترده در مساحت زیر منحنی خط تاثیر است)

خلاصه‌ای از روش کانی

معادلات شیب افت با قرارداد علامت کانی:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + \frac{1}{C_{ik}} M'_{ik} + M'_{ik} + B_{ik} M''_{ik}$$

$$M_{ki} = \bar{M}_{ki} + \frac{1}{C_{ki}} M'_{ki} + M'_{ki} + B_{ki} M''_{ki}$$

جزء دوران $$M'_{ik} = \mu_{ik} \left(\bar{M}_i + \sum_k M'_{ki} + \sum_k B_{ik} M''_{ik} \right)$$

ضریب دوران $$\mu_{ik} = -C_{ik} \times \frac{k'_{ik}}{\sum_k k'_{ik}}$$

لنگر مقاوم گره $$\bar{M}_i = \sum_k \bar{M}_{ik}$$

ثابت جزء انتقال $$B_{ik} = \frac{1}{3} \times \frac{1 + C_{ik}}{C_{ik}}$$

جزء انتقال $$M''_{ik} = \nu_{ik} \left(\bar{M}_r + \sum_r B_{ik} M'_{ik} \sum_r B_{ki} M'_{ki} \right)$$

ضریب انتقال $$\nu_{ik} = -\frac{3 C_{ik} K'_{ik}}{\sum_r (B_{ik} + B_{ki}) C_{ik} K'_{ik}}$$

لنگر طبقه $$\bar{M}_r = \frac{h_r}{3} \left(\sum P + \sum_r FES_{ik} \right) = \frac{Q_r h_r}{3}$$

برش طبقه $$Q_r = \sum P + \sum_r FES_{ik}$$

نیروی برش گیرداری $$FES_{ik} = R_{ik} + \frac{\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}}{h_r}$$

روش کانی برای تیرهای سراسری

۱- تعیین لنگرهای گیرداری $\bar{M}_{ik}$ و لنگرهای مقاوم در هر گره، لنگرهای گیرداری به علت بارهای خارجی و نشست‌های تکیه‌گاهی می‌باشند. لنگرهای مقاوم در هر گره نیز از جمع جبری لنگرهای گیرداری مربوط به آن گره به دست می‌آیند:

$$\bar{M}_i = \sum_k \bar{M}_{ik}$$

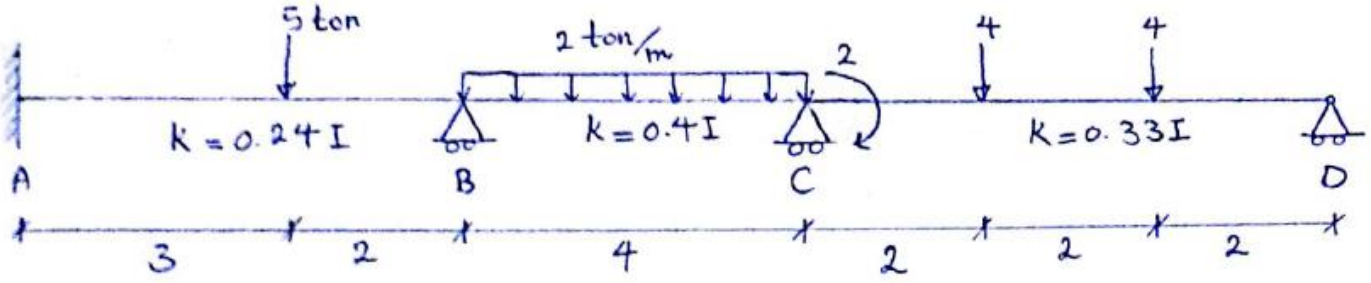
۲- تعیین ضرائب دوران با استفاده از رابطه‌ی $\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \times \frac{k_{ik}}{\sum_k k_{ik}}$

۳- مقدار اجزای دوران M'_{ik} از تکرار عمل زیر و پیشرفت از یک گره به گره‌ی دیگر در مسیر دلخواه تا رسیدن به دقت کافی به دست می‌آید: $M'_{ik} = \mu_{ik} \left(\bar{M}_i + \sum_k M'_{ki} \right)$

در سیکل اول، مقادیر اجزای دوران M'_{ki} مساوی صفر فرض می‌شود و در سیکل‌های بعدی، مقادیر محاسبه شده‌ی اجزای دوران در رابطه قرار داده می‌شود و آن‌قدر ادامه می‌یابد تا این اختلاف M'_{ik} سیکل‌های متوالی در حد تقریب مطلوب باشد.

۴- تعیین لنگرهای انتهایی اعضا به کمک رابطه‌ی $M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki}$

مثال یک تیر سراسری از روش کانی



گام اول: محاسبه لنگرهای گیرداری اعضا

$$\bar{M}_{AB} = -\frac{5\times 3\times 2^2}{5^2} = -2.4\,ton.m$$

عضو AB

$$\bar{M}_{BA} = -\frac{5\times 3^3\times 2}{5^2} = 3.6\,ton.m$$

$$\bar{M}_{BC} = -\frac{2\times 4^2}{12} = -2.67\,ton.m$$

عضو BC

$$\bar{M}_{CB} = \frac{2\times 4^2}{12} = 2.67\,ton.m$$

برای دهانه‌ی CD به دلیل انتهای مفصلی D، باید از سختی کاهش‌یافته استفاده نمود. لنگرهای گیرداری دهانه‌ی CD نیز از جدول مربوطه به تیرهای یک سرگیردار یک سر ساده محاسبه می‌شود. با این دو اصلاح، تکیه‌گاه مفصلی D تبدیل به تکیه‌گاه گیردار می‌شود که جزء دوران آن همواره مساوی صفر است.

$$\bar{M}_{ij} = -\frac{3Pa}{2L}\left(L-a\right)$$

$$\bar{M}_{CD} = -\frac{3\times 4\times 2}{2\times 6}\left(6-2\right) = -8\,ton.m$$

عضو CD

$$\bar{M}_{DC} = 0$$

گام دوم: محاسبه لنگر مقاوم گره‌ها

$$\bar{M}_B = \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} = 3.6 - 2.67 = 0.93\,ton.m$$

$$\bar{M}_C = \bar{M}_{CB} + \bar{M}_{CD} + M_{ex} = 2.67 - 8 - 2 = -7.33\,ton.m$$

$$\bar{M}_D = \bar{M}_{DC} = 0$$

گام سوم: تعیین ضرائب دوران

$$\sum k = k_{BA} + k_{BC} = 0.24I + 0.4I = 0.64I$$

گره B

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \times \frac{k_{BA}}{\sum k} = -\frac{1}{2} \times \frac{0.24I}{0.64I} = -0.1875$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \times \frac{0.4I}{0.64I} = -0.3125$$

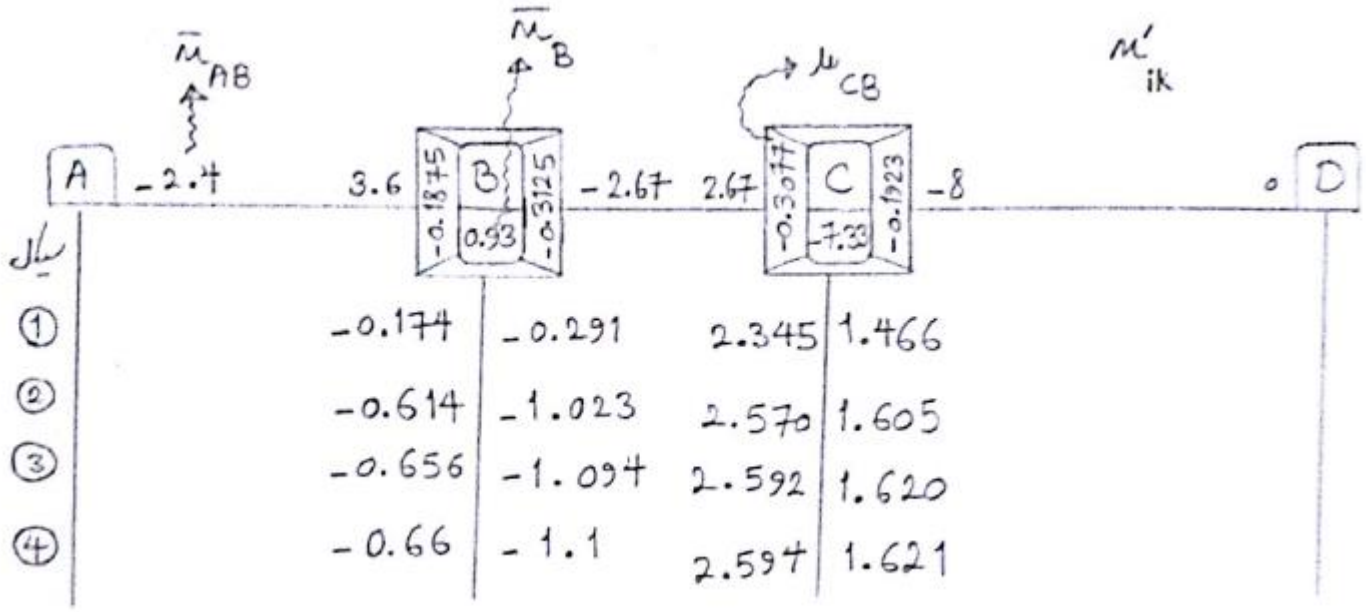
$$\sum k = k_{CB} + k_{CD}^{R} = 0.4I + \left(0.75 \times 0.33I\right) = 0.65I$$

گره C

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \times \frac{0.4I}{0.65I} = -0.3077$$

$$\mu_{CD} = -\frac{1}{2} \times \frac{0.2475I}{0.65I} = -0.1923$$

گام چهارم: تعیین مقادیر اجزای دوران



محاسبات مربوط به سیکل اول $M'_{ik} = \mu_{ik}\left(\bar{M}_i + \sum_k M'_{ki}\right)$

$$M'_{BA} = \mu_{BA}\left(\bar{M}_B + M'_{AB} + M'_{CB}\right) = -0.1875(0.93+0+0) = -0.174$$

$$M'_{BC} = \mu_{BC}\left(\bar{M}_B + M'_{AB} + M'_{CB}\right) = -0.3125(0.93+0+0) = -0.291$$

$$M'_{CB} = \mu_{CB}\left(\bar{M}_C + M'_{BC} + M'_{DC}\right) = -0.3077(-7.33-0.291+0) = 2.345$$

$$M'_{CD} = \mu_{CD}\left(\bar{M}_C + M'_{BC} + M'_{DC}\right) = -0.1923(-7.33-0.291+0) = 1.46$$

محاسبات مربوط به سیکل دوم

$$M'_{BA} = \mu_{BA}\left(\bar{M}_B + M'_{AB} + M'_{CB}\right) = -0.1875(0.93+0+2.345) = -0.614$$

$$M'_{BC} = \mu_{BC}\left(\bar{M}_B + M'_{AB} + M'_{CB}\right) = -0.3125(0.93+0+2.345) = -1.023$$

$$M'_{CB} = \mu_{CB}\left(\bar{M}_C + M'_{BC} + M'_{DC}\right) = -0.3077(-7.33-1.023+0) = 2.57$$

$$M'_{CD} = \mu_{CD}\left(\bar{M}_C + M'_{BC} + M'_{DC}\right) = -0.1923(-7.33-1.023+0) = 1.606$$

گام پنجم: تعیین لنگرهای انتهایی $M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki}$

$$M_{AB} = \bar{M}_{AB} + 2M'_{AB} + M'_{BA} = -2.4 + (2\times 0) - 0.66 = -3.06\, ton.m$$

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} + 2M'_{BA} + M'_{AB} = 3.6 + 2(-0.66) + 0 = 2.28$$

$$M_{BC} = -2.67 + 2(-1.1) + 2.595 = -2.28$$

$$M_{CB} = 2.67 + 2(2.594) - 1.1 = 6.76$$

$$M_{CD} = -8 + 2(1.621) + 0 = -4.76$$

استفاده از روش کانی برای تحلیل قاب‌های با انتقال گره (قاب‌های مستطیلی و منظم و دارای ارتفاع برابر ستون‌های طبقه اول):

ضریب انتقال $C_{ik} = C_{ki} = 0.5$

سختی دورانی مطلق $k'_{ik} = k'_{ki} = \frac{4EI}{L}$

ثابت جزء انتقال $B_{ik} = \frac{1}{3} \times \frac{1+C_{ik}}{C_{ik}} = 1$

گام ۱: گیردار کردن تمام گره‌ها در مقابل دوران و انتقال

گام ۲: محاسبه لنگرهای گیرداری اعضا $\bar{M}_{ik}$ برای بارگذاری داده شده و سپس لنگر مقاوم گره‌ها. دقت گردد که لنگر مقاوم گره از مجموع لنگرهای گیرداری اعضای آن به دست می‌آید.

گام ۳: تعیین نیروی برشی طبقه در حالت گیرداری گره‌ها از رابطه $Q_r = \sum P + \sum_r FES_{ik}$

$\sum P$ مجموع کلیه‌ی نیروهای افقی وارد بر طبقه‌ی مورد نظر و بالای آن است (علامت مثبت برای بار افقی از چپ به راست)

$\sum_r FES_{ik}$ مجموع نیروهای برشی موجود در بالای ستون‌های طبقه‌ی مورد نظر در حالت گیرداری کامل گره‌ها

$$FES_{ik} = R_{ik} + \frac{\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}}{h_r}$$

R_{ik} برای بار افقی از چپ به راست مثبت است (در طول ستون). اندیس r بیانگر طبقه‌ی r ام است.

با توجه به توضیحات بالا اگر هیچ بار جانبی به سازه اعمال نشود $Q_r = 0$ و اگر بارهای جانبی فقط در گره‌های قاب اعمال شود $Q_r = \sum P$ است.

گام ۴: محاسبه لنگر طبقه با استفاده از رابطه $\bar{M}_r = \frac{Q_r h_r}{3}$

گام ۵: تعیین ضرائب دوران μ با استفاده از رابطه‌ی $\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \times \frac{k_{ik}}{\sum_k k_{ik}}$ که $k_{ik} = \frac{I}{L}$ است.

گام ۶: تعیین ضرایب انتقال v در هر طبقه با استفاده از رابطه $v_{ik} = -\frac{3}{2} \times \frac{k_{ik}}{\sum_r k_{ik}}$

گام ۷: اجزای دوران M'_{ik} با انجام تعدادی تکرار توسط رابطه‌ی زیر و پیشرفت از یک گره به گره‌ی دیگر در طول مسیر دلخواه به دست می‌آید. دقت گردد که در دور اول تمام M'' ها مساوی صفر می‌شوند.

$$M'_{ik} = \mu_{ik}\left[\bar{M}_i + \sum_k \left(M'_{ki} + M''_{ik}\right)\right]$$

$\bar{M}_i$ لنگر مقاوم گره است که رابطه‌ی $\sum_k \bar{M}_{ik}$ به دست می‌آید.

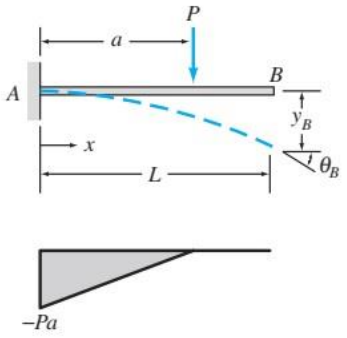
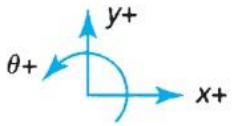
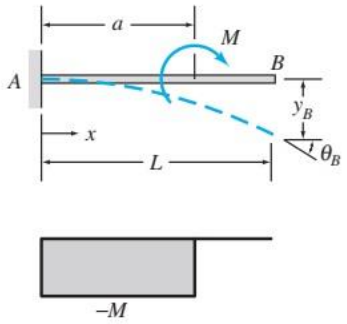
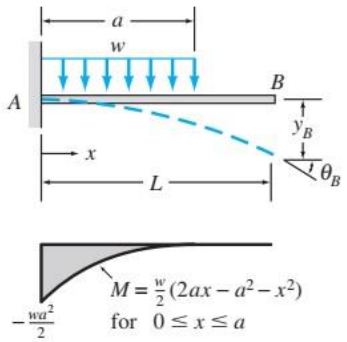
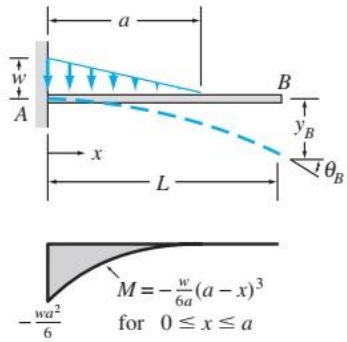
گام ۸: اجزای انتقال گره‌ها M'_{ik} از تکرار عملیات رابطه‌ی زیر و پیشرفت از یک طبقه به طبقه‌ی دیگر به دست می‌آید

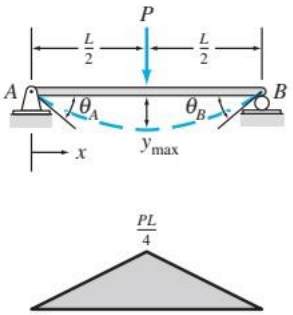
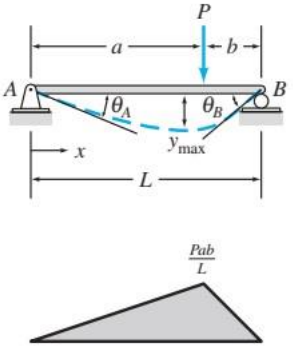
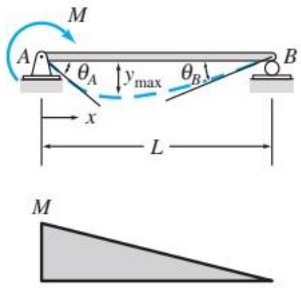
$$M'_{ik} = v_{ik}\left[\bar{M}_r + \frac{r}{r}\left(M'_{ik} + M'_{ki}\right)\right]$$

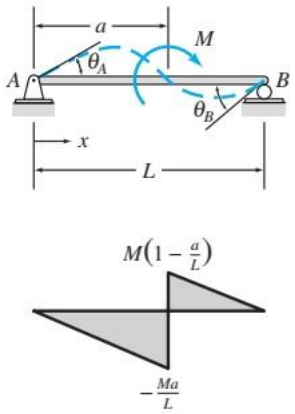
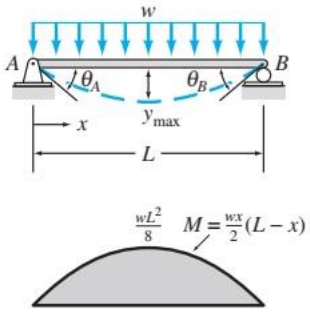
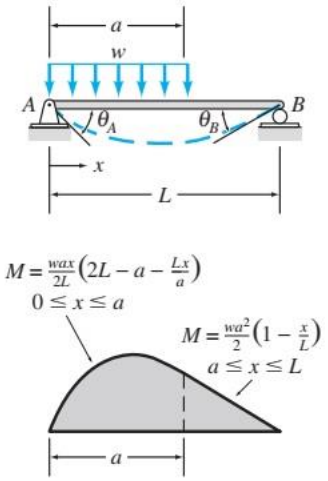
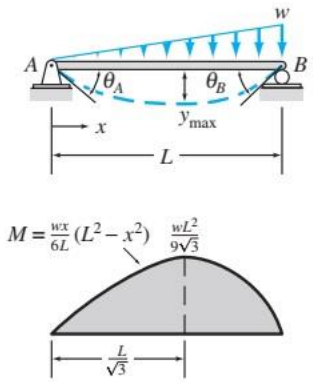
عملیات ۷ برای گره‌ها و ۸ برای هر طبقه تکرار می‌شود تا این که تمام اجزای دوران و انتقال با دقت دلخواه به دست آید.

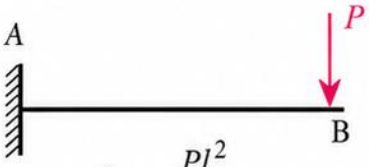
گام ۹: محاسبه لنگرهای انتهایی اعضا با استفاده از رابطه‌ی $M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik}$

پیوست: مقادیر و توابع خیز و شیب برای تعدادی از بارگذاری‌های متداول

Beam, Loading, and Bending Moment Diagram	Equations for Slope and Deflection
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{P}{2EI}(x^2 - 2ax)$ $y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3ax^2)$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{Pa^2}{2EI}$ $y = \frac{Pa^2}{6EI}(a - 3x)$ $\theta_B = -\frac{Pa^2}{2EI}$; $y_B = -\frac{Pa^2}{6EI}(3L - a)$ 
	$0 \le x \le a$: $\theta = -\frac{Mx}{EI}$ $y = -\frac{Mx^2}{2EI}$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{Ma}{EI}$ $y = \frac{Ma}{2EI}(a - 2x)$ $\theta_B = -\frac{Ma}{EI}$; $y_B = -\frac{Ma}{2EI}(2L - a)$
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{w}{6EI}(3ax^2 - 3a^2x - x^3)$ $y = \frac{w}{24EI}(4ax^3 - 6a^2x^2 - x^4)$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{wa^3}{6EI}$ $y = \frac{wa^3}{24EI}(a - 4x)$ $\theta_B = -\frac{wa^3}{6EI}$; $y_B = -\frac{wa^3}{24EI}(4L - a)$
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{w}{24EIa}(x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x)$ $y = \frac{w}{120EIa}(x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2)$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{wa^3}{24EI}$ $y = \frac{wa^3}{120EI}(-5x + a)$ $\theta_B = -\frac{wa^3}{24EI}$; $y_B = -\frac{wa^3}{120EI}(5L - a)$

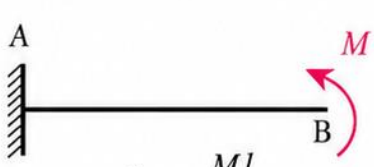
Beam, Loading, and Bending Moment Diagram	Equations for Slope and Deflection
	$0 \le x \le \frac{L}{2}$: $\theta = \frac{P}{16EI}(4x^2 - L^2)$ $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$ $\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}; \quad \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$ $y_{\max} = -\frac{PL^3}{48EI}$
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{Pb}{6EIL}(3x^2 + b^2 - L^2)$ $y = \frac{Pb}{6EIL}(x^3 + b^2x - L^2x)$ $a \le x \le L$: $\theta = \frac{Pa}{6EIL}[L^2 - a^2 - 3(L - x)^2]$ $y = \frac{Pa(L-x)}{6EIL}(x^2 + a^2 - 2Lx)$ $\theta_A = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2)$ $\theta_B = \frac{Pa}{6EIL}(L^2 - a^2)$ For $a \ge b$: $y_{\max} = -\frac{Pb}{9\sqrt{3}EIL}(L^2 - b^2)^{3/2}$ at $x = \left(\frac{L^2 - b^2}{3}\right)^{1/2}$
	$\theta = -\frac{M}{6EIL}(3x^2 - 6Lx + 2L^2)$ $y = -\frac{M}{6EIL}(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$ $\theta_A = -\frac{ML}{3EI}; \quad \theta_B = \frac{ML}{6EI}$ $y_{\max} = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$ at $x = L\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Beam, Loading, and Bending Moment Diagram	Equations for Slope and Deflection
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{M}{6EIL}(-3x^2 + 6aL - 3a^2 - 2L^2)$ $y = \frac{M}{6EIL}(-x^3 + 6aLx - 3a^2x - 2L^2x)$ $\theta_A = \frac{M}{6EIL}(6aL - 3a^2 - 2L^2)$ $\theta_B = \frac{M}{6EIL}(L^2 - 3a^2)$
	$\theta = -\frac{w}{24EI}(4x^3 - 6Lx^2 + L^3)$ $y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ $\theta_A = -\frac{wL^3}{24EI}$ $\theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$ $y_{max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$ at $x = \frac{L}{2}$
	$0 \le x \le a$: $\theta = -\frac{w}{24EIL}[4Lx^3 - 6a(2L-a)x^2 + a^2(2L-a)^2]$ $y = -\frac{w}{24EIL}[Lx^4 - 2a(2L-a)x^3 + a^2(2L-a)^2x]$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{wa^2}{24EIL}(6x^2 - 12Lx + a^2 + 4L^2)$ $y = -\frac{wa^2}{24EIL}(L-x)(-2x^2 + 4Lx - a^2)$ $\theta_A = -\frac{wa^2}{24EIL}(2L-a)^2$ $\theta_B = \frac{wa^2}{24EIL}(2L^2 - a^2)$
	$\theta = -\frac{w}{360EIL}(15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4)$ $y = -\frac{w}{360EIL}(3x^5 - 10L^2x^3 + 7L^4x)$ $\theta_A = -\frac{7wL^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{wL^3}{45EI}$ $y_{max} = -0.00652\frac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$



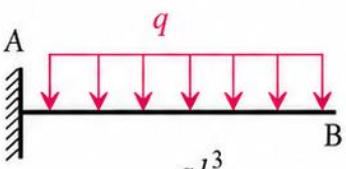
$$\theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{3EI}$$



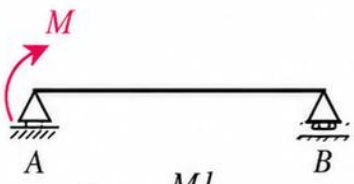
$$\theta_B = \frac{Ml}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{Ml^2}{2EI}$$



$$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI}$$

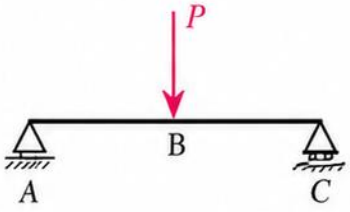
$$\Delta_B = \frac{ql^4}{8EI}$$



$$\theta_A = \frac{Ml}{3EI}$$

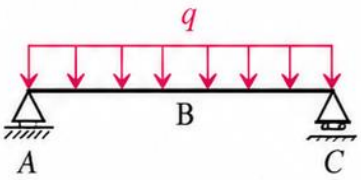
$$\theta_C = \frac{Ml}{6EI}$$

$$\Delta_B = \frac{Ml^2}{16EI}$$



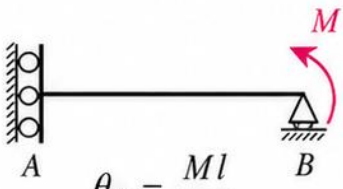
$$\theta_A = \theta_C = \frac{Pl^2}{16EI}$$

$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{48EI}$$



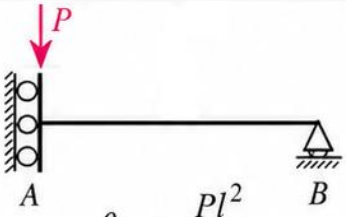
$$\theta_A = \theta_C = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$\Delta_B = \frac{5ql^4}{384EI}$$



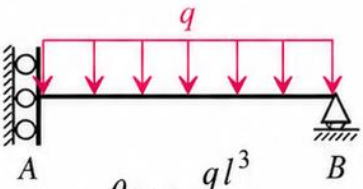
$$\theta_B = \frac{Ml}{EI}$$

$$\Delta_A = \frac{Ml^2}{2EI}$$



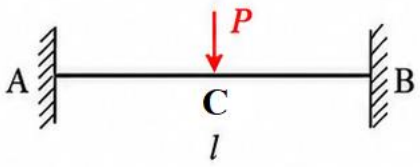
$$\theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\Delta_A = \frac{Pl^3}{3EI}$$

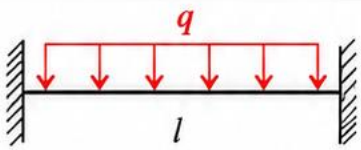


$$\theta_B = \frac{ql^3}{3EI}$$

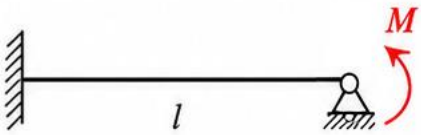
$$\Delta_A = \frac{5ql^4}{24EI}$$



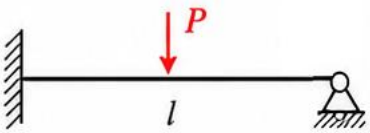
$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \ * \ M_A = M_B = \frac{Pl}{8} \ * \ M_C = \frac{Pl}{8} \ * \ \Delta = \frac{Pl^3}{192EI}$$



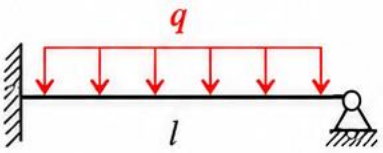
$$R_A = R_B = \frac{q\ell}{2} \ * \ M_A = M_B = \frac{q\ell^2}{12} \ * \ M_C = \frac{q\ell^2}{24} \ * \ \Delta = \frac{q\ell^4}{384EI}$$



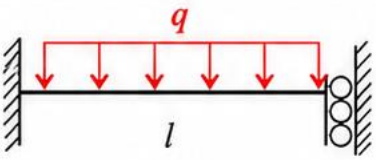
$$M_A = \frac{M}{2} \ * \ R_A = -R_B = \frac{3M}{2l} \ * \ \theta_B = \frac{Ml}{4EI}$$



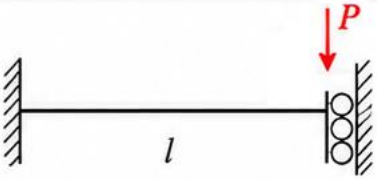
$$M_A = \frac{3Pl}{16} \ * \ R_A = \frac{11}{16}P \ * \ R_B = \frac{5}{16}P \ * \ \theta_B = \frac{Pl^2}{32EI}$$



$$M_A = \frac{q\ell^2}{8} \ * \ R_A = \frac{5}{8}q\ell \ * \ R_B = \frac{3}{8}q\ell \ * \ \theta_B = \frac{q\ell^3}{48EI}$$



$$M_A = \frac{q\ell^2}{3} \ * \ M_B = \frac{q\ell^2}{6} \ * \ \Delta_B = \frac{q\ell^4}{24EI} \ * \ R_A = q\ell$$



$$M_A = -M_B = \frac{Pl}{2} \ * \ \Delta_B = \frac{Pl^3}{12EI} \ * \ \Delta_C = \frac{Pl^3}{24EI}$$

$$* \ R_A = P \ *$$